

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES II

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème a pour objet l'étude d'une marche aléatoire sur un cube (partie II).

Dans la partie I on établit quelques résultats matriciels utilisés dans la suite.

PARTIE I

1. Étude de suites récurrentes linéaires.

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 1$ la relation :

$$(1) \quad 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0.$$

(a) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

(b) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1).

(c) On considère une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1).

- Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois nombres réels α, β, γ tels que :

$$\begin{cases} u_1 &= \alpha + \frac{\sqrt{7}}{3}\beta - \frac{\sqrt{7}}{3}\gamma \\ u_2 &= \alpha + \frac{1}{9}\beta + \frac{1}{9}\gamma \\ u_3 &= \alpha + \frac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \frac{7\sqrt{7}}{27}\gamma \end{cases}$$

(On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de α, β, γ).

- On associe à la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$v_n = u_n - \alpha - \beta \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n - \gamma \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n.$$

Établir qu'elle vérifie (1), puis, en remarquant que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 0$.

Exprimer enfin u_n en fonction de n .

- (d) En déduire que l'ensemble des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant (1) est l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites obtenues au b).

2. Étude des puissances d'une matrice.

On se propose d'étudier la suite $(M^n)_{n \geq 1}$ des puissances de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer M^2 , M^3 , M^4 et en déduire que M vérifie les deux propriétés suivantes :

- (2) $9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0$.
 (3) Les matrices M , M^2 , M^3 sont linéairement indépendantes.

- (b) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels a_n , b_n , c_n , tels que :

$$(4) \quad M^n = a_n M + b_n M^2 + c_n M^3$$

- Établir, pour tout entier $n \geq 1$, l'unicité des réels a_n , b_n , c_n (s'ils existent).
- Déterminer a_n , b_n , c_n , pour $n = 1, 2, 3, 4$.
- Établir par récurrence l'existence de a_n , b_n , c_n dans le cas général.
 (On explicitera a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} en fonction de a_n , b_n , c_n).

- (c) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$; $a_n + b_n + c_n = 1$.
 (d) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) vérifient la relation (1).
 (e) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question 1, établir pour tout entier $n \geq 1$ la formule suivante :

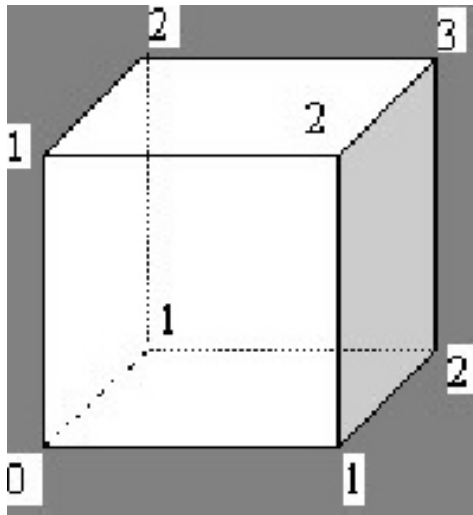
$$b_n = \frac{9}{14} \left(\left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n \right)$$

Déterminer de même les expressions de a_n et c_n .

PARTIE II

On considère un cube, dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 selon qu'ils sont situés à une, deux, trois arêtes du sommet 0 : On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet 0 l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes :

- (1) lorsque le point atteint à l'instant n un sommet S du cube autre que le sommet 3, il se situe à l'instant $n + 1$, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.
 (2) lorsque le point atteint le sommet 3 du cube, il y reste définitivement.



Pour tout entier naturel n , on désigne par :

- X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $X_0 = 0$).
- T la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant où, pour la première fois, le point atteint le sommet 3.

1. Lois des variables aléatoires X_n .

Pour tout entier naturel n , on note U_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.

- Expliciter U_0 , U_1 , U_2 .
- Exprimer pour $i = 0, 1, 2, 3$ la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
En déduire une matrice M , d'ordre 4, telle que, pour tout entier $n \geq 0$: $U_{n+1} = MU_n$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer U_n en fonction de M^n et U_0 et en déduire l'expression du vecteur U_n et de la loi de X_n en fonction des réels a_n , b_n , c_n définis à la partie I.

2. Loi de la variable aléatoire T .

- Montrer que T ne peut prendre avec une probabilité non nulle que des valeurs impaires supérieures ou égales à 3. Donner la probabilité de l'événement " $T = 3$ ".
- Comparer les événements " $X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$ " et " $T = 2n + 1$ ".
En déduire la probabilité de l'événement " $T = 2n + 1$ ".
- Vérifier alors que : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n + 1) = 1$.
- Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire T .