MATHÉMATIQUES I

Option Scientifique

École conceptrice : EMLYON

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.
Le problème 1 porte sur l'analyse et les probabilités : fonctions, dérivation, intégration, intégrales impropres, séries, densité, espérance.
Le problème 2 porte sur l'algèbre linéaire et les probabilités : matrices de rang 1, trace d'une matrice carrée, diagonalisabilité d'une matrice carrée, variables aléatoires indépendantes, produit scalaire, endomorphisme symétrique.

Problème 1

Partie I

La partie I étudie une fonction définie par une intégrale impropre à paramètre.

1. Beaucoup d'erreurs et d'imprécisions dès cette première question, pourtant application directe du cours.
Des candidat(e)s oublient de signaler la continuité de $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ sur $[0\,;+\infty[$.
Certain(e)s candidat(e)s croient à tort qu'il suffit que $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ tende vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ pour que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ils devraient méditer l'exemple de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$: cette intégrale diverge et $\dfrac{1}{t} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, on ne peut pas invoquer un prolongement par continuité en $+\infty$, qui n'a pas de sens.
D'autres font intervenir l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, en croyant reconnaître $\Gamma(0)$; mais $\Gamma(0)$ n'existe pas et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
La croyance en $x^2 \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$ persiste, alors que cette inégalité est fausse pour $x = \dfrac{1}{2}$ par exemple, et des candidat(e)s confondent 0 et 1, en majorant à tort $\dfrac{1}{x+t}$ par 1 pour $(x,t) \in]0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$.
Si l'on étudie $t^2 \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$, c'est $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ qu'il faut faire intervenir et non $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ qui diverge à la borne 0.
Enfin, rappelons que, en vue de montrer la convergence d'une intégrale impropre de fonction à valeurs positives ou nulles, ce n'est pas l'intégrale qu'il faut majorer (puisque l'on ne sait pas encore si cette intégrale existe), mais c'est la fonction que l'on peut essayer de majorer.

2. L'inégalité est en général correctement obtenue (positivité sur $[1\,;+\infty[$, et $\mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ lorsque $t \in [0\,;1]$).
Mais la déduction de limite est souvent fausse : on ne peut pas permuter limite et intégrale sans démonstration. Le plus simple est de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

3. L'inégalité stricte $0 < f(x)$ n'est en général pas bien vue, soit par lecture fautive de l'énoncé, soit par oubli de la continuité de f dans l'application d'un résultat sur les intégrales.
La déduction $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ est faite dans la majorité des copies.

4. La convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est assez bien vue, soit en reconnaissant $\Gamma(2)$, soit par l'étude de $t^2 \cdot t\,\mathrm{e}^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Cependant, quelques copies contiennent de graves erreurs sur la notion de convergence d'une intégrale impropre, comme pour la question 1.
La majoration n'est obtenue que dans moins de la moitié des copies.
La déduction d'équivalence est majoritairement fausse. Les correcteurs ont ici vu de graves fautes sur les notions de limite et d'équivalent.
Le fait que $f(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ ne permet pas de déduire $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
Par exemple, on a $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, mais on n'a pas $\dfrac{1}{x^2} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
L'écriture $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{x}$, lue dans de trop nombreuses copies, est aberrante : la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si elle existe, ne doit pas dépendre de x.

Partie II

Sous-partie A

Dans cette sous-partie A, on montre que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$, on exprime $f'(x)$ par une intégrale, on relie $f'(x)$ et $f(x)$, et on déduit que f est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$.

5.a. On retrouve ici souvent les erreurs rencontrées en I1. : oubli de la continuité de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}$ sur $[0\,;+\infty[$, confusion entre fonction tendant vers 0 en $+\infty$ et fonction dont l'intégrale impropre converge en $+\infty$, majoration incorrecte de $\dfrac{1}{(x+t)^2}$ par $\dfrac{1}{x+t}$ lorsque $(x,t) \in [0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.

5.b. L'oubli du cas $h < 0$ est quasi-systématique : la plupart des candidat(e)s majorent $\dfrac{1}{x+h+t}$ par $\dfrac{1}{x}$ en oubliant que h peut être négatif.
De nombreux candidat(e)s ont essayé d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange et ont obtenu une majoration insuffisante pour cette question, mais permettant quand même de traiter logiquement la question 6.

5.c. Trop de candidat(e)s oublient le facteur e^{-t} dans les intégrales et font intervenir l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2|h|}{x^2}\,\mathrm{d}t$, qui est divergente.

L'intermédiaire indispensable $\displaystyle\Big|\int_0^{+\infty} \varphi\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} |\varphi|$ est souvent absent des copies.

6. L'existence de la limite du taux d'accroissement n'apparaît pas toujours, et il y a souvent intervention incorrecte de la valeur absolue du taux d'accroissement.

7. Question correctement traitée dans la plupart des copies, par une intégration par parties.

Ne pas oublier de signaler que les fonctions utilisées, habituellement notées u, v, sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon\,;A]$.

8. La déduction à partir du résultat de la question 7., en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, est en général faite.

9. Les notions de classe C^1, de classe C^2 pour une fonction d'une variable réelle sont souvent malmenées : on confond f dérivable et f de classe C^1. Les justifications sont ici incomplètes ou incorrectes.

Certain(e)s candidat(e)s croient pouvoir dériver directement f à partir de la définition de $f(x)$ comme intégrale impropre de la question I1., mais cette déduction sans preuve est fausse.

Sous-partie B

Dans cette sous-partie B, en utilisant une fonction auxiliaire g, on exprime f sous une autre forme intégrale.

10. Question facile et très souvent résolue, se déduisant simplement de la définition de g et du résultat de la question 8.

11. Pour la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$, on retrouve souvent les erreurs déjà rencontrées en I1. et IIA5.a.

L'égalité sur $g(x)$ peut s'obtenir de deux façons. Beaucoup de candidat(e)s ont pensé au changement de variable $u = x + t$.

L'égalité sur $f(x)$ est immédiate.

12. Question très facile, souvent correctement résolue, en utilisant le résultat précédent et le résultat final de la question I4.

13. L'obtention de l'équivalent $n\,\mathrm{e}^{-n}$ est en général vue.

Mais la nature de la série de terme général $n\,\mathrm{e}^{-n}$ a posé problème à la plupart des candidat(e)s. S'il y a utilisation du théorème de majoration ou du théorème d'équivalence, ne pas oublier de signaler la positivité du terme général.

Partie III

La partie III introduit une fonction h, en liaison avec f. Il faut montrer que h est une densité et calculer l'espérance d'une variable aléatoire admettant h pour densité.

14. Il y a, dans certaines copies, confusion entre continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, et classe C^1 sur $\mathbb{R}$; Autrement dit, pour quelques candidat(e)s, la distinction entre densité et fonction de répartition n'est pas claire.

Pour montrer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = 1$, on se perd souvent dans des calculs inutiles.

15. L'existence de $E(X)$ est souvent correctement établie, mais le calcul de $E(X)$ donne lieu à des développements inutiles et/ou inaboutis.

Problème 2

Partie I

La partie I étudie un exemple de matrice carrée d'ordre 4 obtenue comme produit d'une colonne par une ligne.

1. Les produits matriciels sur des matrices de formats différents restent problématiques pour certain(e)s candidat(e)s, qui proposent pour A_0 une matrice carrée d'ordre 1, ou une colonne, ou une ligne.

Même lorsque A_0 est du bon format (carrée d'ordre 4), il y a encore des erreurs sur les coefficients.

Pour montrer que 0 est valeur propre de A_0, trop peu de candidat(e)s remarquent que A_0 est de rang 1.

La réponse à une base du sous-espace propre pour A_0 associé à la valeur propre 0 est souvent fantaisiste.

La démonstration de la liberté de la famille à trois éléments obtenue est quelquefois fausse, par examen de la non-colinéarité des vecteurs deux à deux.

Les correcteurs n'ont pu ici que constater l'extrême faiblesse et la non-préparation de certain(e)s candidat(e)s.

2.a. Comme pour la question précédente, quelques copies donnent un résultat grossièrement faux, le format du résultat étant aberrant.

2.b. Correctement traitée dans les copies où les réponses aux questions 1. et 2.a. étaient exactes.

Mais la logique de l'énoncé n'est pas toujours perçue, et des candidat(e)s reprennent tout à zéro, en formant $A_0 - \lambda \mathrm{I}_4$ et en utilisant une méthode de pivot.

2.c. Question facile à résoudre si l'on a correctement traité les précédentes.

Quelques candidat(e)s, sur leur lancée, calculent sans raison P^{-1}.

Partie II

La partie II définit et étudie la trace d'une matrice carrée.

3. Des candidat(e)s oublient un facteur scalaire et traitent seulement $\mathrm{tr}\,(A+B)$ au lieu de $\mathrm{tr}\,(\alpha A + B)$.

L'oubli des parenthèses dans $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii} + b_{ii})$ est quasi-systématique.

4. Une partie non-négligeable des candidat(e)s ne maîtrise pas du tout les indices, et on trouve dans trop de copies $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii}$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\Big)$.

Ces erreurs traduisent une incompréhension des notations.

Enfin, des candidat(e)s confondent matrice et réel, en écrivant, par exemple, $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, ce qui n'a pas de sens, ou ne savent pas calculer le terme général du produit de deux matrices.

5. Trop de candidat(e)s remplacent a_{ij} par a_{ji} de façon incorrecte et sans explication.

Les correcteurs ont trouvé que la manipulation des indices n'était pas toujours honnête.

Partie III

La partie III aboutit à la caractérisation des matrices carrées de rang 1 comme produits d'une colonne non nulle par une ligne non nulle.

6.a. La justification de $U\,{}^{\mathrm{t}}V \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est en général correcte, mais les coefficients de cette matrice sont quelquefois bizarres.

6.b. Ici encore, comme en II4. et 5., on a trop souvent constaté de grossières confusions entre matrice carrée d'ordre n et scalaire.

6.c. L'inégalité $\mathrm{rg}\,(U\,{}^{\mathrm{t}}V) \leqslant 1$ est en général bien vue. Mais la plupart des candidat(e)s oublie de montrer $U\,{}^{\mathrm{t}}V \neq 0$ pour obtenir ensuite $\mathrm{rg}\,(U\,{}^{\mathrm{t}}V) = 1$. Enfin, trop de candidat(e)s se contentent d'une réponse sans justification.

7.a. Des candidat(e)s confondent ici implication et réciproque, et appliquent, à tort, le résultat obtenu à la question 6.a.

7.b. L'oubli de montrer que chacune des deux colonnes obtenues n'est pas nulle est fréquent.

8. L'oubli de $U \neq 0$ et $V \neq 0$ est ici aussi très fréquent.

Le mot caractérisation n'est pas toujours compris.

Partie IV

La partie IV propose une application du résultat de la question 8. au contexte des probabilités, pour caractériser l'indépendance de deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, ..., n\}$.

9. Pour le calcul de $U_X\,{}^{\mathrm{t}}U_Y$, il y a souvent confusion entre cette matrice et un coefficient de celle-ci.

Dans la déduction $\mathrm{rg}\,(M) = 1$, il y a oubli quasi-systématique de la non-nullité de U_X et U_Y.

10.a. La question est correctement traitée lorsqu'elle est abordée, par système complet d'événements ou par loi marginale.

10.b.,c. Les explications sont souvent confuses et insuffisantes.

10.d. Cette question est souvent traitée correctement, même si les questions précédentes n'ont pas été résolues.

Partie V

La partie V propose d'obtenir une caractérisation des matrices diagonalisables parmi les matrices carrées de rang 1.

11. Pour montrer que 0 est valeur propre de A, l'argumentation est la même que pour la question I1.

Pour donner la dimension du sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 0, l'intervention du théorème du rang est en général bien vue, mais il y a quelquefois confusion entre $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, et des candidat(e)s donnent $n^2 - 1$ (faux) au lieu de $n - 1$.

12. L'égalité ${}^{\mathrm{t}}VU = (a)$ est en général correctement traitée, si elle est abordée.

Cependant, l'égalité $\mathrm{tr}\,(U\,{}^{\mathrm{t}}V) = \mathrm{tr}\,({}^{\mathrm{t}}VU)$ n'a pas été établie dans la question II4., U et V n'étant pas des matrices carrées.

La déduction $A^2 = aA$ est moins bien faite et les correcteurs ont constaté de très diverses erreurs sur le format des matrices.

13. Question bien traitée lorsqu'elle est abordée. Mais des candidat(e)s affirment, à tort, que, si une matrice carrée n'a qu'une seule valeur propre, alors elle n'est pas diagonalisable.

14. Question bien traitée lorsqu'elle est abordée, avec cependant quelquefois un $n^2 - 1$ incorrect au lieu de $n - 1$ pour une dimension.

15. Correct en général.

Partie VI

La partie VI introduit un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et amène un endomorphisme symétrique Φ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

16. Question souvent traitée et correctement résolue, sauf que la symétrie n'est pas toujours clairement établie.

17. L'égalité ${}^{\mathrm{t}}S = S$ est en général obtenue, mais l'égalité $S^2 = S$ a été moins réussie, des candidat(e)s confondant ${}^{\mathrm{t}}VV = (1)$ (correct) et ${}^{\mathrm{t}}VV = \mathrm{I}_n$ (faux).

18.a. La plupart des candidat(e)s oublie de montrer que Φ est linéaire.

Certain(e)s candidat(e)s croient que Φ est symétrique parce que sa matrice S est symétrique, mais ce raisonnement est faux, puisque S n'est pas une matrice représentant Φ dans une base.

18.b. Pour obtenir l'égalité $\Phi^2 = \Phi$, des copies contiennent une grossière confusion entre $\Phi^2(M)$ et $(\Phi(M))^2$.

La conclusion sur les valeurs propres de Φ est trop souvent une égalité au lieu, a priori, d'une inclusion.

18.c. Question de synthèse, assez facile et assez souvent traitée, mais de façon confuse.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, exempt d'erreur d'énoncé, intéressant et varié, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, de difficulté assez graduée, couvrant une large partie des connaissances exigibles des deux années, de longueur satisfaisante et bien adapté à la voie scientifique.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions ouvertes ou plus délicates, aux meilleur(e)s de se dégager. Les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

L'écart entre les bonnes copies et les copies très faibles s'est nettement creusé. Les candidat(e)s non préparé(e)s n'ont pas pu donner le change : la quasi-totalité des questions exigeait la connaissance du cours. Dans certaines copies, les compétences du candidat(e) en mathématiques apparaissent inférieures à celles attendues pour le baccalauréat.

La présentation des copies est satisfaisante, mais l'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation ne sont pas toujours respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant, et de séparer nettement les questions. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.