

**EPREUVES ESC**

**CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES**

---

***MATHEMATIQUES***

**OPTION ECONOMIQUE**

**Année 2006**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;*

**L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.**

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## EXERCICE 1

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Etudier en discutant selon  $\alpha$  l'inversibilité de la matrice  $P_\alpha$ . (On utilisera la méthode du pivot).

2. On note  $Q$  le polynôme défini sur  $\mathbb{R}$  par  $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$ .

(a) Montrer par une méthode du pivot que :  $\lambda$  est valeur propre de  $A \iff Q(\lambda) = 0$ .

(b) Calculer  $Q(1)$ . En déduire les valeurs propres de  $A$ .

(c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de  $A$ .

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

3. On définit les triplets  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$  et  $\vec{v}_2 = (4, 2, 1)$ .

(a) Justifier que  $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$  et que  $f(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$ .

Déterminer le réel  $\alpha_0$  tel que le triplet  $\vec{v}_3 = (\alpha_0, 1, 0)$  vérifie  $f(\vec{v}_3) = \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ .

(b) Montrer grâce à la question 1 que  $P_{\alpha_0}$  est inversible.

En déduire que la famille  $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Vérifier par calcul que  $P_{\alpha_0} \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (ce résultat servira en question 4.)

(d) Sans calculer  $P_{\alpha_0}^{-1}$ , justifier la relation:  $A = P_{\alpha_0} T P_{\alpha_0}^{-1}$

(e) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

4. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = 1; & u_1 = -1; & u_2 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, & u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

(a) On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $Y_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ . Montrer que  $Y_{n+1} = A Y_n$ .

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $Y_n = P_{\alpha_0} T^n P_{\alpha_0}^{-1} Y_0$ .

(c) En utilisant la question 3., exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout entier naturel  $n$ .

## EXERCICE 2

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x$ .

Pour chaque entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on considère l'équation notée  $(E_n) : g(x) = n$ , d'inconnue le réel  $x$  ..

1. (a) Dresser le tableau des variations de  $g$  en précisant les limites aux bornes.  
 (b) Montrer que l'équation  $(E_n)$  admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée  $\alpha_n$  et l'autre strictement positive notée  $\beta_n$ .

2. Dans cette question on note  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k, u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

- (a) On rappelle que  $\alpha_2$  est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque  $n = 2$ . Calculer  $g(-1)$  et  $g(-2)$  puis montrer que  $2 \leq \alpha_2 \leq -1$ .
- (b) Justifier que  $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$ .  
 En déduire par récurrence sur  $k$  que pour tout entier naturel :  $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$ .
- (c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq -b \leq -1$ ,  $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)$ .
- (d) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ ,  $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$

En déduire par récurrence sur  $k$  que pour tout entier naturel  $k$  :  $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$ .

- (e) Montrer que la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente et de limite  $\alpha_2$ .
- (f) On considère le programme Turbo-Pascal suivant: ( où `trunc` désigne la fonction partie entière)

```

program ex2 ;
var N, k : integer ; epsilon, u : real ;
begin
writeln ( ' Donnez un reel strictement positif' );
readln (epsilon );
N := trunc ( - Ln (epsilon ) ) + 1 ; u := -1 ;
for k := 1 to N do ..... ;
end.

```

Montrer que l'entier naturel  $N$  calculé dans ce programme vérifie :  $\left(\frac{1}{e}\right)^N \leq \epsilon$

Compléter la partie pointillée de ce programme afin que la variable  $u$  contienne après son exécution une valeur approchée de  $\alpha_2$  à  $\epsilon$  près.

3. On revient au cas général où  $n \geq 2$ .

- (a) Montrer que  $1 \leq g(\ln n) \leq n$ . En déduire  $(\ln(2n)) \geq n$  ( on donne  $\ln 2 \simeq 0,69$  ).
- (b) En déduire que  $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$ , puis établir  $\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

### EXERCICE 3

Dans cet exercice  $R$  désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \notin [0; R] \\ f(t) = \frac{2t}{R^2} & \text{si } t \in [0; R] \end{cases}$$

1. (a) Etudier la continuité de  $f$ .  
(b) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.  
On note dans toute la suite  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $f$ .  $F_X$  désigne sa fonction de répartition.
2. (a) Déterminer la valeur  $F_X(x)$  lorsque  $x < 0$ , puis lorsque  $x > R$ .  
(b) Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[0; R]$ ,  $F_X(x) = \frac{x^2}{R^2}$ .
3. (a) Montrer que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = \frac{2R}{3}$ .  
(b) Montrer que  $X$  admet une variance et que  $V(X) = \frac{R^2}{18}$ .  
Dans toute la suite  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $X$ . On cherche à estimer le réel  $R$  à l'aide de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

4. On note  $T_n = \frac{3}{2n} \sum_{k=1}^n X_k$  et on cherche à estimer  $R$  avec  $T_n$ .

Montrer que  $T_n$  est un estimateur sans biais de  $R$  et calculer son risque quadratique noté  $r(T_n)$ .

5. On note  $M_n$  la variable aléatoire prenant pour valeur le maximum des valeurs prises par les variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , de sorte que pour tout réel  $x$ ,  $(M_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)$ .

- (a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $P(M_n \leq x) = (F_X(x))^n$ . En déduire la fonction de répartition de  $M_n$ , puis montrer que  $M_n$  est une variable aléatoire à densité.
- (b) Montrer qu'une densité possible de  $M_n$  est la fonction  $g_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} g_n(t) = 2n \frac{t^{2n-1}}{R^{2n}} & \text{si } t \in [0; R] \\ g_n(t) = 0 & \text{si } t \notin [0; R] \end{cases}$$

- (c) Montrer que  $M_n$  admet une espérance et une variance, et que:

$$E(M_n) = \frac{2n}{2n+1}R \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}R^2$$

- (d) On cherche à estimer  $R$  avec  $M_n$  :  
Calculer le biais de  $M_n$ , noté  $b(M_n)$ , et son risque quadratique noté  $r(M_n)$ .
6. (a) Déterminer un équivalent simple lorsque  $n$  tend vers  $\infty$  de  $b(M_n)$  et  $r(M_n)$ .  
(b) Quels sont les avantages et les inconvénients réciproques des estimateurs  $T_n$  et  $M_n$  ?