

**EPREUVES ESC**

**CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES**

---

***MATHEMATIQUES***

**OPTION ECONOMIQUE**

**Année 2003**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;*

**L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.**

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## EXERCICE 1

On pose pour  $a$  réel strictement positif la fonction  $f_a$  définie sur  $[0; a]$  par :

$$\text{Pour tout } x \in [0; a], \quad f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

- Justifier la dérivabilité de  $f_a$  sur  $[0; a]$  et calculer sa dérivée.  
En déduire le tableau des variations de  $f_a$  en précisant les valeurs aux bornes.
  - Montrer que  $f_a$  réalise une bijection de  $[0; a]$  sur  $[0; \frac{1}{a}]$ .  
On note  $f_a^{-1}$  sa bijection réciproque.  
Donner le tableau des variations de  $f_a^{-1}$  en précisant les valeurs aux bornes.
  - Montrer que  $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$ .
- Justifier l'existence de l'intégrale  $\int_0^a f_a(x) dx$ , notée  $I_a$ .
  - Déterminer deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :  $\forall x \in [0; a], \quad \frac{1-x}{1+x} = \alpha + \frac{\beta}{1+x}$ .  
En déduire que  $I_1 = 2 \ln 2 - 1$ .
  - Montrer grâce au changement de variable  $x = au$  que  $I_a = I_1$ .
- On considère dans ce paragraphe la fonction  $h_a$  définie sur  $\mathbb{R}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0; a], & h_a(x) = \frac{1}{2 \ln 2 - 1} f_a(x) \\ \text{si } x \notin [0; a], & h_a(x) = 0 \end{cases}$$

- Montrer que  $h_a$  est une densité de probabilité.  
On note  $X_a$  une variable aléatoire réelle admettant une densité égale à  $h_a$ .  
On note  $H_a$  la fonction de répartition de la variable  $X_a$ .
- Calculer l'espérance  $E(a + X_a)$ . En déduire l'espérance  $E(X_a)$ .
- Calculer l'espérance  $E((a + X_a)^2)$ . En déduire  $E(X_a^2)$  puis la variance  $V(X_a)$ .
- Soit la variable aléatoire à densité  $T$  définie par  $T = \frac{1}{a} X_a$ .  
Montrer que pour tout réel  $t$  de  $[0; 1]$  :  $P(T \leq t) = H_a(at)$ .  
En déduire que  $T$  suit la même loi que  $X_1$ .

## EXERCICE 2

On considère pour  $n$  entier naturel non nul la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \text{ et on note } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note  $f_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par  $A_n$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On considère également les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  :  $\vec{u} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  et  $\vec{w} = (0, -1, 1)$ .

- Déterminer pour tout triplet  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  l'expression de  $f_n((x, y, z))$  en fonction de  $n, x, y, z$ .

2. (a) Montrer que  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont vecteurs propres de  $f_n$ .  
 (b) Montrer que la famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
 (c) En déduire une matrice  $P$  telle que :

- $P$  inversible et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- $P^{-1}A_n P = D_n$ , où  $D_n = I + \frac{1}{n}H$  et  $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul  $\Pi_n = A_1 A_2 \cdots A_n$  ( avec  $\Pi_1 = A_1$  ).

- (a) Montrer que  $\Pi_n = P D_1 D_2 \cdots D_n P^{-1}$ .  
 (b) Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$D_1 D_2 \cdots D_n = I + nH \text{ où } H \text{ est la matrice définie au 2(c)}$$

- (c) En déduire les neuf coefficients de la matrice  $\Pi_n$ .

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul  $D_1 D_2 \cdots D_n$  est inversible et que

$$(D_1 D_2 \cdots D_n)^{-1} = I - \frac{n}{n+1}H \text{ où } H \text{ est la matrice définie au 2(c)}.$$

- (b) En déduire que  $\Pi_n$  est inversible et donner les neuf coefficients de  $\Pi_n^{-1}$ .

### EXERCICE 3

On suppose que  $p$  est un réel fixé de  $]0; 1[$  qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux. On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux. On note  $F$  : " Le billet testé est faux " et  $B$  : " La lumière qui s'allume est bleue ". On note  $P(\bar{F}/B) = \alpha$  et  $P(F/\bar{B}) = \beta$ , et on suppose dans tout l'exercice que  $\alpha + \beta > 1$ .

1. (a) En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer  $P(F)$ , montrer que

$$P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}.$$

En déduire que  $1 - \alpha \leq p \leq \beta$ .

- (b) Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est

$$P(B/F) = \frac{(1 - \alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}.$$

- (c) On suppose dans cette question uniquement que  $\beta = \alpha = 0,95$  et on note

$$x = \alpha + p - 1 = p - 0,05.$$

Montrer que  $1 - P(B/F) = \frac{0,95x}{0,9(x + 0,05)}$ .

En déduire un réel  $a$  tel que  $P(B/F) = 1 - ax + x\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varepsilon(x) = 0$ .

2. On considère le programme Turbo-Pascal suivant , où  $p$  représente la valeur  $p$  citée en introduction

```

program ESC2003 ;
var x , v , d , r : real ;
begin
randomize ;
: if random < p then v := 0 else v := 1 ;
  r := random ;
  x := r * r ;
  d := ( 1 - x ) * v + x * ( 1 - v ) ;
end.
```

On rappelle que random est une variable à densité qui suit une loi uniforme et qui fournit à chaque appel un réel choisi au hasard dans  $[0; 1]$ . Les deux appels à la fonction random sont indépendants.

On note  $V, D, R$ , les variables aléatoires égales aux valeurs de  $v, d, r$  lorsque le programme a été exécuté.

(a) Montrer que  $P(V = 0) = p$ .

(b) Exprimer  $D$  en fonction de  $R$  et de  $V$ .

(c) Soit  $s$  un réel fixé de  $] 0 ; 1 [$ , appelé " seuil ".

En remarquant que  $R$  et  $V$  sont deux variables aléatoires indépendantes, montrer que :

$$P(D < s/V = 0) = \sqrt{s} \text{ et } P(D \geq s/V = 1) = \sqrt{1 - s}.$$

En déduire

$$P(D < s) = p\sqrt{s} + (1 - p)(1 - \sqrt{1 - s}).$$

On utilise ce programme pour simuler un détecteur , avec (  $V = 0$  ) pour " le billet est faux " et (  $D < s$  ) pour " le rouge s'allume ".

(d) Montrer que la probabilité que le détecteur se trompe est égale à  $1 - (1 - p)\sqrt{1 - s} - p\sqrt{s}$ .

(e) On suppose ici que  $p = \frac{1}{4}$ . Etudier sur  $]0; 1[$  la fonction définie par  $f(t) = 3\sqrt{1 - t} + \sqrt{t}$ .

En déduire que pour le seuil  $s = \frac{1}{10}$  la qualité du détecteur est maximum.