

MATHÉMATIQUES S (Épreuve n° 280)
ANNÉE 2016
Épreuve conçue par HEC Paris
Voie économique et commerciale

Le sujet

Le sujet de cette année était à dominante algébrique (linéaire et bilinéaire) avec une application probabiliste. L'objet du problème était la démonstration du théorème de Cochran qui constitue un préalable essentiel à la statistique inférentielle : tests statistiques permettant de mesurer l'influence d'une ou plusieurs variables exogènes sur une ou plusieurs variables endogènes, analyse de la variance, économétrie, etc.

Le problème comportait trois parties et couvrait une large part du programme de mathématiques générales (analyse, algèbre et probabilités) et d'informatique avec des questions de Scilab représentant environ 6% des points de barème.

La longueur et la teneur du sujet ont permis à tous les candidats de tester leur niveau de connaissances et pour les meilleurs d'entre eux, d'exprimer la pleine mesure de leur talent.

Les résultats statistiques

Le barème de notation accordait des poids respectifs de 27% à la partie I, 41% à la partie II et 32% à la partie III.

Sur les 2526 candidats présents à cette épreuve, la note moyenne s'établit à 10,48 avec un écart-type très élevé de 5,14 permettant de bien distinguer les candidats.

La note médiane est de 11,1 ; un quart des candidats obtient une note inférieure à 6,9 et 75% des candidats ont obtenu une note supérieure à 14,7.

Près de 45% des candidats obtiennent une note supérieure à 12 et un peu plus de 13% des candidats se voient attribuer une note supérieure à 16. On observe enfin 2,9% des candidats qui obtiennent une note supérieure à 19 dont 43 d'entre eux qui culminent à 20.

La note maximale de 20 fut accordée aux candidats ayant résolu avec succès un peu plus de la moitié du problème. Plus précisément, on obtenait 20 si on traitait correctement toute la partie I et la moitié de la partie II ou toute la partie I, un tiers de la partie II et un tiers de la partie III.

Par école, les statistiques sont les suivantes :

- HEC (2238 candidats) – moyenne : 11,01 ; écart-type : 5,02.
- ESCP Europe (2531 candidats) – moyenne : 10,73 ; écart-type : 5,01.

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

D'année en année, on observe une tendance à l'homogénéité du niveau moyen des connaissances des candidats : on constate, sauf à de rares exceptions, que les numéros des questions abordées sont les mêmes, les candidats avançant des arguments assez stéréotypés qui font penser à des recettes apprises par cœur !

Par suite, le niveau est plutôt stable voire en légère baisse, même si la note moyenne ne reflète pas cette tendance. Les écarts se creusent entre les bons ou très bons candidats et les candidats moyens ou faibles.

Malgré une légère hausse de la note moyenne affichée, l'écart-type élevé conjugué à un premier quartile faible et un troisième quartile élevé, témoigne de cette disparité entre les candidats.

Partie I

De trop nombreux candidats disent dans la question 1 : « la matrice n'a que deux valeurs propres, donc elle n'est pas diagonalisable » ou encore, « la matrice admet 0 pour valeur propre, donc elle n'est pas diagonalisable ». D'autres candidats parviennent à se tromper dans la recherche du sous-espace propre associé à la valeur propre -1 : en fait, -1 est devenu 1 dans les calculs...

Beaucoup de candidats disent que « si un produit de matrices $MA = 0$ et que $M \neq 0$, alors on a $A = 0$ ». Lorsqu'ils ont à appliquer un endomorphisme défini par composition, ils font le produit des vecteurs obtenus par chaque endomorphisme de cette décomposition (question 2.a) ; on trouve ainsi très souvent : $L_i(f)(x) = L_i(f(x))$.

Pour une majorité de candidats, on a sans autre forme de procès : « $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = 0$ entraîne $f \circ g = 0$ ». On a l'impression que si on n'est pas dans l'image de f , c'est qu'on est dans le noyau de f ...

La question 3.c) (ii) est peu souvent résolue correctement : la plupart des candidats partent de la décomposition d'un vecteur x suivant la somme directe des images, composent par u_i et restent bloqués !

Cette partie I est celle qui est la plus abordée, le cours relatif à cette partie est assez bien connu dans la plupart des copies et la résolution des questions permet déjà de donner une certaine avance aux candidats rigoureux.

Partie II

Dans la question 4.a), il y a beaucoup de confusions entre matrice orthogonale et matrice d'un projecteur orthogonal.

Les questions d'informatique sont assez souvent traitées, la ligne (5) est fréquemment commentée (question 5.b), mais un certain nombre de candidats ne perçoivent pas bien le rôle joué par la valeur booléenne.

La question 6 se réduit le plus souvent à une énumération des hypothèses dans lesquelles on intercale un « donc » ou un « dès lors » et on donne la conclusion. Lorsqu'il y a un calcul à effectuer, les formats utilisés sont souvent interdits : par exemple, le produit scalaire d'une matrice colonne et d'une matrice carrée !

Dans la question 7, les candidats semblent ne pas voir que $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ne sont pas nécessairement tous non nuls et passent « à côté » de la question.

Excepté la question 9.a), les questions 8 et 9 ne sont presque jamais abordées.

Cette partie II exigeait des candidats une bonne connaissance du cours d'algèbre et un peu d'ingéniosité. On trouve un manque de rigueur, un certain nombre d'incohérences ainsi que

des opérations fantaisistes. Toutefois, il faut noter que les questions de Scilab ont été assez largement abordées et assez souvent bien traitées.

Partie III

Dans cette partie, la question 10 est la plus examinée par les candidats et assez souvent avec succès.

La question 11.a) est assez souvent tentée mais rarement bien traitée ; on trouve très fréquemment : « les H_i dépendent de $G_1, \dots, G_n$ et grâce au théorème de coalition, $H_1, \dots, H_n$ sont indépendantes » !

Les questions suivantes sont rarement abordées et/ou traitées et en général, les candidats passent au début de la question 14.a) (loi de la moyenne empirique).

Cette dernière partie qui concerne les fondements de la statistique inférentielle, est malheureusement très peu présente dans les copies. Lorsque des candidats éprouvent des difficultés, ils ont tendance à « dissenter » en paraphrasant l'énoncé.