

MATHEMATIQUES I

Option Scientifique

Ce sujet présentait le début de la théorie des « codes correcteurs d'erreur » et donnait deux exemples.

La première partie, très courte, concernait la différence symétrique de deux ensembles finis et la distance associée. Elle permettait notamment de démontrer l'inégalité triangulaire dans la seconde partie du problème.

Cette seconde partie du problème, sans doute la plus importante, présentait « une nouvelle algèbre linéaire », c'est-à-dire l'algèbre linéaire sur le corps K à deux éléments. Les étudiants devaient retrouver les propriétés des systèmes libres, des bases et de la notion de dimension, mais cela, et c'était une difficulté, sans faire appel à une théorie générale des espaces vectoriels sur un corps quelconque : il s'agissait notamment d'utiliser des arguments de dénombrement. Cette partie introduisait également la distance de Hamming entre deux vecteurs, donnait la définition d'un code et certaines propriétés de codes particuliers, définis comme « noyau » d'une matrice. Cette partie, assez longue, contenait suffisamment d'exemples et de questions intermédiaires pour être abordée à plusieurs niveaux.

La troisième partie concernait le code de Hamming. On montrait que l'espace était l'union disjointe de boules centrées sur les vecteurs du code et on proposait un algorithme permettant de déceler une erreur de transmission puis de la corriger.

La quatrième partie concernait un autre code, basé sur l'écriture d'un entier en base 2, proposait également un exemple et se terminait par la demande de l'écriture d'un algorithme en utilisant le langage Pascal.

La résolution du problème demandait d'abord du soin dans la lecture de l'énoncé. Il fallait bien tenir compte des définitions, notamment des opérations dans le corps K . Les étudiants familiers de l'algèbre de Boole, sans doute grâce aux probabilités, sont bien entrés dans la première partie. Elle a été le plus souvent bien traitée et correspondait à 5% des points du barème.

La seconde partie a reçu un accueil plus mitigé. Par exemple la seconde question (impossibilité d'un système générateur à deux éléments) est fort peu résolue de manière satisfaisante, mais les arguments de dénombrement qu'il fallait utiliser ont été beaucoup mieux compris dans les questions ultérieures. Un bon nombre d'étudiants ont compris, c'était une difficulté et l'intérêt de cette partie, qu'il fallait redémontrer des théorèmes « classiques » de l'algèbre linéaire sur le corps des réels ou sur le corps des complexes. Et cela se faisait avec des moyens et des arguments différents de ceux donnés en cours. Cela dit, environ 80% des étudiants confondent cardinal du code (donc

d'un sous-espace vectoriel) et dimension (cardinal d'une base). Il y a des tentatives automatiques et malheureuses, de « déduction » : une question parle de permutation, donc, à la question suivante, le cardinal du code est $n!$ Cette seconde partie contenait 40% des points du barème.

La troisième partie (30% des points) et la quatrième (25% des points) étaient largement autonomes. Le début de la troisième partie demandait d'utiliser les résultats de la seconde partie, mais encore fallait-il vérifier que les hypothèses adéquates étaient satisfaites, ce qui a été trop rarement le cas. Il y avait peu de questions permettant aux chasseurs de prime de grapiller quelques points ; le « bluff » n'était guère possible. Mais certains candidats ont néanmoins bien compris les problèmes en jeu, et ont trouvé les erreurs des messages donnés en exemple, sans néanmoins avoir su utiliser de façon pertinente les algorithmes proposés. Très peu de copies, même parmi celles qui ont dominé le problème, ont eu le temps de produire un code Pascal un tant soit peu significatif. Signalons également que d'une façon générale, orthographe et présentation sont d'assez bonne qualité et témoignent d'une attitude positive de la part des candidats.

En résumé, un problème qui certes demandait plus un recul et une bonne compréhension des concepts qu'une connaissance encyclopédique de tous les points au programme, mais qui a permis de classer de façon satisfaisante et espérons-le pertinente les candidats au concours.