MATHÉMATIQUES I, session 2016

Option Scientifique

École conceptrice : EMLYON

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Le problème 1 porte sur l'algèbre : matrices, endomorphismes, polynômes, produits scalaires, projecteurs orthogonaux.
Le problème 2 porte sur l'analyse et les probabilités : séries, suites, intégrales impropres, variables aléatoires à densité.

Problème 1

Le problème 1 est composé de trois parties.

Partie I

La partie I propose l'étude d'un exemple de matrice carrée d'ordre 3 et constitue une préparation à l'étude théorique de la partie II.

1. La majorité des candidat(e)s ne savent pas lire l'énoncé, et les expressions de P_1 et P_2 en fonction de I_3 et A ne sont obtenues que dans une minorité de copies.
Malgré un énoncé très clair et directif :

"Trouver en fonction de I_3 et A deux matrices P_1 et P_2 de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$
telles que $P_1 + P_2 = \mathrm{I}_3$ et $4P_1 + 9P_2 = A$.
Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2",

la majorité des candidat(e)s n'a pas répondu correctement à cette question.
La plupart des candidat(e)s ont perdu beaucoup de temps en faisant les choses à l'envers, en se lançant dans la résolution d'un système de 18 équations à 18 inconnues (est-ce réaliste ?).

2.a. Lorsque les expressions correctes de P_1 et P_2 en fonction de I_3 et A ont été obtenues à la question 1, la résolution est ici immédiate.

2.b. On peut soit appliquer la formule du binôme de Newton (en précisant que P_1 et P_2 commutent et en n'oubliant pas l'intervention des coefficients binomiaux), soit faire un raisonnement par récurrence.
Les correcteurs ont lu quelques réponses fantaisistes et grossièrement fausses.

3. Quelques candidat(e)s répondent encore ici à côté de la question, en ne tenant pas compte de l'énoncé demandant d'expliciter les coefficients de B.

4. Question facile si l'on remarque que la matrice A est triangulaire (inférieure). De nombreux candidat(e)s perdent encore du temps ici dans des calculs inutiles, invraisemblables, souvent faux.

Partie II

La partie II montre que, partant de décompositions des puissances de f de 0 à m, on déduit les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et sa diagonalisabilité.

Pour cette partie, beaucoup de copies contiennent de grossières confusions entre les objets mathématiques qui interviennent.

5. Trop de démonstrations fausses utilisent une prétendue linéarité de P. La résolution correcte fait intervenir la permutation de deux symboles de sommation.

6. Les copies comportent ici beaucoup de confusions, entre composition et produit, entre polynôme et endomorphisme. Il ne faut pas oublier de montrer que N est élément de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$, pout pouvoir utiliser le résultat de la question 5.

7.a. Question facile et souvent correctement résolue.

7.b. Ici aussi, comme pour la question 6., il ne faut pas oublier de montrer que L_i est élément de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$. Trop de copies contiennent des confusions entre les indices, qui sont souvent tous notés i, ce qui est faux.

8.a. Dans beaucoup de copies, il y a incompréhension de la question posée, par incompréhension des notations (e et f^0) et confusions entre objets mathématiques.

8.b. Ne pas oublier de citer aussi l'inclusion la plus simple : la somme des $\mathrm{Im}\,(p_i)$ est incluse dans E.

9.a. Question très facile et souvent résolue.

9.b. Il y a aussi ici trop de confusions sur la nature des objets mathématiques manipulés. Les écritures $f - \lambda_i$, $f(p_i)$, n'ont pas de sens. Nous appelons les candidat(e)s à une plus grande rigueur.

10. Cette question de synthèse n'a pas emporté l'adhésion des candidat(e)s. Les explications données sont la plupart du temps incomplètes et il y a souvent confusion entre m et la dimension de E.

11.a. Questions peu réussie, les essais de résolution étant souvent incomplets ou incorrects.

11.b.,c. Trop de confusions sur les indices, avec des écritures du genre $p_i \circ \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\Big)$, qui n'ont pas de sens.

12. La première partie de la question peut être résolue par un raisonnement par récurrence. Dans la seconde partie, d'ailleurs quelquefois oubliée semble-t-il par les candidat(e)s, on retrouve souvent l'erreur commise lors de la résolution de la question 5., invoquant la prétendue linéarité de P.

Partie III

La partie III fait intervenir des produits scalaires.

13. La définition d'un produit scalaire est en général connue. Mais la déduction $x = 0$ à partier de $\varphi(x, x) = 0$ est souvent fautive, par oubli du résultat de la question 8.a. Quelques candidat(e)s confondent la norme et le carré de la norme, en écrivant $\varphi(x, x) = ||x||$ (faux) au lieu de $\varphi(x, x) = ||x||^2$ (correct).

14. Question assez bien résolue, mais la seconde partie de cette question est souvent omise.

15. Beaucoup de confusion dans la manipulation des indices, comme pour les questions 11.b. et c.

Problème 2

Le problème 2 est composé de trois parties.

Partie I

La partie I étudie la somme d'une série à termes réels de signes alternés.

1. Cette question n'est résolue que dans une infime minorité de copies. La plupart des candidat(e)s commettent une erreur de logique du type : la série diverge car la série des valeurs absolues diverge, confondant ainsi une implication et sa réciproque.
D'autre part, on ne peut pas ici appliquer un théorème de comparaison, puisque la série considérée n'est pas à termes réels positifs ou nuls.

2.a. Question correctement résolue dans la majorité des copies. Mais, dans une proportion non négligeable des copies, les calculs de $u_{2p+2} - u_{2p}$ et de $u_{2p+1} - u_{2p-1}$ sont faux.

2.b. Les candidat(e)s, dans leur quasi-totalité, n'ont pas compris le sens de cette question. Rappelons que le programme officiel ne contient pas de théorème donnant la convergence d'une suite à partir des convergences des suites extraites des termes de rangs pairs, de rangs impairs, et c'est justement ce qu'il s'agit ici de démontrer.

2.c. Question très facile et souvent résolue.

2.d. Question facile et souvent résolue. Quelques copies gardent des traces d'erreurs de signes lors de la résolution de la question 2.a., rectifiées ensuite au vu de cette question 2.d.

2.e. Question correctement résolue dans seulement une minorité es copies, et ce malgré l'indication de l'énoncé. Le cas n pair a été mieux réussi que le cas n impair.

2.f. Cette question n'est abordée que dans une proportion très faible des copies. Le texte proposé est souvent incorrect.

3. Trop de candidat(e)s se perdent dans des calculs faux, en prétendant faire des changements d'indice du type $i = 2k - 1$, ce qui n'a pas de sens. La seconde inégalité demandée a été moins souvent abordée que la première.

4.a. Question assez facile, souvent correctement résolue.

4.b. Il faut ici utiliser le théorème du cours sur les sommes de Riemann pour la fonction continue $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur le segment $[0\,;1]$.

5. Question facile et courte, assez souvent résolue.

Partie II

La partie II étudie une fonction définie par une intégrale reliée à la partie I.

6. Cette question a été maltraitée dans la plupart des copies, souvent par oubli de l'impropriété à la borne 0 et par manipulation incorrecte d'équivalences logiques.

7.a. Question rarement résolue, les candidat(e)s s'enlisant dans des calculs lourds et ne remarquant pas l'intervention d'une sommation géométrique. Quand celle-ci est remarquée, le calcul est souvent faux, par confusion avec une somme commençant à l'indice 0 au lieu de l'indice 1.

7.b. Les deux parties de la question peuvent être résolues simultanément par le simple changement de variable $u = kt$. Souvent l'impropriété à la borne 0 n'est même pas perçue.

7.c. Quelques confusions entre $n \longrightarrow +\infty$ et $x \longrightarrow +\infty$.

7.d. Question peu souvent résolue. On ne peut pas intervertir une limite et une sommation de série sans explication. Il faut ici passer par les sommes partielles.

8. Question facile, assez souvent résolue. La valeur $\Gamma(2) = 1$ n'est pas toujours connue.

Partie III

La partie III propose l'étude d'une variable aléatoire à densité, puis l'étude d'une suite de variables aléatoires à densité, en liaison avec la partie II.

9. Les correcteurs ont été étonnés du nombre important de candidat(e)s ne sachant pas traiter cette question facile, en laissant un blanc dans la copie, ou en proposant des calculs grossièrement faux, ou en procédant de la simple affirmation d'un bluff.

10. La recherche d'une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{(1+\mathrm{e}^{t})^2}$ s'est révélée souvent insurmontable, ou entachée d'une erreur de signe, bizarrement récupérée à la question suivante.

11. Rappelons qu'une fonction de répartition (une densité aussi) doit être à valeurs $\geqslant 0$ et qu'une réponse criardement fausse est bien sûr lourdement sanctionnée.

12.a. Question facile. Mais trop de candidat(e)s oublient, pour montrer que $m_n(X)$ existe, qu'il faut a priori envisager une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ et non de 0 à $+\infty$.

12.b. Question facile, souvent résolue.

12.c. Quelques candidat(e)s traitent correctement cette question. L'intégration par parties doit être effectuée sur un segment $[0\,;A]$ puis suivie d'un passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$.

13. Question facile, se déduisant simplement des précédentes.

14.a. Question assez souvent résolue, mais il manque quelquefois l'expression de F_{X_i}.

14.b. Les rares candidat(e)s qui arrivent jusqu'à à cette question oublient souvent de montrer que la fonction obtenue est bien une fonction de répartition.

L'équipe de conception s'est attachée à rédiger un sujet conforme qu programme ECS, progressif dans la difficulté des questions, permettant aux candidat(e)s de valoriser leurs compétences : compréhension de la problématique, connaissance du cours, aptitude au raisonnement logique, mise en oeuvre des techniques de calcul, communication écrite et qualités de synthèse.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, exempt d'erreur d'énoncé, intéressant et varié, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, bien rédigé, de difficulté graduée, couvrant une large partie des connaissances exigibles des deux années, bien adapté à la voie scientifique, et un peu long, ce dont il a été tenu compte dans l'établissement du barème.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions ouvertes ou plus délicates, aux meilleur(e)s de se dégager. L'aptitude au calcul et au raisonnement, les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

L'écart entre les très bonnes copies et les copies très faibles s'est très nettement creusé. Les correcteurs ont trouvé le niveau des copies très hétérogène et en forte baisse. Plusieurs correcteurs ont signalé un effondrement du niveau des candidat(e)s. Les candidat(e)s non préparé(e)s n'ont pas pu donner le change : la quasi-totalité des questions exigeait la connaissance du cours. Certaines copies montrent que des candidat(e)s ont des difficultés à mobiliser des compétences mathématiques en principe développées depuis l'enseignement secondaire.

Le niveau global des copies est plus faible que lors des sessions précédentes.

La présentation des copies est satisfaisante, mais l'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision.

Une connaissance sûre et précise du cours et un entraînement assidu aux techniques classiques sont indispensables.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation doivent être respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant proprement, de séparer nettement les questions et de conclure clairement à la fin de chaque question. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.

Moyenne de l'épreuve: 11,84 / 20.