

Mathématiques I

Option Scientifique

1. Le sujet

Le problème comportait quatre parties et avait pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction gamma (fonction eulérienne de deuxième espèce) et leurs applications dans deux exemples d'estimation statistique : l'estimation des paramètres d'une loi gamma à deux paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance, et la recherche d'un estimateur sans biais et convergent de l'écart-type inconnu d'une loi normale centrée.

Dans la première partie, on exprimait le réel $\Gamma(x)$ sous la forme (classique) de la limite d'une suite. La seconde partie permettait de montrer directement la dérivabilité de la fonction gamma et une minoration de la dérivée de la fonction $\Psi = \ln \circ \Gamma$. Les troisième et quatrième parties, indépendantes entre elles, montraient sur les deux exemples précités, comment l'utilisation de larges parties du programme d'analyse pouvait servir à démontrer certaines propriétés de statistique mathématique.

2. Résultats et commentaires

Sur les 1728 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne s'établit à 9,23 avec un écart-type élevé de 4,5.

Le barème attribuait respectivement 18%, 43%, 22% et 17% des points aux quatre parties du problème, et il n'était nullement nécessaire de résoudre la totalité du sujet pour faire preuve de réelles qualités mathématiques ; ainsi, la note de 20 était donnée pour toute copie traitant avec succès au moins 75% du problème.

Le sujet a permis de bien classer les candidats ; les meilleurs d'entre eux ont obtenu d'excellents résultats en traitant les deux premières parties presque complètement et en résolvant un extrait significatif de l'une ou l'autre des parties d'application statistique.

Dans l'ensemble, les candidats ont montré qu'ils maîtrisaient bien le cours. Ainsi, s'agissant par exemple de la convergence d'une intégrale, d'une suite ou d'une série, les justifications de l'application d'un théorème ou d'un critère particulier sont bien faites et les calculs sont souvent bien conduits, ce qui traduit une préparation tout à fait efficace.

On peut toutefois relever un certain nombre d'erreurs, d'incohérences, de fautes de calcul ou d'imprécisions diverses, parfois même dans de bonnes copies. Ainsi, les erreurs les plus fréquentes concernent :

- la définition et l'utilisation des équivalents (il n'est pas inutile de rappeler que si les suites (u_n) et (v_n) ont même limite finie ou infinie, elles ne sont pas forcément équivalentes) ;
- l'usage inconsidéré de la notation factorielle pour des réels non entiers (on trouve ainsi $\Gamma(x) = (x-1)!$ pour x non entier naturel) ;
- des imprécisions dans l'énoncé et la vérification des hypothèses des parties statistiques III et IV ;
- des majorations assez surprenantes telles que : $\forall t > 0, |\ln t|^k \leq t^k$, ou encore, $\forall t > 0, |\ln t|^k \leq 1$ (ou le contraire) ;
- des confusions entre suite et série, des erreurs telles que « la série de Riemann $\sum 1/n$ est convergente », ou encore « la série $\sum v_n$ converge, donc la série $\sum \ln v_n$ converge » ;
- des écritures erronées ($\Psi(1) = d/dx[\ln \Gamma(1)]$, ou $\ln(n/n+1) = \ln(1-1/n)$), ou des notions hors programme (« f est localement intégrable ») ;
- un argumentaire incomplet dont la question II-4b constitue un exemple type avec l'oubli quasi permanent de l'invocation de la continuité de la fonction \ln pour pouvoir écrire : $\ln\{\ell(x)\} = \ln[\lim v_n(x)] = \lim\{\ln(v_n(x))\}$;
- l'étude des variations de la fonction φ (question I-1b), qui a manifestement déconcerté la moitié des candidats (à cause du paramètre entier n ?), dans laquelle on trouve pêle-mêle des erreurs dans l'expression

de $\varphi'(t)$, une méconnaissance du signe du trinôme, $n - t^2 = (n + t)(n - t)$, les deux racines de l'équation $t^2 - 2t + n = 0$ sont $\sqrt{1-n} - 1$ et $\sqrt{1-n} + 1$, et même parfois $1 + \sqrt{1-n} = 1 + (1 + \sqrt{n})(1 - \sqrt{n})$.

Le sujet de cette année contenait un certain nombre de questions dont la réponse était donnée, et une fois encore, certains candidats, ne sachant pas traiter ces questions, se sont livrés à des manoeuvres visant à abuser la vigilance du correcteur. Répétons que les correcteurs de mathématiques privilégient toujours une rédaction honnête à toute autre rédaction. S'il n'est pas demandé de maîtriser obligatoirement l'ensemble du problème et d'en saisir la logique, le jury apprécie particulièrement les candidats qui développent dans leur exposé, un raisonnement clair et argumenté.

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES 2005

HEC : Mathématiques I (épreuve n° 280)

<i>ECOLES UTILISATRICES DE L'EPREUVE</i>	<i>MOYENNES</i>	<i>ECARTS-TYPES</i>	<i>NBRE CANDIDATS</i>
E.N.S.A.E.	10,79	4,67	146
H.E.C	9,23	4,45	1728
ENSEMBLE	9,20	4,45	1737