ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 1991

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Exercice 1

L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canoniqur $\mathcal{B} = (i, j, k)$ $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$. On appelle f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est la matrice A suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image du vecteur $u = i + j + 2k$ par l'application f.
   Que peut-on dire du vecteur u pour l'application f?

2. On pose $v = 3j + 2k$ et $\mathcal{B}' = (u, v, k)$

   (a) Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E

   (b) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   Calculer la matrice inverse de P.

   (c) Déterminer la matrice T de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

3. On considère la matrice N suivante :
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer N^2. En déduire N^k si k est un entier supérieur ou égal à 2.

   (b) Calculer $I + N$. Déterminer T^n en fonction de n et de N, puis de n uniquement.

   (c) Montrer que $P.N.P^{-1} = A - I$ et que $P.N^2.P^{-1} = A^2 - 2A + I$

   (d) Donner l'expression de A^n en fonction de n, I, A et A^2.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) dont le terme général est défini par la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \int_0^1 \sqrt[3]{1 - x^n}\,dx = \int_0^1 (1 - x^n)^{1/3}dx$$

1. Calculer u_1.

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.

3. Démontrer que, pour tout réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a:
$$1 - x \leqslant \sqrt[3]{1 - x} \leqslant 1 - \frac{x}{3}$$
   Interpréter graphiquement la double inégalité précédente.

4. En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

5. On considère la fonction f définie par:
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{1 - x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.

(b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y.
Construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonrmé, d'unité 3cm sur chaque axe.

(c) Calculer l'espérance de la variable Y

(d) Calculer la probabilité de l'événement : $(0,488 < Y \leqslant 1,2)$

On rapelle que : $2^9 = 512$.

Problème

Le problème est constitué de deux parties largement indépendantes.
La première partie propose une estimation du paramètre de la loi de Poisson suivie par une variable aléatoire; la seconde partie étudie l'intervalle de temps qui sépare deux réalisations sucessives d'un phénomène aléatoire.

Partie I

La société SA POIN est spécialisée dans la location de camions. La direction pense que le nombre de véhicules loués un jour j donné est une variable aléatoire X_j, que les variables X_j sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi de Poisson de paramètre a inconnu.

1. On considère, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_k définie pour tout x réel positif ou nul par : $f_k(x) = x^k\ e^{-x}$
   On appelle (C_k) la courbe représentative de f_k dans un plan rapporté à un repère orthogonal (O;i,j), l'unité étant 2cm sur l'axe des abscisses, 10cm sur l'axe des ordonnées.

   (a) Construire le tableau des variations de f_k.

   (b) Préciser l'équation de la demi-tangente à la courbe (C_k) au point $O(0,0)$.

   (c) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) sur le même graphique.

2. On considère, pour tous les entiers k et q non nuls, la fonction g définie pour tout x réel positif ou nul par: $g(x) = (f_k(x))^q$.

   (a) Démontrer que g et f_k ont même sens de variation.

   (b) Donner le tableau de variation de g lorsque $k = 8$ et $q = 4$.

3. La société SA POIN relève le nombre de véhicules loués au cours de 4 journées choisies au hasard, soit: 9, 11, 4, 8 pour les jours $j = 1$, $j = 2$, $j = 3$, $j = 4$ respectivement.

   (a) Déterminer la probabilité P_a de l'événement:
   $$(X_1 = 9) \cap (X_2 = 11) \cap (X_3 = 4) \cap (X_4 = 8)$$
   Exprimer P_a en fonction de g_a la fonction définie en 2) b: .

   (b) La direction de la société SA POIN décide de retenir la valeur a qui donne à la probabilité P_a une valeur maximum.
   - Trouver le réel a
   - Calculer alors la probabilité qu'un jour donné, la société SA POIN loue 10 camions.

4. On se propose de généraliser le procédé. On a noté le nombre de locations au cours de n journées cchoisies au hasard, soit:
   x_1, x_2, ..., x_n pour les jours $j = 1$, $j = 2$, ..., $j = n$ respectivement.
   On note m la moyenne arithmétique de ces observations.
   L'entreprise décide toujours de choisir a de telle sorte que la probabilité P_a de l'événement :
   $$E = (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)$$
   soit maximum.

(a) Calculer P_a en fonction de a.

(b) Démontrer que la valeur de a qui maximise P_a est m.

Partie II

La socité SA POIN étudie, pour un jour donné, le temps £T£ exprimé en heures, entre deux locations successives: T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $1/3$.

1. (a) Rappeler l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire T.

   (b) Redémontrer que la fonction de répartition F de la variable aléatoire T est définie par:

   $$F(x) = P(T \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x/3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   (c) En déduire la probabilité (exprimée en fonction du nombre e) que le temps séparant deux locations successives soit, pour ce jour observé, compris entre 1 heure et 2 heures.

2. Soit t un réel positif fixé pour toute la suite du problème. Soit la variable aléatoire Y_t ayant pour fonction de répartition la fonction G_t définie par:

   $$G_t(y) = P(Y_t \leqslant y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geqslant t \\ \dfrac{F(y)}{F(t)} & \text{si } y < t \end{cases}$$

   En déduire une densité de probabilité g_t de la variable Y_t.

3. Soit $Z_1,\ Z_2 \ldots Z_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi que Y_t.
   On pose $S_n = \sup(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

   (a) Démontrer que la fonction de répartition H_t de S_n est définie par:

   $$H_t(s) = (G_t(s))^n$$

   (b) En déduire la densité de probabilité de la variable S_n notée h_t.

4. Soit b un réel positif.

   (a) On pose $p_n(b) = P(|S_n - t| > b)$. Montrer que $p_n(b) = P(S_n < t - b)$.

   (b) Calculer $p_n(b)$.

   (c) Déterminer la limite de $p_n(b)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On définit la variable aléatoire $U_n = n(t - S_n)$. Pour tout réel u, on pose

   $$K_n(u) = P(U_n \leqslant u)$$

   (a) Exprimer $K_n(u)$ en fonction de u.

   (b) Ecrire le développement limité à l'ordre 1 , par rapport à $\dfrac{u}{n}$ quand n tend vers $+\infty$ de $\exp\left(-\dfrac{1}{3}(t - \dfrac{u}{n})\right)$

   (c) On pose $c = \dfrac{\exp(-t/3)}{1 - \exp(-t/3)}$ et on considère un réel u fixé.
   En déduire la limite de $K_n(u)$ lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de u et c.

   (d) On note $K(u)$ cette limite. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire U dont la fonction de répartition est la fonction K ainsi définie.