

# MATHÉMATIQUES I, session 2015

## Option Scientifique

École conceptrice : EMLYON

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Le problème 1 porte sur l'algèbre : polynômes, espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, produit scalaire, projecteurs orthogonaux.

Le problème 2 porte sur l'analyse : fonctions, intégrales, dérivées, limites.

### Problème 1

#### Partie I

La partie I étudie des applications linéaires dans des espaces vectoriels de polynômes de degrés limités et fait intervenir l'opérateur de différence.

1. Question facile traitée dans la quasi-totalité des copies.

2. Cette question n'a été correctement résolue que dans très peu de copies : dans la plupart des copies, un ou plusieurs arguments est oublié.

La définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels est trop souvent inconnue.

Il y a quelquefois oubli de la linéarité ou oubli de l'étude de l'ensemble d'arrivée.

Le plus souvent, l'argumentation est défailante en ce qui concerne la surjectivité, les candidat(e)s n'ayant pas perçu que les ensembles de départ et d'arrivée de  $\phi$  ne sont pas les mêmes.

3. La dimension donnée est souvent correcte, en liaison avec la question précédente, mais peu de copies donnent une base exacte et bien explicitée.

4.a. Question facile, correctement traitée dans la plupart des copies. Cependant, il y a quelquefois oubli de la linéarité, et quelques copies confondent  $\Delta(P)$  et  $(X+1)P(X)$ , malgré la présence d'un exemple illustratif dans l'énoncé.

4.b. Beaucoup trop d'erreurs sur le degré du polynôme nul, de nombreux candidat(e)s croyant à tort que  $\deg(0) = 0$ .

Des candidat(e)s se contentent d'affirmer une inégalité, ce qui ne répond pas à la question posée.

4.c. Question assez facile, abordée dans la majorité des copies, mais les réponses sont souvent imprécises ou incomplètes.

4.d. Question facile, souvent correctement résolue. Des candidat(e)s s'enlisent dans des calculs inutiles, ayant perdu de vue l'intervention du degré.

5.a. Question souvent correctement résolue, quitte à admettre le résultat de 4.d.

Mais des candidat(e)s donnent une solution fausse faisant commuter  $\phi$  et  $\Delta$ .

5.b. Il y a ici beaucoup de confusions sur les ensembles manipulés. Il ne faut pas perdre de vue que  $\text{Ker}(f)$  est une partie de l'ensemble de départ de  $f$ .

5.c. Question souvent résolue, mais la distinction entre inclusion et égalité pour des ensembles n'est pas toujours bien nette.

5.d. Question correctement résolue, en général, dans les copies où le résultat de la question précédente a été acquis.

## Partie II

La partie II étudie un produit scalaire sur un espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 4 et aboutit à un projecteur orthogonal.

**6.** La définition d'un produit scalaire est bien assimilée par la quasi-totalité des candidat(e)s. Mais, si la symétrie, la bilinéarité et la positivité sont correctement traités, en revanche le caractère défini n'est établi que dans la moitié des copies.

**7.** Des candidat(e)s ont cru voir ici une famille de polynômes à degrés échelonnés, alors que les trois polynômes considérés sont tous de degré 2. Quelques candidat(e)s affirment, à tort, que la famille est libre car formée de vecteurs tous non nuls. La plupart des candidat(e)s perdent un temps précieux dans des calculs de développements inutiles, alors qu'il suffisait de prendre la valeur en trois points.

**8.a.** Question correctement traitée dans seulement une minorité des copies, la formulation de la question n'ayant en général pas été comprise dans les autres copies. Et dans les copies ayant abordé avec succès cette question, il y a souvent de longs calculs inutiles.

**8.b.** Les correcteurs ont été désagréablement surpris de constater ici de nombreux essais de tricherie dans les calculs, le résultat pour  $\Delta(L_2)$  était donné dans l'énoncé.

**9.a.** Question très facile, traitée correctement dans la plupart des copies. Mais, dans quelques copies, il y a confusion entre le réel  $M_i(i)$  et le polynôme  $M_i$ .

**9.b.** Question souvent traitée, mais lourdement, avec des calculs de liberté inutiles, la famille étant orthogonale à vecteurs tous non nuls.

**10.** Question correctement traitée, mais aussi ici lourdement.

Les correcteurs ont vu trop de matrices aberrantes, contenant le polynôme  $W$  comme coefficient diagonal, alors que  $W$  n'est pas un nombre réel.

**11.** Question très peu abordée, avec souvent des erreurs de calcul et des lourdeurs d'écriture, les  $M_i(i)$  restant en place.

**12.a.** Question très facile, abordée dans la quasi-totalité des copies.

**12.b., c., d.** Questions très peu abordées, mais alors souvent correctement traitées, significatives de très bonnes copies.

## Problème 2

### Partie I

La partie I met en place la transformation de Laplace.

**1.** Dans l'immense majorité des copies, la résolution est fautive, en prenant le même exposant pour les deux fonctions, et ce malgré la mise en garde explicite figurant dans le chapeau de l'énoncé.

**2.** Pour la limite demandée, les arguments de croissance comparée sont faux dans la moitié des copies.

Pour la convergence de l'intégrale, il apparaît quelquefois une borne parasite 0 dans l'exemple de Riemann en  $+\infty$ , ou bien il y a oublié d'une valeur absolue pour le théorème de majoration pour des fonctions positives ou nulles.

**3.** Question facile, souvent résolue, mais la majorité des candidat(e)s confondent  $L(u)$  et  $L(u)(x)$ .

## Partie II

La partie II étudie quelques exemples.

4. Question souvent résolue, mais lourdement et avec des erreurs de calcul.

5. Question très souvent résolue, avec succès puisque le résultat demandé figure dans l'énoncé, contrairement à la question précédente.

## Partie III

La partie III étudie les propriétés générales de la transformation de Laplace : limite en  $+\infty$ , limite en 0, transformée de Laplace d'une dérivée, dérivée d'une transformée de Laplace.

6. Question abordée dans la moitié des copies.

La première inégalité nécessite la compréhension de la notion de limite.

Pour la deuxième inégalité, il y a quelquefois confusion entre segment et intervalle fermé.

La déduction de la troisième inégalité est souvent fautive, par addition, alors qu'il ne s'agit pas des mêmes intervalles.

La limite finale est en général bien traitée.

7.a. En général bien vu, par reste d'une intégrale convergente.

La déduction  $R \in E$  n'est pas toujours nette.

7.b. La connaissance des notions de primitive et de fonction de classe  $C^1$  n'est pas toujours sûre, en particulier sur le statut d'une éventuelle constante additive.

7.c. On ne peut pas effectuer directement une intégration par parties sur une borne infinie : il faut faire l'intégration par parties sur un segment, puis procéder à un passage à la limite.

7.d. Question difficile, peu abordée, qui demande une bonne connaissance de la notion de limite et une initiative de majoration.

7.e. Question assez souvent abordée, même si la question précédente n'a pas été résolue. Mais les solutions proposées sont, dans leur grande majorité, peu rigoureuses.

8.a. Question peu souvent traitée, assez difficile et demandant des qualités d'analyse.

8.b. La déduction est souvent faite, en admettant le résultat de la question précédente.

8.c. Comme en 7.c., on ne peut pas effectuer directement une intégration par parties sur une borne infinie.

9.a. Question assez facile, souvent abordée, la valeur donnée pour  $p$  n'étant pas toujours exacte. Il y a quelquefois oubli de la continuité.

9.b. Question souvent abordée, avec intervention de l'inégalité de Taylor et Lagrange, trop peu souvent correctement citée.

La valeur absolue dans l'exposant n'est pas clairement amenée.

Trop de candidat(e)s croient, à tort, que  $a$  est positif ou nul.

9.c. Question assez souvent abordée, malgré la lourdeur des notations, et alors assez correctement résolue.

9.d. La définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement est connue, mais trop de candidat(e)s font ici une erreur de signe.

9.e. Question rarement abordée, et alors assez bien traitée.

## Partie IV

La partie IV étudie une application de la transformation de Laplace à une équation fonctionnelle.

**10.a., b., 11.** Questions rarement abordées, la copie ne comportant alors en général que des tentatives de calcul.

Cependant, quelques excellentes copies contiennent une résolution correcte de cette partie IV.

L'équipe de conception s'est attachée à rédiger un sujet conforme au programme, progressif dans la difficulté des questions, permettant aux candidat(e)s de valoriser leurs compétences : compréhension de la problématique, connaissance du cours, aptitude au raisonnement logique, mise en oeuvre des techniques de calcul, communication écrite et qualités de synthèse.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, exempt d'erreur d'énoncé, intéressant et varié, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, très bien rédigé, de difficulté graduée, couvrant une large partie des connaissances exigibles des deux années, bien adapté à la voie scientifique, et un peu long, ce dont il a été tenu compte dans l'établissement du barème.

Les correcteurs ont particulièrement apprécié l'alternance de questions fermées et de questions ouvertes.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions ouvertes ou plus délicates, aux meilleur(e)s de se dégager. L'aptitude au calcul et au raisonnement, les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

L'écart entre les très bonnes copies et les copies très faibles s'est très nettement creusé. Les correcteurs ont trouvé le niveau des copies très hétérogène et en légère baisse. Les candidat(e)s non préparé(e)s n'ont pas pu donner le change : la quasi-totalité des questions exigeait la connaissance du cours. Certaines copies montrent que des candidat(e)s ont des difficultés à mobiliser des compétences mathématiques développées depuis l'enseignement secondaire.

La présentation des copies est satisfaisante, mais l'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision.

Une connaissance sûre et précise du cours et un entraînement assidu aux techniques classiques sont indispensables.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation doivent être respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numérotter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant proprement, de séparer nettement les questions et de conclure clairement à la fin de chaque question. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.

**Moyenne de l'épreuve: 8,9 / 20.**