Mathématiques Approfondies

Conception ESSEC/HEC Paris

Session 2023

Le sujet

Le sujet s'interesse au **problème des moments** :
Pour un intervalle J de $\mathbb{R}$ et une suite de réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ fixés, trouver une variable aléatoire réelle X vérifiant les trois conditions suivantes :

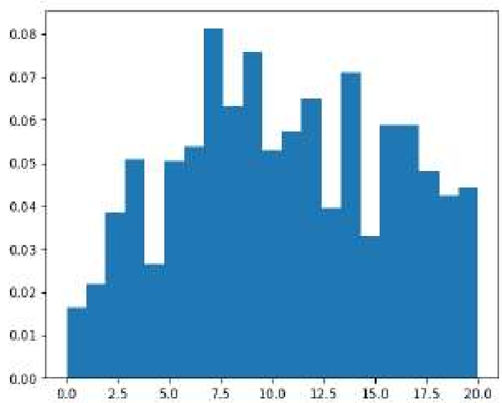
- *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k et $m_k(X) = u_k$.*
- *X admet une densité f, avec $f_{|J}$ continue sur J.*
- $\forall x \in \mathbb{R}\backslash J,\ f(x) = 0.$

L'énoncé comporte trois grandes parties I, II et III. Les parties II et III sont largement indépendantes.

La partie I est un préléminaire pour comprendre le problème. La partie II traite le problème de Stieltjes ($J = \mathbb{R}+$). La partie III traite le problème de Hausdorff ($J = [0, 1]$)

Répartition des notes

count	2441.000000
mean	10.569254
std	5.175903
min	0.000000
25%	6.666667
50%	10.285714
75%	15.000000
max	20.000000



Remarques sur la correction

Sur cette épreuve qui demandait de la réflexion, de la ténacité, de la stratégie, de l'endurance et, bien entendu, une maitrise des nombreuses notions du programme, les correcteurs ont constaté que la plupart des candidats étaient bien préparés. Le mérite en revient aussi à leurs professeurs.

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de grandes qualités de logique et de présentation. Bien sûr, il ya une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 0 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes de cours et de grosses faiblesses en calcul.
A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances et dans leur finesse de raisonnement.

Le jury aimerait insister sur certains points :

- Les questions 1.a) et 1.b) sont assez régulièrement rédigées de manière très compliquées : pourtant pour justifier l'existence des moments d'une loi uniforme sur [0 ;1] il suffit de remarquer que la variable est bornée et d'utiliser le théorème de domination. Pour une loi exponentielle, il suffit de faire intervenir la fonction Gamma. Certaines démonstrations pour 1.b) se déploient sur plus de deux pages entières !

- Question 8 d'informatique : On rencontre beaucoup d'erreurs dans les paramètres des fonctions 'range' qu'il fallait compléter. Le dernier test est souvent écrit 'à l'envers' (if $valp[k] > 0$: return 1) alors qu'on cherche bien à détecter la moindre valeur propre négative, ce qui dénote d'une mauvaise conception du rôle du test, et surtout du mot-clé 'return'.
- Les questions qui concernent la preuve de la convergence d'intégrales impropres sont en moyenne assez bien rédigées, mais on rencontre aussi beaucoup d'imprécisions et d'erreurs : dire que la fonction sinus est positive, intégrer directement l'inégalité $|t^n e^{-t} \sin(t)| \leqslant t^n e^{-t}$ de 0 à $+\infty$, oublier de commencer par citer la continuité des fonctions.
- Les cas d'intégration par parties directes de 0 à $+\infty$ (exclues par le programme) restent heureusement assez rares mais la limite de $A^n e^{-A} \cos(A)$ quand $A \to +\infty$ est correctement rédigée dans un cas sur deux .
- questions 18. et 19. : la preuve de la stricte positivité de l'intégrale est assez rarement traitée de façon correcte.
- question 33.a) : Peu de copies démontrent correctement l'existence des dérivées partielles en passant par le taux d'accroissement et en travaillant correctement avec la valeur absolue.

Erreurs fréquentes

Quelques erreurs à ne pas refaire

- La fonction est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale converge.
- La fonction converge en 0 vers $+\infty$ donc l'intégrale sur sur $[0, +\infty[$ converge.
- La variable suit une loi usuelle donc admet une espérance.
- L'espérance est toujours positive.

Conseils

- Pour les récurences : il faut poser la propriété sous forme mathématique ou sous forme de phrase et ne pas oublier de l'initialiser.
- Comparaison entre $\mathbb{E}(h(X))$ et $h(\mathbb{E}(X))$. Le cours ne donne des résultats immédiats que si h est affine, $h(x) = |x|$ (domination), et h quadratique (Koenig-Huygens). L'inégalité de Jensen est hors-programme
- Simplifiez les fractions avant d'entourer vos résultats.
- Rendez une copie le plus propre possible. Entourez les résultats, soulignez les théorèmes utilisés.