

# RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPROFONDIES 2023

---

## 1/ Présentation du sujet

Le sujet était composé de deux exercices et d'un problème. Le premier exercice avait pour but le calcul de la somme d'une série. Le second exercice étudiait une variable aléatoire qui n'est ni discrète, ni à densité. Le problème proposait une étude élémentaire des formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

L'objectif du sujet était d'évaluer les candidates et candidats sur une vaste partie du programme de mathématiques approfondies. Le sujet était d'une longueur raisonnable qui permettait d'aborder une très grande majorité des questions posées et le barème avant péréquation permettait déjà de classer convenablement les copies.

Pour cette première année, les questions concernant l'informatique ont été volontairement limitées.

## 2/ Distribution des notes et répartition des points alloués

### • Distribution des notes

Il y a eu 3069 copies corrigées.

Le tableau suivant précise les caractéristiques statistiques principales des notes finales (après péréquation) de l'épreuve :

|                    |      |
|--------------------|------|
| Moyenne            | 11   |
| Écart type         | 5,52 |
| Premier quartile   | 6,5  |
| Médiane            | 11,1 |
| Troisième quartile | 15,7 |

La répartition plus détaillée des notes finales est donnée par l'histogramme figure 1.

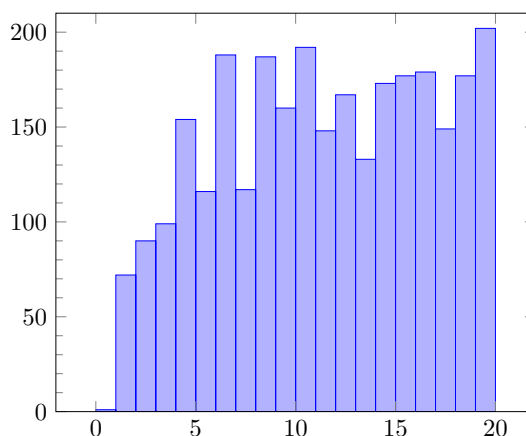


FIGURE 1 – Répartition des notes

## • Répartition des points alloués

Les différentes parties du sujet ont contribué de la manière suivante à la note globale.

|              |       |
|--------------|-------|
| Exercice 1   | 18,4% |
| Exercice 2   | 21,1% |
| Problème     | 56,5% |
| Présentation | 4%    |

La contribution des différentes parties du problème sur la note globale est la suivante.

|              |       |
|--------------|-------|
| Préliminaire | 6,1%  |
| Partie I     | 17%   |
| Partie II    | 19,1% |
| Partie III   | 14,3% |

Les points de présentation étaient répartis équitablement de la manière suivante :

- orthographe et lisibilité ;
- présentation générale, qui prenait en compte notamment la mise en valeur des réponses.

Les candidats ont obtenu en moyenne 79% des points alloués au premier item et 68% des points alloués au second.

## 3/ Commentaires généraux

Rappelons que la qualité des raisonnements et la précision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation. Ainsi, les candidates et candidats doivent également prendre soin de définir les objets et les notations utilisés lors de leurs raisonnements. Lorsqu'un candidat ou une candidate utilise un résultat du cours, il ou elle se doit de citer et de vérifier toutes ses hypothèses.

Dans le cas de l'utilisation de résultats des questions précédentes, les candidates et candidats se doivent de l'indiquer, en citant les numéros des questions utilisées.

Enfin la présentation générale de la copie et l'orthographe contribuent aussi à l'évaluation.

## 4/ Commentaires par exercices

### Exercice 1

- a) Des confusions entre fonction et image mais beaucoup de bonnes rédactions dans l'ensemble.  
b) Dans certaines copies, l'intégrale  $\int_1^n \frac{dt}{t}$  n'est pas calculée.  
c) Question globalement réussie malgré quelques « tentatives de vol » en sommant de 1 à  $n$  et en trouvant le résultat demandé sans la moindre explication.  
d) La division par  $\ln(n)$  se fait la plupart du temps sans préciser qu'il est strictement positif.  
Certains étudiantes et étudiants montrent que chaque membre des inégalités est équivalent à  $\ln(n)$  et concluent en invoquant le théorème des gendarmes sans jamais encadrer le quotient  $\frac{S_n}{\ln(n)}$ .
- Informatique.**  
De manière générale, ces questions ont été étonnamment peu traitées.  
a) Trop de copies restent vagues sur le sens des variables et ne donnent pas une réponse en rapport avec les questions précédentes. Par ailleurs, il y a souvent confusion entre le dernier rang où  $S_n < a$  et le premier où  $S_n \geq a$ . L'erreur la plus fréquente est de croire que l'algorithme retourne la valeur de  $S_{50}$ . Le fonctionnement de l'algorithme est très peu expliqué.  
b) Question qui n'a quasiment jamais été bien traitée. Dans beaucoup de copies, la réponse attendue est devinée plus que comprise et la notation scientifique est souvent ignorée ce qui amène la réponse :  $\exp(49) \approx 2$ .
- a) Quelques erreurs, le cours est parfois mal su ou mal appliqué et le fait que  $t \neq 1$  n'est pas toujours signalé.  
b) Question plutôt bien traitée mais les rédactions manquent de rigueur (par exemple : absence de justification de la continuité sur  $[0; x]$  avant l'intégration et oubli de la valeur absolue dans la primitive).  
c) Beaucoup de « tentatives d'arnaque ». Des passages à la limite à l'intérieur de l'intégrale et des majorations farfelues ou mal justifiées, la plus fréquente était  $\frac{1}{1-t} \leq 1$  pour  $t \in [0, 1[$ .  
d) Question pas toujours bien rédigée.

## Exercice 2

1. a) Le résultat étant donné, tout est fait pour y arriver, le plus souvent assez correctement (des abus avec les inégalités strictes et larges néanmoins).  
b) Question souvent traitée avec trop de longueur mais la définition semble en tout cas bien connue.  
c) Beaucoup de candidates et candidats écrivent  $F'_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  sans précaution.  
Plusieurs candidates et candidats montrent que  $f_n$  est une densité, mais ne montrent pas que c'est une densité de  $Z_n$ .
2. Question très souvent correctement traitée. Cependant, plusieurs candidates et candidats ne lisent pas bien le texte et inventent de façon plus ou moins heureuse des instructions pour simuler la loi uniforme, alors que l'indication est donnée dans l'énoncé.
3. Des problème avec la limite de  $(1-x)^n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  dans le cas où  $x = 0$ . Quand la limite est bien calculée, il y a eu de nombreuses difficultés pour identifier correctement la variable limite.
4. a) Quelques raisonnements à base « d'équiprobabilité », mais souvent confus. La réponse par le calcul manque souvent de justifications et la formule donnant  $g_n$  est utilisée comme densité de  $Z_n - X_n$  sans aucune vérification, et sans voir que c'est incohérent avec le résultat demandé.  
b) Des incohérences avec la question 4a et beaucoup de réponses fantaisistes, alors que le lien avec la question précédente est immédiat.  
c) **Informatique.** Question bien mal traitée dans l'ensemble. Parfois de bonnes initiatives tout de même et quelques solutions élégantes aperçues de temps en temps.  
Beaucoup de candidates et candidats écrivent `VarZ(n)-rd.random(1)` sans faire le rapport entre les deux variables.
5. Question rarement bien traitée.  
a) Très souvent, les arguments donnés pour justifier une réponse sont hors sujet, ou tendent plutôt à justifier la réponse inverse (rectangles irréguliers).  
b) Un nombre excessif de candidates et de candidats pensent que le graphique n'est pas cohérent, pour la raison que la probabilité de l'événement  $[X_{500} = 0]$  semble être de 50 au lieu de  $\frac{1}{500}$ .

## Problème

Le problème aborde divers aspects des formes linéaires et des hyperplans en dimension finie. Il a été traité dans son ensemble par une majorité de candidates et de candidats. Cependant il y a eu beaucoup de confusions entre les objets mathématiques à partir de la partie II, qui devenait plus conceptuelle.

### Préliminaire

1. La réponse était dans l'énoncé.
2. a) Souvent, il y a eu mauvaise lecture du sujet par les candidates et candidats qui utilisent le résultat de la question 2c.  
b) Réponses souvent correctes, mais pas toujours bien justifiées. Pour certaines copies,  $\dim \operatorname{Im} \varphi = 0$  signifie que l'image de  $\varphi$  est vide.  
c) Le théorème du rang est donné et répété plusieurs fois sous la forme «  $\dim(E^*) = \dim(\ker(\varphi)) + \operatorname{rg}(\varphi)$  ».

### Partie I - Des exemples

3. a) L'une des deux propriétés (linéarité, à valeurs réelles), pas toujours la même, est souvent oubliée.  
b) Une grande proportion pense à justifier que  $g$  n'est pas l'application nulle  
c) La vérification du fait que chaque polynôme  $Q_k$  est dans  $\ker(g)$  est souvent absente.
4. a) Mêmes remarques qu'à la question 3a  
b) Beaucoup de candidates et de candidats décrivent le noyau par l'égalité  $P(0) = 0$ .
5. a) Le fait que  $f$  et  $g$  ne sont pas nulles n'est pas toujours rappelé.  
b) Des confusions entre les objets.  
c) Pour plusieurs copies,  $\operatorname{Im} f$  et  $\ker f$  sont en somme directe.  
Quelques confusions entre l'ensemble vide et le sous-espace vectoriel 0.  
d) Un certain nombre de copies considèrent que  $\operatorname{vect}(x_0)$  est réduit à  $x_0$ . Dans beaucoup de copies on traite la nullité par disjonction des cas, en affirmant qu'un élément de  $E$  est soit colinéaire à  $x_0$ , soit dans  $\ker(f)$ .  
e) Beaucoup de candidats arrivent à la conclusion que  $f = g$ , ou que  $f$  et  $g$  commutent.

## Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. a) Le rappel de la liberté de la famille  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  est souvent oublié.  
b) Questions très mal comprises. Certains démontrent « à la main » de façon correcte que l'on définit ainsi une application linéaire mais très peu utilisent le cours.  
Pour le noyau, le rappel que  $\varphi$  est non nulle est souvent oublié.  
Il y a aussi beaucoup de confusions ici entre les sous-espaces et leurs bases, par exemple entre  $H$  et  $(e_1, \dots, e_{n-1})$ .
7. Question rondement menée en général, mais quelques confusions de notations navrantes (noyau d'une intersection, ou appartenance à  $\ker(f(x))$ ).
8. a) La définition d'une surjection ne semble pas bien connue.  
b) Le lien avec la question précédente n'est pas toujours bien vu. Notamment, les candidats ont du mal à écrire  $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = (1, 0, \dots, 0)$ .
9. a) Des confusions entre  $n$  et  $p$  dans cette question. Pour plusieurs candidates et candidats, « *non surjective* » signifie injective.  
L'inégalité stricte n'est pas toujours donnée.  
b) La liberté de la famille à compléter est souvent oubliée. Beaucoup de candidates et candidats complètent une base et s'arrêtent là, ou bien affirment sans aucun argument que l'image est donc incluse dans un hyperplan.  
c) De nombreuses confusions entre les objets (par exemple  $\text{Im}(f)$  appartient à  $\text{vect}(f_1, \dots, f_p)$ ). Cette question est traitée correctement dans de très rares copies.
10. a) La contraposée de la question précédente n'est pas perçue.  
b) Le rappel de la surjectivité de  $f$  manque souvent et la formule du rang fait encore parfois intervenir la dimension de  $E^*$ .

## Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

11. a) Correctement traité le plus souvent.  
b) Beaucoup de réponses fantaisistes, avec notamment l'affirmation qu'un produit scalaire de deux vecteurs n'est nul que si l'un des deux vecteurs est nul.  
c) Cette question est mieux réussie que la précédente, étonnamment, grâce à la possibilité de considérer  $f_a(a)$ .
12. **Théorème de représentation des formes linéaires**  
a) Parfois de très grosses confusions, mais cette question est bien mieux réussie que ce qu'on pouvait croire, même dans des copies très médiocres par ailleurs.  
b) Trop de candidates et candidats invoquent la dimension finie de  $E$  pour justifier que injectif implique bijectif dans ce cas.  
c) Les quantificateurs sont parfois malmenés (ordre inversé).
13. **Application aux formes linéaires sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$**   
a) Question de cours assez bien traitée, sauf par ceux qui assènent des formules fausses, ou qui invoquent la positivité de la trace ou autre argument fantaisiste. Il y a eu des problèmes sur l'expression de  $\text{tr}({}^t A A)$  (somme simple au lieu de somme double).  
b) Très peu de copies ont bien géré la transposition.

## Lisibilité, orthographe et présentation

- **Lisibilité et orthographe.** Sur l'ensemble des copies, c'est tout à fait correct.
- **Présentation générale.** Les copies sont bien présentées en général. Il y a quand même trop de copies avec des traits faits à main levée sans soins.