

EMLYON 2016 S

Éléments de correction

Premier problème

Première partie

1. Les deux équations forment un système linéaire d'inconnue (P_1, P_2) , que l'on résoud sans difficulté :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 4P_1 + 9P_2 = A \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\iff} \begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 5P_2 = A - 4I_3 \end{cases} \iff \begin{cases} P_1 = \frac{1}{5}(9I_3 - A) \\ P_2 = \frac{1}{5}(A - 4I_3) \end{cases}.$$

On obtient :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **a.** Le calcul donne $P_1^2 = P_1$, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ et $P_2^2 = P_2$.
b. On démontre le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Il est vrai aux rangs $k = 0$ et $k = 1$ par définition de P_1 et P_2 et, s'il est acquis à un rang $k \in \mathbb{N}$, alors d'après **a.** :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k = (4P_1 + 9P_2)(4^kP_1 + 9^kP_2) \\ &= 4^{k+1}P_1^2 + 4 \cdot 9^kP_1P_2 + 9 \cdot 4^kP_2P_1 + 9^{k+1}P_2^2 \\ &= 4^{k+1}P_1 + 9^{k+1}P_2, \end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat au rang $k + 1$.

3. Un calcul similaire à celui mené en **2.b.**, à partir des relations établies en **2.a.**, montre que la matrice

$$B = \sqrt{4}P_1 + \sqrt{9}P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

vérifie $B^2 = 4P_1 + 9P_2 = A$.

4. La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 4 et 9.

Deuxième partie

5. Les applications $P \mapsto P(f)$ et $P \mapsto \sum_{i=1}^m P(\lambda_i)p_i$, *linéaires* de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbf{L}(E)$, coïncident par hypothèse sur les vecteurs $1, X, X^2, \dots, X^m$ de la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. Elles sont donc égales sur $\mathbb{R}_m[X]$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i)p_i.$$

Remarque. Bien entendu, on peut établir ce résultat en décomposant P sur la base canonique : $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$.

6. Comme le polynôme N , de degré m , s'annule en chacun des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, la formule de question 5. s'applique et donne $N(f) = \tilde{0}$.
7. **a.** On peut noter pour commencer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $M_i(\lambda_i) \neq 0$ car $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont deux-à-deux distincts par hypothèse, ce qui assure que L_i est bien défini. Il apparaît sur la définition que λ_j est racine de M_i pour tout $j \neq i$, si bien que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i(\lambda_j) = \begin{cases} \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i(\lambda_i) = 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

- b.** Dans la somme apparaissant dans la formule de la question 5. appliquée au polynôme $L_i \in \mathbb{R}_m[X]$, $1 \leq i \leq n$:

$$L_i(f) = \sum_{j=1}^m L_i(\lambda_j)p_j,$$

tous les termes sont donc nuls sauf celui d'indice $j = i$ et il reste donc : $L_i(f) = p_i$.

8. a. C'est l'hypothèse appliquée à $k = 0$:

$$e = f^0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 p_i = \sum_{i=1}^m p_i.$$

b. D'après a.,

$$\forall x \in E, \quad x = e(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \in \sum_{i=1}^m \text{Im } p_i$$

d'où $E = \sum_{i=1}^m \text{Im } p_i$.

9. a. On obtient immédiatement :

$$N = (X - \lambda_i)M_i = M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)L_i.$$

b. D'après les questions 6., 7.b. et a.,

$$(f - \lambda_i e) \circ p_i = (f - \lambda_i e) \circ L_i(f) = ((X - \lambda_i)L_i)(f) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)}N(f) = \tilde{0}$$

d'où il ressort que $\text{Im } p_i \subset \text{Ker}(f - \lambda_i e)$.

10. Par hypothèse, les endomorphismes p_1, \dots, p_m sont non nuls. L'inclusion de la question 9.b. assure alors que $\text{Ker}(f - \lambda_i e) \neq \{0\}$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Chacun des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ est donc valeur propre de f .

Par ailleurs, il ressort des questions 8.b. et 9.b. que les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(f) = \text{Ker}(f - \lambda_i e)$, $1 \leq i \leq m$, engendrent E . Comme ces sous-espaces sont en somme directe par théorème, ils sont donc supplémentaires dans E :

$$E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i e),$$

ce qui signifie que l'endomorphisme f est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

En affinant un peu l'argument précédent, on justifie que les sous-espaces $\text{Im } p_i$ sont supplémentaires dans E . En comparant les deux relations

$$\sum_{i=1}^m \dim(\text{Im } p_i) = \dim E \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim E$$

où $\dim(\text{Im } p_i) \leq \dim E_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on obtient alors $\dim(\text{Im } p_i) = \dim E_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. On a donc égalité des dimensions dans l'inclusion de la question 9.b., d'où l'on déduit que $E_{\lambda_i}(f) = \text{Im } p_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

11. a. Pour $i \neq j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, le polynôme $L_i L_j$ qui admet les réels deux-à-deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ pour racines, est multiple de $N = \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k)$: il existe $Q_{i,j} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L_i L_j = Q_{i,j} N$ et alors, d'après 6. et 7.b.,

$$p_i \circ p_j = L_i(f) \circ L_j(f) = (L_i L_j)(f) = (Q_{i,j} N)(f) = Q_{i,j}(f) \circ N(f) = \tilde{0}.$$

b. D'après 8.a. et a.,

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad p_i = e \circ p_i = \left(\sum_{j=1}^m p_j \right) \circ p_i = \sum_{j=1}^m p_j \circ p_i = p_i \circ p_i.$$

c. D'après a., b. et par linéarité de p_i ,

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad p_i \circ f = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j p_j \right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j p_i \circ p_j = \lambda_i p_i.$$

12. On démontre le résultat par récurrence sur k , celui-ci étant valable aux rangs $k \leq m$ par hypothèse. S'il est acquis à un rang k alors, d'après 11.c.,

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \right) \circ f = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k (p_i \circ f) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k+1} p_i,$$

ce qui constitue le résultat au rang $k + 1$ et achève donc la récurrence.

En raisonnant comme en 5., on en déduit que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

www.rb11d.fr

Troisième partie

13. L'application φ est bilinéaire par linéarité des p_i , $1 \leq i \leq m$, et bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Elle est symétrique par symétrie du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Enfin, pour $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^m \|p_i(x)\|^2 \geq 0$$

en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\varphi(x, x) = 0$, alors chacun des réels positifs $\|p_i(x)\|^2$, $1 \leq i \leq m$, est nul, ce qui signifie que $p_i(x) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et implique $x = \sum_{i=1}^m p_i(x) = 0$.

Toutes les conditions sont donc réunies pour que φ soit un produit scalaire sur E .

14. Pour $x, y \in E$, on observe d'après 11.c. que

$$\varphi(f(x), y) = \sum_{i=1}^m \langle (p_i \circ f)(x), p_i(y) \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle p_i(x), p_i(y) \rangle$$

est une expression symétrique en x, y . L'endomorphisme f est donc symétrique pour le produit scalaire φ , ce qui justifie de nouveau que f est diagonalisable.

15. La question 11.b. justifie déjà que p_i est un projecteur, nécessairement sur $\text{Im } p_i = \text{Ker}(p_i - e)$ parallèlement à $\text{Ker } p_i$. Par ailleurs, ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire φ car, d'après 11.a.,

$$\forall (x, y) \in \text{Im } p_i \times \text{Ker } p_i, \quad \varphi(x, y) = \sum_{j=1}^m \langle p_j(x), p_j(y) \rangle = \sum_{j=1}^m \langle p_j(p_i(x)), p_j(y) \rangle = \langle p_i(x), 0 \rangle = 0$$

d'où le résultat.

Deuxième problème

Première partie

1. Pour $x \leq 0$, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge grossièrement :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \neq 0.$$

2. a. Il vient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} \geq 0$$

alors que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \leq 0,$$

ce qui établit la croissance de $(u_{2p})_{p \geq 1}$ et la décroissance de $(u_{2p-1})_{p \geq 1}$. Enfin,

$$u_{2p-1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p)^x} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui achève de montrer que les deux suites $(u_{2p})_{p \geq 1}$ et $(u_{2p-1})_{p \geq 1}$ sont adjacentes. Par théorème, elles convergent alors toutes deux vers une limite commune $S(x)$.

- b. Pour $\varepsilon > 0$ donné, la convergence de $(u_{2p})_{p \geq 1}$ et $(u_{2p-1})_{p \geq 1}$ vers $S(x)$ donne l'existence de deux entiers $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall p \geq p_1, \quad |u_{2p} - S(x)| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall p \geq p_2, \quad |u_{2p-1} - S(x)| \leq \varepsilon.$$

En notant $n_0 = \max(2p_1, 2p_2 - 1) \geq 1$, on a alors, en distinguant les cas selon la parité de n :

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - S(x)| \leq \varepsilon.$$

c. La question b. établit la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, laquelle est donc convergente. Sa somme est la limite de la suite des sommes partielles :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

d. Les suites $(u_{2p})_{p \geq 1}$ et $(u_{2p-1})_{p \geq 1}$ étant adjacentes, leurs termes encadrent leur limite commune, et plus précisément par croissance de la première et décroissance de la seconde :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leq S(x) \leq u_{2(p+1)-1} = u_{2p+1} \leq u_{2p-1}.$$

e. Les inégalités de la question d. donnent, pour $n = 2p, p \geq 1$,

$$0 \leq S(x) - u_{2p} \leq u_{2p+1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x}$$

alors que pour $n = 2p - 1, p \geq 1$,

$$\frac{-1}{(2p)^x} = u_{2p} - u_{2p-1} \leq S(x) - u_{2p-1} \leq 0.$$

Dans les deux cas,

$$|S(x) - u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

et l'inégalité est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f. D'après la question e., il suffit que

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon^{1/x}} - 1$$

pour que u_n soit une valeur approchée de $S(x)$ à la précision ε , ce qui conduit au code ci-dessous :

Listing 1 : calcul d'une valeur approchée de $S(x)$

```

fonction y=evalS(x,eps)
  y=0; // initialisation des sommes partielles
  for k=1:(floor(1/eps^(1/x)))
    y=y+(-1)^(k+1)/k^x;
  end
endfonction
    
```

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $p \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j-1)^x} - \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j)^x} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}$$

d'où

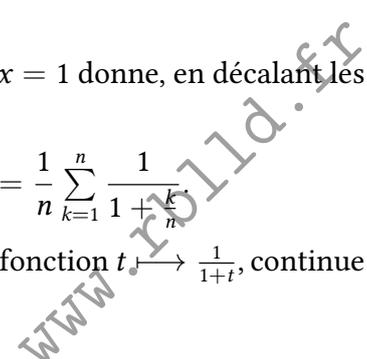
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \left(\sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j-1)^x} + \sum_{j=1}^p \frac{1}{(2j)^x} \right) - \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x} \\ &= \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x} \right) - \frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^x}. \end{aligned}$$

4. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la seconde formule de la question 3. appliquée à $p = n$ et $x = 1$ donne, en décalant les indices après simplification :

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

b. La question a. fait apparaître v_n comme somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, continue sur le segment $[0, 1]$. Par théorème, on a donc :

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$



Sachant par ailleurs que $(v_n)_{n \geq 1} = (u_{2n})_{n \geq 1}$ converge vers $S(x)$ d'après **2.a.**, on en déduit par unicité de la limite que $S(1) = \ln 2$.

5. D'après le résultat admis,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'où, en passant à la limite lorsque $p = n \rightarrow \infty$ dans la formule de la question **3.** avec $x = 2$, la valeur de

$$S(2) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Deuxième partie

6. La fonction $g_x : t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

> Lorsque $t \rightarrow 0$, $g_x(t) \sim \frac{1}{2t^{-x}} \geq 0$ si bien, par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$, que l'intégrale $\int_0^1 g_x(t) dt$ converge si, et seulement si, $-x < 1$ i.e. $x > -1$.

> Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $0 \leq g_x(t) \sim t^x e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) (\geq 0)$, ce qui justifie la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_x(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t) dt$ converge si, et seulement si, $x > -1$.

7. a. Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-e^{-t} \neq 1$ d'où :

$$\begin{aligned} (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} t^x e^{-kt} &= (-1)^n g_x(t) e^{-nt} - t^x \sum_{k=1}^n (-e^{-t})^k \\ &= (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + t^x e^{-t} \frac{1 - (-e^{-t})^n}{1 + e^{-t}} \\ &= (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + g_x(t) (1 - (-1)^n e^{-nt}) = g_x(t). \end{aligned}$$

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable affine $u = kt$ apporte à la fois la convergence et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^x e^{-u} \frac{du}{k} = \frac{1}{k^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1).$$

En effet, l'intégrale définissant $\Gamma(x+1)$ converge puisque $x > -1$ par hypothèse.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto g_x(t) e^{-nt}$ est continue sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall t > 0, \quad 0 \leq g_x(t) e^{-nt} = \frac{t^x}{1 + e^t} e^{-nt} \leq t^x e^{-nt}$$

d'où l'on déduit, d'après la question **b.**, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt$ et les inégalités

$$0 \leq \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt \leq \int_0^{+\infty} t^x e^{-nt} dt = \frac{1}{n^{x+1}} \Gamma(x+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il en ressort par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt = 0.$$

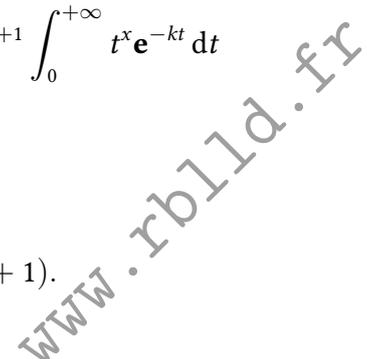
d. Il vient d'après **a.**, toutes intégrales convergentes vu **b.** et **c.** :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} g_x(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} dt \\ &= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} dt + \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}\right) \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

d'où, par passage à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, vu **2.c.** et **c.**,

$$I(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{x+1}}\right) \Gamma(x+1) = S(x+1) \Gamma(x+1).$$

8. D'après les questions **5.** et **7.d.**, $I(1) = S(2) \Gamma(2) = \frac{\pi^2}{12}$.



Troisième partie

9. Il vient immédiatement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(-t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} = \frac{e^t}{e^{2t}(1 + e^{-t})^2} = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} = f(t)$$

ce qui prouve que la fonction f est paire.

10. La fonction f est continue et positive sur \mathbb{R} . De plus,

$$\int f(x) dx = \frac{-1}{1 + e^x} + k$$

admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$, ce qui justifie la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + e^x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1 + e^x} = 0 - (-1) = 1.$$

La fonction f est donc une densité de probabilité.

11. La fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \left[\frac{-1}{1 + e^t} \right]_{-\infty}^x = 1 - \frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

12. a. La fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec $0 \leq t^n f(t) \sim t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \geq 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui assure la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

Grâce au changement de variable affine $u = -t$, on en déduit par parité de f la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = \int_{-\infty}^0 (-u)^n f(-u) du = (-1)^n \int_{-\infty}^0 u^n f(u) du, \tag{1}$$

donc de $\int_{-\infty}^0 t^n f(t) dt$ et finalement celle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt$, ce qui signifie que la variable X admet un moment d'ordre n .

b. D'après la formule (1),

$$m_n(X) = \int_{-\infty}^0 t^n f(t) dt + \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = ((-1)^n + 1) \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt. \tag{2}$$

Il en ressort pour n impair que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p+1}(X) = 0.$$

c. Par intégration par parties sur $[0, x] \subset [0, +\infty[$, il vient :

$$\int_0^x t^{2p} \frac{e^t}{(1 + e^t)^2} dt = \left[t^{2p} \frac{-1}{1 + e^t} \right]_0^x - \int_0^x 2pt^{2p-1} \frac{-1}{1 + e^t} dt = -\frac{x^{2p}}{1 + e^x} + 2p \int_0^x \frac{t^{2p-1}}{1 + e^t} dt$$

d'où, par passage à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t) dt = 2p \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p-1}}{1 + e^t} dt = 2pI(2p - 1).$$

Vu la relation (2), on en déduit que :

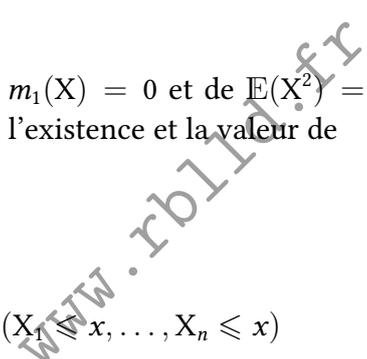
$$m_{2p}(X) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2p} f(t) dt = 4pI(2p - 1).$$

13. Les questions 12.b. et 12.c. donnent l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X) = m_1(X) = 0$ et de $\mathbb{E}(X^2) = m_2(X) = 4I(1) = \frac{\pi^2}{3}$. On en déduit, d'après la formule de Kœnig-Huygens, l'existence et la valeur de

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

14. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient classiquement par indépendance de X_1, \dots, X_n :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x) = F_X(x)^n. \end{aligned}$$



On en déduit, d'après la question **11.**, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x + \ln n) = F_X(x + \ln n)^n = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, il vient d'après **a.** :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= \exp\left[-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)\right] = \exp\left[-n\left(\frac{e^{-x}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right], \quad n \rightarrow \infty. \\ &= \exp(-e^{-x} + o(1)) \rightarrow \exp(-e^{-x}) \end{aligned}$$

La fonction limite $F : x \mapsto \exp(-e^{-x})$ est croissante et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , de limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. C'est donc la fonction de répartition d'une variable Z à densité

$$f_Z : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \exp(-e^{-x}).$$

La limite obtenue ci-dessus établit la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la variable Z .

