Rapport sur les épreuves de mathématiques des concours 2007 des classes préparatoires économiques et commerciales

APHEC

juin 2007

Ce document est public, et disponible sur le site de l'APHEC (`http://www.int-evry.fr/aphec`), rubrique "Observatoire des concours / Rapports annuel sur les concours"

Introduction

Comme tous les ans, l'APHEC publie dans un rapport ses remarques sur les sujets de mathématiques posés lors des concours d'entrée au grandes écoles de commerce. Les remarques de l'année dernière sur une meilleure répartition des épreuves dites de math 1 / math 2 pour les écoles phares restent d'actualité. Nous renvoyons le lecteur au rapport 2006 pour plus de détail.

Pour les sujets proprement dit, il ressort de nos analyses les points suivants :

- Cette année, les sujets de la voie E ont globalement été très satisfaisants. Les rapports précédents de l'APHEC ont visiblement été lus, et les concepteurs ont su tirer profit de nos remarques antérieures.
- Certains sujets sont utilisés par de nombreuses écoles. Les concepteurs proposent des sujets ne portant que sur une partie réduite du programme (par exemple EML voie S math 1), et par conséquent certaines écoles ne recrutent pas sur la totalité du programme de mathématiques.
- Pour la même raison, les concepteurs ont la responsabilité d'offrir des sujets adaptés à l'ensemble des candidats concernés, et non pas de concevoir un sujet "vitrine" pour l'école conceptrice.
- Enfin, la lecture du programme que font certains concepteurs n'est pas toujours compatible avec les objectifs de formation, qui précisent en particulier que le programme de mathématiques de nos classes n'est "*ni un recueil de recettes utiles ni un cours sur des fondements de mathématiques générales*". Certains sujets ont visiblement été conçus par des professeurs de classe de mathématiques spéciales et sont certes mathématiquement corrects, mais souvent en total décalage par rapport à l'esprit du programme de nos classes. Par exemple, l'introduction de la norme infinie de $\mathbb{R}^n$ et de la norme matricielle induite (sujet HEC voie S math 1) peuvent paraître trop ambitieuses. Voici ci-dessous un extrait des objectifs de formation qui figure en préambule du programme de mathématiques (voie S).

  L'orientation du programme [...] s'organise autour de cinq points forts :

  1. *en algèbre linéaire, l'exploitation des structures euclidiennes [...]*
  2. *en analyse, la mise en évidence des relations entre les phénomènes discrets [...] et les phénomènes continus [...], l'emploi de représentations graphiques pour l'étude qualitative et quantitative de ces phénomènes, la recherche d'extremums en liaison avec des problèmes simples d'optimisation, et la maîtrise des fonctions usuelles [...] ;*
  3. *en probabilités et en statistique, la consolidation des acquis de l'enseignement secondaire, l'initiation aux phénomènes aléatoires, notamment l'emploi des lois usuelles, et une première approche du lien entre le modèle probabiliste et les séries statistiques ;*
  4. *une valorisation des aspects numériques et graphiques dans l'ensemble du programme ;*

5. *en relation avec le programme d'informatique, l'étude de quelques algorithmes numériques (recherche et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leurs performances).*

Table des matières

1 Tableau récapitulatif des épreuves étudiées en 2007

1.1 Option Economique

Date et appellation	**Concepteur**	**(coefficient) Écoles utilisant l'épreuve**
Mercredi 18 avril 2007 Ecricome voie E	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (4) ICN NANCY (5) ESC REIMS (5) ESC ROUEN (5) ESC TOULOUSE
Lundi 30 avril 2007 EML voie E math 3	EML	(4) EM Lyon (6) Concours commun CERAM / ESC Tours-Poitiers (ESCEM) (4) ESC Clermont (3) ESC Dijon (5) ESC Lille (4) ESC Pau (3) ESC Rennes (4) IECS Strasbourg (9) ESM de Saint-Cyr
Mercredi 2 mai 2007 HEC voie E math 3	HEC	(4) HEC (4) ESCP-EAP
lundi 7 mai 2007 EDHEC voie E	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (3) ESC Amiens (10) ESC Grenoble (GEM) (3) ESC Montpellier (6) INT Management (4) NEGOSUP (3) INSEEC (Paris-Bordeaux) (3) ISC (3) ENAss (option Mathématiques)
Mercredi 9 mai 2007 ESSEC voie E math 2	ESSEC	(4) HEC (4) ESSEC (3) ESCP-EAP (2) EM Lyon
Lundi 14 mai 2007 ESSEC voie E math 3	ESSEC	(4) ESSEC
Mardi 15 mai 2007 ESC voie E math 3	ESC	(5) ESC Bretagne Brest (5) ESC Chambéry (4) ESC La Rochelle (5) ESC Saint-Etienne (5) ESC Troyes (4) Ecole de Management de NORMANDIE (2) ISCID

1.2 Option Scientifique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Écoles utilisant l'épreuve
Mercredi 18 avril 2007 Ecricome voie S	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (5) EUROMED MARSEILLE (5) ICN NANCY (5) ESC REIMS (7) ESC ROUEN (5) ESC TOULOUSE
Lundi 30 avril 2007 EML voie S math 1	EM Lyon	(6) EM Lyon (6) Concours commun CERAM / ESC Tours-Poitiers (ESCEM) (5) ESC Clermont (5) ESC Dijon (5) ESC Lille (3) ESC Montpellier (4) ESC Pau (6) ESC Rennes (5) IECS Strasbourg
Mercredi 2 mai 2007 HEC voie S math 1	HEC	(6) HEC (6) ESCP-EAP (25) ENSAE
Lundi 7 mai 2007 EDHEC voie S	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (3) ESC Amiens (8) ESC Grenoble (GEM) (7) INT Management (4) NEGOSUP (4) INSEEC (Paris-Bordeaux) (4) ISC (3) ENAss (option Mathématiques)
Mercredi 9 mai 2007 CCIP voie S math 2	CCIP	(5) HEC (5) ESSEC (4) ESCP-EAP (3) EM Lyon
Lundi 14 mai 2007 ESSEC voie S math 1	ESSEC	(6) ESSEC
Mardi 15 mai 2007 ESC voie S	ESC	(5) ESC Bretagne Brest (5) ESC Chambéry (4) ESC La Rochelle (5) ESC Saint-Etienne (5) ESC Troyes (7) Ecole de Management de NORMANDIE (2) ISCID

1.3 Option Technologique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Écoles utilisant l'épreuve
Mercredi 18 avril 2007 Ecricome voie T	Ecricome	(4) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (3) ICN NANCY (4) ESC REIMS (4) ESC ROUEN (4) ESC TOULOUSE
Mercredi 9 mai 2007 CCIP voie T math 2	CCIP	(5) HEC (5) ESSEC (5) ESCP-EAP (3) EM Lyon (5) EDHEC (3) AUDENCIA Nantes (4) Concours commun CERAM / ESC Tours-Poitiers (ESCEM) (2) ESC Clermont (10) ESC Grenoble (GEM) (4) ESC Lille (3) ESC Rennes (5) INT Management
Mardi 15 mai 2007 ESC voie T	ESC	(3) ESC Amiens (4) ESC Bretagne Brest (4) ESC Chambéry (3) ESC La Rochelle (4) ESC Saint-Etienne (4) ESC Troyes (2) ESC Dijon (4) Ecole de Management de NORMANDIE (6) ESC Montpellier (4) ESC Pau (3) IECS Strasbourg (3) NEGOSUP (4) INSEEC (Paris-Bordeaux) (2) ISC (2) ISCID

2 Option Economique

2.1 ECRICOME 2007 voie E

Exercice 1 : Très classique, balayant le programme d'analyse et présentant un zeste d'informatique.
Pour le détail :
- Les valeurs absolues au 1.2.4 n'étaient pas indispensables.
- La question 1.3.4, plus fine a été traitée par assez peu de copies.

Exercice 2 : Un exercice d'algèbre, moins élémentaire que d'habitude, très sélectif pour le public concerné.

Exercice 3 :
- Pourtant très faciles, les premières questions ont surpris certains candidats.
- Les lois de L_1 et L_2 ont parfois été confondues avec les lois de Pascal.

- La partie sur les variables aléatoires à densité est très bien conçue, qui permet de vérifier l'acquisition des concepts fondamentaux.

Hormis le chapitre sur l'estimation (malgré la présence du verbe!), peu de notions sont absentes. La longueur est raisonnable et un bon étudiant pouvait traiter l'essentiel du sujet.

Comme d'habitude, le candidat est très protégé par la présence de questions fermées lui permettant de se contrôler au fur et à mesure ou d'avancer malgré l'abscence de réponses à quelques questions.

Cette épreuve s'est avérée sélective et bien adpatée au public Ecricome. C'est une très bonne épreuve qui donne des arguments pour convaincre les étudiants qui en douteraient que le travail est récompensé.

2.2 EML 2007 voie E math 3

Exercice 1 : Algèbre : Diagonalisation d'une matrice symétrique et application du calcul matriciel à l'étude de suites.

Exercice 2 : Analyse : Etude de fonctions numériques et application à l'étude d'une suite récurrente. Recherche d'un point critique de fonction de deux variables en relation avec l'étude initiale.

Exercice 3 : Probabilités : Etude de la partie entière et de la partie fractionnaire d'une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle.

L'ensemble est de facture classique et d'une longueur raisonnable. Il porte sur le programme des deux années en laissant de côté la partie "estimation" du cours de statistique. Ce sujet doit permettre de valoriser les étudiants rigoureux dans leur réflexion et dans leurs calculs. Il devrait permettre d'étaler les notes et de trier les candidats pour l'ensemble des écoles utilisant cette épreuve.

2.3 HEC 2007 voie E math 3

Exercice : *Algèbre lineaire dans $\mathbb{R}^3$ puis dans $\mathbb{R}^{2n+1}$*

L'exercice est adapté à ce type d'épreuve, très sélectif, mais un peu artificiel : pourquoi se placer dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ alors que l'on pouvait envisager le cas général (plus facile) dans $\mathbb{R}^n$ $\quad (n \geq 3)$ des matrices avec 1 sur la première ligne et sur la dernière colonne, puis se ramener à ce cas en changeant la numérotation des vecteurs de la base ?

Problème : *Lois de Laplace avec $\theta = 0$ puis estimation du paramètre θ dans le cas général.*

Le problème est assez progressif, un peu long et fait appel à une estimation par intervalle de confiance, bien dans l'esprit du nouveau programme. La dernière partie est difficile, mais abordable. On peut juste regretter que la simulation informatique fasse appel à une technique qui n'est pas explicitement au programme (utilisation de la fonction réciproque de la fonction de répartition) et sera donc abordée par un petit nombre d'initiés. Une petite question intermédiaire aurait évité cette "inégalité". Une erreur est à noter dans la question II.2, dans la définition des variables Z_i qui ne permet pas de répondre à la question sur l'indépendance du a). Cette erreur n'a cependant pas dû gêner les candidats.

Globalement, nous félicitons le concepteur qui a proposé un sujet apte à ne pas décourager les étudiants sérieux, qui pouvaient ainsi valoriser le travail de l'année. Certes le niveau semble de plus en plus exigeant, mais la progressivité des difficultés était bien dosée et il n'y avait pas de parties inabordables.

2.4 EDHEC 2007 voie E

Exercice 1 : *Diagonalisation de l'application* $M \to {}^tM$.

Exercice 2 : *Calcul de covariances de variables à densité.*

Exercice 3 : *Étude de fonctions et d'une primitive*

Problème : *Tirage de boules dépendant de lancers d'une pièce.*

L'épreuve est longue mais couvre l'ensemble du programme. Elle devrait permettre aux candidats de cette section de montrer toutes leurs qualités.

Les questions sont de difficulté variée, tant sur le plan du raisonnement que sur celui du calcul, tout en restant dans l'esprit du programme.

L'initiative est parfois laissée au candidat pour le cheminement,mais les résultats importants sont donnés.

Il est regrettable que, sur un plan mathématique, la formulation des questions ne soit pas assez complète et rigoureuse (exercice 2, problème 4c)). Mais cela n'a pas du gêner les candidats.

Ce problème donne entière satisfaction.

2.5 ESSEC 2007 voie E math 2

Pour la deuxième année, l'ESSEC était en charge, pour la voie économique, d'un sujet valant pour les écoles suivantes : HEC, ESSEC, ESCP-EAP, EM Lyon. Cela correspond à un vivier d'environ 2000 admissibles. Le sujet consiste en un seul problème subdivisé en quatre parties dont la difficulté est globalement progressive. Le thème du problème porte essentiellement sur les probabilités vues en deuxième année.

Partie I : *Modélisation poissonienne*

Presqu'aucune difficulté majeure à traiter la partie A. sauf la question I.A.5. où une indication eut, conformément au programme, été bienvenue. La partie B, bien qu'un peu technique, ne pose pas non plus de difficulté.

Partie II : *Médianes*

La seule difficulté de cette partie réside dans l'appréhension de la définition de "la médiane". Pour y aider, les exemples sont très éclairants. Cette partie se révélera sans doute, très discriminante.

Partie III : *Médiane d'une variable poissonienne*

La partie A. est un divertissement "stirlingien" sans surprise.

L'objectif de la partie B est de montrer que la médiane d'une variable suivant une loi de Poisson de paramètre entier n est réduite à cet entier n. En fait, on ne prouve qu'une inclusion au prix d'un long et délicat parcours. Les élèves auront, sans doute, beaucoup de mal à négocier les trois items de la question III.B.3.

Partie IV : *Inégalité maximale de Lévy*

Les questions IV.1. et IV.2. seront probablement un obstacle difficile à franchir pour la majorité des candidats. Les questions suivantes, bien que plus abordables, risquent, de ce fait, d'être délaissées ; ce qui est dommage.

En conclusion, le sujet est difficile, mais permettra de classer les candidats aux quatre écoles HEC, ESSEC, ESCP-EAP, EM Lyon de façon tout à fait correcte. Les remarques faites l'an dernier pour la voie économique ont été entendues.

2.6 ESSEC 2007 voie E math 3

Exercice : *Etude des puissances d'une matrice trigonalisable. Application aux suites.*

Cet exercice est assez calculatoire et ne présente pas un grand intérêt mathématique, mais il permet à tout candidat sérieux de valoriser ses connaissances en algèbre linéaire.

Problème : *Etude de quelques propriétés de la loi de Pareto puis estimation des paramètres d'une loi de Pareto.*

Le problème est très intéressant : il permet d'aborder les notions d'estimateurs et d'intervalles de confiance. Une grande partie du problème est abordable par la plupart des candidats et comporte quelques questions difficiles (introduction du produit de convolution) qui permettront de valoriser les meilleurs candidats.

L'épreuve Essec III est une épreuve très satisfaisante qui devrait permettre de trier correctement les candidats.

2.7 ESC 2007 voie E

L'épreuve se compose de trois exercices bien construits. Elle porte sur l'ensemble du programme.

Exercice 1 : Exercice d'algèbre centré sur l'étude du projecteur $M \to \frac{1}{2} \times (M +^t M)$ de $M_2(\mathbb{R})$ qui porte sur l'ensemble des connaissances d'algèbre linéaire.

Exercice 2 : Exercice d'analyse qui porte sur les suites et les fonctions d'une ou deux variables réelles.

Exercice 3 : Exercice de probabilité qui se résume à l'étude :
- de la somme de deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètres distincts.
- de l'estimation d'un paramètre d'une variables aléatoire à densité.

Toutes les parties sont largement accessibles à un élève qui a assimilé le cours et tous les calculs sont simples.

En résumé, c'est une excellente épreuve pour le niveau visé.

3 Voie Scientifique

3.1 ECRICOME 2007 voie S

Exercice 1 : On établit d'abord, en utilisant un équivalent, que la série de terme général $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ diverge. On montre ensuite que la série de terme général $u_n = \exp\left(\sum_{k=2}^{n} \ln(2 - e^{\frac{1}{k}})\right)$ diverge, puis que la suite (u_n) décroît et donc, par un raisonnement classique, que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

L'exercice fait appel aux techniques usuelles sur les suites et séries avec des raisonnements quelquefois fins. Il s'appuie exclusivement sur le programme de première année.

Exercice 2 : Le but de l'exercice est de prouver que, pour le produit scalaire classique $\langle A;\ B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la norme d'un produit est inférieure ou égale au produit des normes. Pour cela, on diagonalise ${}^tAA$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, et on utilise l'invariance de la trace par changement de base.

Cet exercice nécessite une bonne maîtrise de la formule du produit matriciel et des sommes doubles, mais de nombreuses réponses étant données, il peut être mené jusqu'au bout.

Problème : On montre de façon classique dans le préliminaire que si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$.

Dans la partie I, on détermine le maximum global d'une fonction de deux variables $L_n(a, b)$.

Dans la partie II, on étudie les propriétés d'une variable aléatoire de densité $f_{a,b}(x) = \frac{1}{b}e^{-\frac{x-a}{b}}$ pour $x \geqslant a$ (loi exponentielle "décalée"), sans oublier de simuler la loi.
La partie III est consacrée à l'estimation des paramètres a et b par des estimateurs construits à partir de la moyenne et du minimum de n variables indépendantes suivant cette loi. Après une nouvelle simulation informatique, le biais et le risque quadratique de ces estimateurs sont étudiés ; le problème se termine en montrant, grâce à la partie I, que les estimateurs introduits sont les estimateurs du maximum de vraisemblance.
Ce problème est intéressant, bien construit, tout à fait dans l'esprit du nouveau programme, mais un peu long.
Le préliminaire omet de préciser l'existence de $E(XY)$ (dans le cadre du programme, on ne sait rien sur le produit de deux variables aléatoires à densité non indépendantes). On aurait pu admettre le résultat, connu pour les variables discrètes.

Sujet intéressant, parcourant de grandes parties du programme de première et deuxième année. Il demande une bonne maîtrise de techniques fines du programme, ce qui le rend difficile pour un candidat de niveau moyen, apte à intégrer une des écoles du concours ECRICOME. Il devrait néanmoins permettre de classer correctement les candidats.

3.2 EM LYON 2007 voie S math 1

Problème I : Il s'agit de l'étude du prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$. Ce problème comprend 4 parties qui sont dans une très large mesure indépendantes. Les trois premières parties n'utilisent que le programme de première année et la dernière partie comporte l'étude de l'existence d'un extremum local pour une fonction de deux variables. L'ensemble est sans difficultés majeures mais permettra de déceler les élèves capables d'utiliser les outils de base sur les séries, les développements limités et l'intégration sur un segment.

Problème II : Il s'agit d'un problème d'algèbre en deux parties. La première partie comporte l'étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, de ses valeurs propres ainsi que ses sous-espaces propres. La seconde montre qu'une base de vecteurs propres trouvée lors de la première partie est en fait orthogonale pour un certain produit scalaire. On localise alors les zéros de ces polynômes propres. Bien que classique, la partie II peut poser des difficultés aux élèves ne maîtrisant que peu la notion de racine multiple d'un polynôme.

Cette épreuve classique aborde un large éventail des programmes des deux années en analyse et algèbre, et est structurée en parties de difficultés très progressives. Elle permet aux candidats ayant effectué un travail approfondi de préparation de valoriser leurs connaissances, ce qui est l'objectif premier d'une épreuve commune d'admissibilité à un grand nombre d'écoles. Il faut néanmoins regretter l'absence de questions de probabilités et d'informatique, tant cette année que les années précédentes. Pourtant plusieurs écoles n'utilisent que cette épreuve de mathématiques pour leur concours, et les candidats ne sont alors pas évalués sur ces deux points essentiels du programme.

3.3 HEC 2007 voie S math 1

Le problème a pour but la démonstration de l'inégalité de LE CAM, concernant la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète, par une méthode utilisant la norme des matrices carrées. Ainsi, l'énoncé définit les notions de norme du sup d'une matrice carrée, de convergence de suites ou de sommes de séries de matrices. Pourtant, il avait été dit explicitement que dans le cadre du programme, on n'utiliserait que la norme euclidienne. Notons que la convergence de la série exponentielle d'une série de matrice peut être abordée avec la norme du programme.

Peu de connaissances sont utiles pour le traiter : calcul matriciel, somme de séries géométriques ou exponentielles, définitions des éléments propres d'une matrice, diagonalisibilité (néologisme souvent employé à l'oral HEC) des matrices symétriques.

Ce problème avait sans doute pour ambition de détecter les candidats capables d'assimiler des notions nouvelles et de les manipuler aussitôt, démarche plus courante en prépa scientifique qu'en ECS. Les candidats devaient savoir adapter les résultats et les démonstrations concernant les séries numériques aux séries de matrices :

Par exemple, pour calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ pour $||A|| \leqslant 1$, le candidat doit penser à montrer que $\sum_{k=0}^{n} A^k = (I - A^{n+1})(I-A)^{-1}$ puis à chercher $\lim_{n\to+\infty} \left|\left|\sum_{k=0}^{n} A^k - (I-A)^{-1}\right|\right|$, ce qui est loin d'être une démarche habituelle pour les candidats, même de la voie S.

Plus généralement, aucune méthode n'est suggérée et le candidat doit faire preuve d'initiatives, en particulier pour les nombreux raisonnements par récurrence. Cet énoncé pouvait, à la rigueur, convenir comme épreuve spécifique à HEC, mais il est inadapté pour sélectionner les futurs admissiblles à l'ESCP. Le problème est ennuyeux car répétitif : utilisation fréquente des inégalités triangulaires (nouvelle norme et valeur absolue) et des raisonnements par récurrence. Il est très long, sans que ce soit un avantage pour les candidats. En effet, repérer les questions les moins difficiles n'était pas évident. Des exemples plus simples, sur des matrices d'ordre 3, ou plus d'indications auraient permis de mieux classer les candidats.

Partie I : A. Norme et série de matrices

Dans 2.b) une ambiguïté à propos de l'existence de X_0. Ce vecteur dépend-il de A ? Et dans la déduction, fallait-il remarquer que le sup est un max ?

Partie I : B. Exponentielle de matrice

Dans 2.a) nouvelle ambiguïté à propos de l'unicité de S_A. Cette matrice est unique quand A est inversible (hypothèse non formulée) et on a besoin de l'expression de S_A trouvée pour résoudre le c). À la fin de cette partie, la preuve que deux endomorphismes qui commutent ont même vecteurs propres n'est pas simple quand les sev propres ne sont pas de dimension 1.

Partie II : Une matrice nilpotente

Dans 1. on aurait pu démontrer la nilpotence de N, ce qui aurait aidé les candidats pour le 2. Dans 3. le b) fait jouer un rôle particulier à l'indice 1. Privilégier plutôt l'indice m aurait facilité le raisonnement par récurrence du c). Dans 4.a) on peut démontrer l'égalité et non l'inégalité, suffisante pour le b).

Partie III : Application à une somme de variables de Bernoulli de paramètres distincts

Même remarque que ci-dessus pour l'égalité du 1.b)

Ce sujet très classique pour les classes de mathématiques spéciales est inadapté pour les classes préparatoires économiques et commerciales, même de la voie S. S'il est conforme à la lettre du programme, il en est bien loin de l'esprit. Persister dans cette voie aboutirait à nuire à la qualité du recrutement, et à décourager les élèves de travailler les mathématiques.

3.4 EDHEC 2007 voie S

Les exercices, très classiques, et les deux premières parties du problème sont abordables et traitent d'un large éventail du programme des deux années, ce qui permet aux candidats ayant fourni un travail sérieux de préparation de valoriser leurs acquis.

Pour entrer un peu plus dans les détails :

Exercice 1 : Relativement simple et bien guidé utilisant de nombreux outils d'analyse des deux années.

Exercice 2 : Peu difficile, assez long, un peu lourd dans la rédaction des calculs mais faisant un tour quasi exhaustif de l'algèbre linéaire et bilinéaire figurant au programme. On peut regretter que le sujet admette comme connu le fait que $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$ soit un produit scalaire.

Exercice 3 : Court, bien guidé et sans difficulté majeure pour qui connait son cours sur les variables aléatoires à densités.

Problème : Partie 1 : Un grand classique des probabilités discrètes, une simulation informatique très simple à compléter mais préparant celle de la partie 2.

Partie 2 : Un peu moins classique et une simulation informatique pas très simple cette fois-ci.

Partie 3 : Une impression de répétition, l'objectif du problème étant certainement de juger les qualités de lecture du candidat ainsi que sa capacité à manier les conditionnements de manière correcte. De plus, les notations utilisées en 2c ont dû générer désagréments et perte de temps pour de (très ?) nombreux candidats. Cette partie s'achève par une simulation relativement inutile, les talents de programmeur ayant été largement testés auparavant.

En conclusion, un sujet assez long, varié, de difficulté graduée et bien dans l'esprit du programme de la filière. Il doit jouer pleinement son rôle de classement des candidats. Un bon sujet sans le couac de notation en fin d'épreuve.

3.5 CCIP 2007 voie S math 2

Dans la partie I, m boules sont classiquement distribuées au hasard dans n urnes ; le nombre d'urnes restées vides est une somme de variables de Bernoulli non indépendantes, toutes de même paramètre. Cette partie est intéressante, les questions 1, 2 et 4 sont bien dans l'esprit du programme et on apprécie qu'une question d'estimation soit abordée à ce stade du problème.

Par contre, la question 3.a) est très difficile pour des élèves d'ECS et il aurait été judicieux de donner des indications et/ou le résultat de cette question pour pouvoir résoudre la question 3.c).

La partie II est toute entière consacrée à l'étude de fonctions f_A indexées par les parties A de $\mathbb{N}$. Seuls l'inégalité finale et le résultat de la question 3.a seront utilisés dans les parties III et IV. A part les deux premières questions qui permettent de se familiariser avec les notions introduites dans l'énoncé, cette partie est constituée de questions difficiles, avec des calculs longs et fastidieux.

Les parties III et IV établissent des inégalités permettant d'obtenir, sous certaines conditions, la convergence en loi d'une somme de variables de Bernoulli et de paramètres quelconques vers une loi de Poisson. La partie III suppose les variables indépendantes, en IV on travaille sans cette hypothèse.

Ces deux parties respectent mieux l'esprit du programme que la précédente ; la formule de l'espérance totale et la croissance de l'espérance sont utilisées. Mais là aussi, en dehors de la question III 6, le niveau de difficulté est élevé. On aurait pu préciser que la forme exacte de la fonction f n'intervenait pas avant la question 5 du III, pour mettre en évidence les questions pouvant se traiter indépendamment de la partie II.

Terminons en remarquant que l'on aurait pu espérer que l'inégalité obtenue en fin de partie IV permette de justifier le résultat admis en I.3.c. Cette inégalité cependant n'est obtenue que sous réserve d'existence des variables Z_i définies en IV 2. Or cette existence n'est pas vérifiée dans le cadre de la partie I, du moins avec le choix standard de $(\Omega,\ A,\ P)$. Il demeure donc un sentiment d'inachevé ce qui est dommage après un si long problème.

Le problème a pour thème l'étude de conditions sous lesquelles une somme de variables aléatoires de Bernoulli converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson. La partie I est globalement dans l'esprit du programme et a clairement été conçue pour tester la maîtrise par le candidat d'un certain nombre de points étudiés en deuxième année. Par contre, les trois parties suivantes, d'une longueur beaucoup trop importante, sont dans leur ensemble d'une technicité ou d'une abstraction inadaptées au public auquel elles s'adressent. Rappelons que cette épreuve est commune à quatre écoles et l'on peut regretter, qu'en toute vraisemblance, seul un nombre limité de questions de ce sujet fleuve servent à classer les candidats.

3.6 ESSEC 2007 voie S math 1

Le sujet traite des applications monotones de $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$ avec $A < B$ définit classiquement par $B - A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Le problème est intéressant, bien construit et il ne comporte pas d'erreurs d'énoncé, ce qui n'était pas le cas les années précédentes.

Ce problème aborde de plus une large partie du programme d'ECS : en algèbre : diagonalisation, matrices symétriques, formes quadratiques... ; en analyse : intégrales impropres, DL...

Cependant, le sujet ne semble pas totalement adapté au public concerné par manque de progressivité dans la difficulté. Si les parties I, II et IV sont d'un niveau conforme au standard des épreuves de ce concours, la partie III, la plus longue, est d'un niveau d'abstraction très nettement au dessus de ce même standard et donc auquel les candidats ne sont pas habitués.

Voici maintenant quelques commentaires plus précis sur le problème :

Partie I : bien rédigée et progressive, cependant le changement de variable du I3 n'était pas si évident et a dû bloquer un grand nombre d'étudiants. Peut-être aurait-il fallu préciser que "le réel ne dépendant que de α" se présente sous forme d'une intégrale.

Partie II : elle est aussi bien rédigée et progressive, d'un bon niveau conforme à ce que l'on peut attendre d'un élève visant l'ESSEC.

Partie III : beaucoup trop abstraite : "la décomposition" évoquée, bien que classique en classe de mathématique spéciale, est très difficile à manier pour nos élèves tout comme les propriétés admises des intégrales de matrices. Ainsi les étudiants ont dû éprouver de grosses difficultés à manier ces nouveaux concepts dans les questions III 2), III 3)b) et c).

Partie IV : moins abstraite que la partie précédente, elle semble abordable pour nos étudiants bien que très technique. Il aurait été peut-être souhaitable que les exemples traités aux 2a)b)c) apparaissent plus tôt dans l'énoncé, ceci aurait permis aux élèves de mieux appréhender la décomposition et la relation d'ordre.

Pour conclure, ce problème était difficile, et même parfois extrêmement difficile, très (trop ?) long mais comportait aussi un nombre important de questions abordables pour nos étudiants.

3.7 ESC 2007 voie S

L'épreuve compte trois exercices, permettant d'évaluer les candidats à la fois en algèbre, en analyse et en probabilités.

Exercice 1 *Exercice d'algèbre linéaire et bilinéaire, étudiant un endomorphisme f admettant un polynôme annulateur de degré 5, et comparant les puissances cinquièmes des valeurs propres de f et les valeurs propres de f^5.*

On constate dès le départ un regrettable oubli dans les hypothèses : la notion de "*produit scalaire*" impose de prendre $K = \mathbb{R}$. Du coup, on peut imaginer qu'à partir de la question 2. et pour toute la suite, on fixe $K = \mathbb{R}$. La dimension 5 de l'espace fait que la recherche des valeurs propres est fastidieuse : sans doute beaucoup de candidats se seront découragés, mais comme le résultat est donné, pas de problème pour poursuivre.

A part cela, l'exercice paraît fidèle au programme, bien qu'un peu long.

Exercice 2 *Étude et convergence de la suite* (I_n) *avec* $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^3} dx$.

La rédaction de la question 4. (c) est rendue plus difficile par l'hypothèse "$b \neq 0$", alors que "$b > 0$" suffisait pour la suite de l'exercice.

L'exercice est bien adapté également.

Exercice 3 *Étude d'une chaîne de Markov à 3 états, et estimation d'un paramètre de la loi limite.*

Partie A : La réponse à la question 2. (b) est assez longue à rédiger, mais bien sûr indispensable. Cette partie est bien dans l'esprit du programme, et traitable uniquement sur la base du programme de première année.

Partie B : A la 1ère question, on n'a qu'une quasi certitude. A la seconde, il y a amalgame entre "*estimateurs*" et "*suite d'estimateurs*" : c'est chacun des estimateurs qui est sans biais, tandis que c'est la suite d'estimateurs qui est convergente.

Cette dernière partie, courte et très proche du cours, permet d'aborder le programme de deuxième année.

Malgré les quelques critiques de rédaction, et malgré sa relative longueur, dans l'ensemble, le sujet est bien adapté en tant qu'épreuve de concours : il recouvre une grande partie des programmes de 1ère et 2ème années, à l'exclusion des variables aléatoires à densité, permettant ainsi à des élèves studieux de pouvoir tirer leur épingle du jeu.

4 Voie Technologique

4.1 ECRICOME 2007 voie T

Exercice 1 : *Étude de la fonction* $x \longmapsto f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$. *Calcul d'aire.*

Exercice très classique qui permet de vérifier une partie du programme d'analyse dont la factorisation des polynômes, l'intégration par parties.

Beaucoup de résultats intermédiaires sont donnés, permettant la poursuite de l'exercice.

Exercice 2 : *Étude de la suite récurrente donnée par* u_0, u_1 *et* $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

L'exercice repose sur le calcul matriciel, facilité par des matrices carrées d'ordre 2.

Exercice complet. Il utilise des raisonnements par récurrence simples et conduit au calcul de A^n, à l'obtention de A^{-1} à partir d'un polynôme annulateur d'ordre 2.

Une question indépendante, la détermination de $\left(A^{-1}\right)^n$, laissait le soin aux meilleurs de montrer leur talent.

Exercice 3 : *Exercice de probabilités.*

Cet exercice couvre en deux parties indépendantes, la majorité du programme des deux années de probabilités.

Variables à densité, loi binomiale et loi géométrique dans un premier temps puis couple de variables de Bernoulli.

Un exercice classique, application immédiate du cours.

Il s'agit d'une épreuve de longueur raisonnable, strictement conforme à la lettre et à l'esprit du programme, couvrant une vaste partie de celui-ci, qu'un élève sérieux et préparé peut traiter entièrement. Cependant elle devrait permettre de départager les candidats.

4.2 CCIP 2007 voie T math 2

Exercice 1 : *Étude de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

Exercice assez difficile mais qui reste le plus accessible des quatre figurant dans cet épreuve.

Pourquoi ne pas nommer "*la fonction qui à tout réel* x *associe* $\ln(1+e^x)$" ? La plupart des élèves de la voie T n'auront pas l'intiative de le faire et l'absence de nom ne leur simplifient pas la tâche.

Exercice 2 : *Exponentielle de matrices dans trois cas particuliers.*

Les notions utilisées sont les puissances de matrices, le raisonnement par récurrence et les séries numériques exponentielles.

On pourra regretter la définition de la limite d'une suite de matrices carrées présentée dans l'énoncé.

La seule donnée de : si la suite (a_n) converge vers a et (b_n) converge vers b alors la suite de matrices $(a_nA + b_nB)$ converge vers $aA + bB$ aurait éviter d'écrire des tableaux avec neuf coefficients.

Exercice déstabilisant bien que traitant du calcul matriciel.

Exercice 3 : *Étude de la probabilité d'obtenir "2 Face consécutifs avant l'apparition éventuelle de 2 Pile consécutifs"*

Exercice théorique essentiellement basé sur les probabilités conditionnelles.

L'hypothèse omise : $P\left(\overline{B}\cap C\right) \neq 0$ n'aura certes pas perturbé les élèves, la seule lecture de l'énoncé suffisait à les déstabiliser.

L'exercice le plus difficile des quatre.

Exercice 4 : *Étude d'une variable à densité,* X *et de* $S_n = sup\,(X_1, X_2, .., X_n)$

La notion de *sup* ne figure pas au programme (tout comme celle de inf de l'année dernière) mais la définition de l'événement $[S_n \leq x]$ est donnée.

Cet exercice exigeait une très bonne maîtrise du cours sur les variables à densité, partie difficile du programme.

> Bien que conforme au programme, cette épreuve n'est pas classique pour les élèves de la voie T.
> En tête de l'énoncé figurent les noms des écoles HEC et ESCP-EAP or onze autres écoles utilisent cette épreuve et les élèves sérieux peuvent prétendre à bon nombre d'entre elles .
> On comprend le souhait des concepteurs d'afficher un "beau" sujet mais il est souhaitable que les difficultés apparaissent de façon progressive. Il n'est pas certain que les bons élèves, déstabilisés dès la lecture de l'énoncé, aient pu valoriser leurs connaissances. Peu de questions auront été traitées et serviront à classer les élèves pour treize écoles.

4.3 ESC 2007 voie T

Exercice 1 : *Calculs matriciels*

Produits matriciels, non inversibilité de matrices, raisonnement par récurrence.

Un exercice sans difficulté.

Exercice 2 : *Étude d'une variable à densité. Existence de la médiane*

Outre les notions de densité et de fonction de répartition l'exercice fait appel à la fonction exponentielle.

L'introduction de lettres grecques peu usitées, θ et μ , n'était pas indispensable.

Un exercice d'analyse simple aux questions très détaillées.

Exercice 3 : *Étude de trois sortes de tirages de jetons dans un sac.*

La première partie,1200 tirages avec remise, conduit à une loi binomiale puis à une approximation par la loi normale.

La deuxième partie, série illimitée de tirages avec remise, introduit la seule difficulté de l'exercice : reconnaître la loi géométrique dans la variable $Z = Y + 1$.

Pour terminer l'étude d'un couple de variables aléatoires.

Un exercice simple et très classique.

Une épreuve sans difficulté, conforme au programme et à son esprit.

La commission mathématique de l'APHEC