ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

Année 2005

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note :

f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.
Id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est I.
h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $h = f - 3\,\mathrm{Id}$.
N la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base B.

1. (a) Vérifier que $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$. En déduire $N^2 \neq O$; $N^3 = O$.
   (b) Montrer que si λ est valeur propre de N alors $\lambda = 0$.
   Etablir alors que 0 est la seule valeur propre de h.
   (c) En déduire que f admet 3 pour unique valeur propre.
   (d) Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de f associé à la valeur propre 3.
   (e) L' endomorphisme f est-il diagonalisable ? est il bijectif ?

2. (a) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, -1, 1) \quad ; \quad u_2 = h(u_1) \quad ; \quad u_3 = h(u_2).$$

   Calculer u_2 et u_3. Vérifier que $h(u_3) = (0, 0, 0)$.
   (b) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}'$.
   (c) Déterminer la matrice N' de h relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Montrer que la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est $3I + N'$.
   On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. (a) A l'aide des questions précédentes, montrer que P est inversible et que $A = P(3I + N')P^{-1}$.
   (b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.
   b1. Montrer que $A^n = P(3I + N')^n P^{-1}$.
   b2. Justifier que $(N')^3 = O$.
   En déduire trois réels a_n , b_n , c_n tels que $(3I + N')^n = a_n I + b_n N' + c_n (N')^2$.
   b3. Montrer que $A^n = a_n I + b_n N + c_n N^2$.

EXERCICE 2

On considère la fonction de deux variables f définie sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ par :

$$f((x, y)) = x^2 \ln y - y \ln x$$

1. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t \ln t - 1$.

   (a) Montrer que g est C^2 sur son domaine et calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour $t > 0$.
   (b) Etudier les variations de g' sur $]0; +\infty[$ puis celle de g sur $]0; +\infty[$.
   (On précisera à chaque fois les limites aux bornes)

(c) En déduire que l'équation $g(t) = 0$ admet une unique solution notée α.

(d) Vérifier que : $\ln\alpha = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha}$

2. (a) Montrer que f est C^2 sur U.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (c) En déduire que si (x_0, y_0) est un point critique de f , alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \dfrac{(x_0)^2}{\ln x_0}$.

   (d) Etablir alors que $g(\ln x_0) = 0$.

   En déduire que f possède un unique point critique noté M , de coordonnées $\left(e^{\alpha}, \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}\right)$ où α est le réel défini au 1.(c).

3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

   (b) En utilisant la relation de la question 1.(d) , montrer que $2\ln y_0 + \dfrac{y_0}{(x_0)^2} = \dfrac{2}{\alpha}$.
   En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.

4. On définit sur $\mathbb{R}$ l'application h telle que $\begin{cases} h(t) = \dfrac{36}{5} f(t,t) & \text{lorsque} \quad t \in]0;1] \\ h(t) = 0 & \text{lorsque} \quad t \leqslant 0 \text{ ou } t > 1 \end{cases}$

   (a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul et a un réel de $]0;1]$. Calculer $\displaystyle\int_a^1 t^k \ln t \, dt$.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln t \, dt$ existe et vaut $-\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

   (c) Montrer que pour tout réel t de $]0;1]$, $(t-1)\ln t \geqslant 0$.
   En déduire que h est positive sur $\mathbb{R}$.

   (d) Montrer que h est une densité de probabilité.

EXERCICE 3

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.
On appelle " épreuve " la séquence suivante :
On tire une boule de l'urne, puis :

- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée d'épreuves.
Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la n - ième épreuve.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
R_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule rouge de l'urne. "
B_k : " Lors de la k-ième épreuve on a extrait une boule bleue de l'urne. "

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.

2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?

3. Calculer pour tout entier naturel non nul n , $P(Y_n = 2)$.

4. On pose pour tout entier naturel non nul$n$, $u_n = P(Y_n = 1)$.

   (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

   (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
   $$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$
   Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

   (c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est géométrique.
   En déduire v_n en fonction de n et de v_1,
   Etablir enfin que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2\,(\dfrac{2}{3})^n - \dfrac{2}{3^n}$.

   (d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.

5. Calculer l'espérance de Y_n.

6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.

   (a) Donner $Z(\Omega)$.

   (b) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.

   (c) En déduire la loi de Z.