

# **ECRI COME**

**Banque d'épreuves communes**

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

**option économique**

**MATHÉMATIQUES**

**Année 1993**

**Aucun document n'est autorisé.**

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page  
S.V.P**

## EXERCICE 1

Soit  $x$  un réel strictement positif.

On pose pour tout entier naturel  $n$  :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+x+1}.$$

On se propose d'étudier la limite  $S(x)$  de la somme  $S_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

1. Pour tout entier naturel  $p$ , on pose  $f_p(x) = \begin{cases} \frac{t^{x+p}}{1+t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$  et  $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t) dt$ .

Montrer que, pour tout entier naturel  $p$ , l'intégrale  $I_p(x)$  existe.

2. Montrer que, pour tout réel  $t$  élément de  $[0, 1]$ , on a :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

3. Dédire de ce qui précède que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = S_n(x) + R_n(x) \quad \text{où} \quad R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt.$$

4. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel  $n$  :  $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}$ .

5. Conclure que l'on a :  $S(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ .

6. Etude du cas particulier où  $x = \frac{1}{2}$ .

(a) En utilisant le changement de variable  $u = t^{1/2}$ , calculer  $S(\frac{1}{2})$ .

(On rappelle que  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ).

(b) En déduire que l'on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ .

## EXERCICE 2

Les produits référencés  $X, Y, Z$  se partagent un marché. On note  $x_n, y_n, z_n$  les proportions de consommateurs utilisant respectivement les produits  $X, Y, Z$  au  $n^{\text{ième}}$  mois, où  $n$  est un entier naturel.

On observe les données suivantes :  $x_0 = 0, 1, \quad y_0 = 0, 2, \quad z_0 = 0, 7$ .

Par ailleurs les sondages mensuels ont permis de déterminer les intentions des consommateurs, supposées constantes :

- Utilisant le produit  $X$  un mois donné, respectivement 40 %, 30 %, 30 % des consommateurs ont l'intention d'adopter les produits  $X, Y, Z$  le mois suivant.
- Utilisant le produit  $Y$  un mois donné, respectivement 30 %, 40 %, 30 % des consommateurs ont l'intention d'adopter les produits  $X, Y, Z$  le mois suivant.

- Utilisant le produit  $Z$  un mois donné, respectivement 20 %, 10 %, 70 % des consommateurs ont l'intention d'adopter les produits  $X, Y, Z$  le mois suivant.
1. Exprimer  $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$  en fonction de  $x_n, y_n, z_n$ .
  2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ ;  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ .  
Montrer que l'on a, pour tout entier  $n$ , l'égalité matricielle :  $U_{n+1} = AU_n + B$ .
  3. Déterminer la matrice  $C$  telle que  $C = AC + B$ .
  4. On considère la matrice  $V_n = U_n - C$ ; démontrer, pour tout entier  $n$ , que  $V_n = A^n V_0$ .
  5. (a) Calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ .  
(b) Trouver une matrice  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.  
(c) En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'expression de la matrice  $A^n$ .
  6. En déduire les valeurs  $x_n, y_n$  en fonction de  $n$ .
  7. Calculer  $z_n$  en fonction de  $n$ .
  8. Quelles sont à long terme les proportions des consommateurs utilisant respectivement les produits  $X, Y, Z$  ?

## PROBLEME

**Les deux parties sont indépendantes**

### Première partie

La société ALFDIS étudie à la fin de chaque mois le coût mensuel de gestion de l'article A, lié au nombre  $n$  de centaines d'articles A en stock au début du mois (le stock est dit de niveau  $100n$ ) et au nombre  $k$  de centaines d'articles A demandés pendant ce même mois.

La demande mensuelle de cet article A est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre 5 (en centaines d'articles).

La société estime qu'un article A restant en stock à la fin du mois coûte à l'entreprise 300 francs alors qu'un article A manquant lui coûte 500 francs.

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $p_n = P(X \leq n)$ .
  - (a) Exprimer, pour  $n$  non nul,  $p_n$  et  $\sum_{k=0}^n k.P(X = k)$  en fonction de  $p_{n-1}$  et de  $n$ .
  - (b) En utilisant les probabilités  $p_n$ , calculer les sommes  $u_n$  et  $v_n$  suivantes :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X = k).$$

- (c) Calculer  $u_4$  et  $v_4$  à  $10^{-6}$  près au mieux (on utilisera la table de la page ).
2. Montrer que, pour un stock de niveau  $100n$  et pour une demande mensuelle de  $X = k$  centaines d'articles, le coût  $C_n(k)$  de gestion de l'article A s'écrit :

$$C_n(k) = \begin{cases} 3.10^4.(n - k) & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 5.10^4.(k - n) & \text{si } n < k \end{cases}$$

3. On note  $C_n$  la variable aléatoire prenant les valeurs  $C_n(k)$ .  
Calculer, en fonction de  $n$ , de  $p_{n-1}$  et de  $p_n$ , l'espérance mathématique :

$$E(C_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n(k) \cdot P(X = k).$$

4. Démontrer la relation :  $E(C_{n+1}) - E(C_n) = (8p_n - 5) \cdot 10^4$ .  
5. Trouver la valeur de l'entier naturel  $n$  solution arrondie par excès de l'équation :

$$E(C_{n+1}) = E(C_n).$$

6. En déduire le sens de variation de la suite de terme général  $E(C_n)$ .  
Montrer que  $E(C_5) > E(C_6)$ .  
Conclure quant à l'existence d'un niveau  $100n$  du stock d'articles A qui minimise l'espérance  $E(C_n)$  du coût de gestion de cet article.

## Deuxième partie

La société ALFDIS distribue aussi de l'essence dont la demande est aléatoire. Elle a procédé à une étude des coûts mensuels de gestion de ce produit.

1. On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $t$  par :  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 4 \cdot t \cdot e^{-2t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , d'unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

- (a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Conclure pour la courbe  $\mathcal{C}$ .  
(b) Construire le tableau de variation de  $f$ .  
(c) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion 1 de  $\mathcal{C}$ .  
(d) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
2. Pour tout entier naturel  $p$ , on pose  $I_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-2t} dt$  et pour  $a \geq 0$ ,  $I_p(a) = \int_0^a t^p e^{-2t} dt$ .
- (a) Calculer  $I_0(a)$ .  
(b) Déterminer une relation de récurrence entre  $I_{p+1}(a)$  et  $I_p(a)$ .  
(c) En déduire la valeur de  $I_1(a)$  et de  $I_2(a)$ .  
(d) Prouver que  $I_p$  est une intégrale impropre convergente. Calculer  $I_p$  en fonction de  $p$ .  
(e) Démontrer que la fonction  $f$  est la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $Y$ , dont on déterminera la fonction de répartition  $F$ .  
(f) Les statistiques des ventes de la société permettent de considérer dans toute la suite du problème que la variable aléatoire  $Y$  représente la demande mensuelle, en millions de litres d'essence.  
Déterminer la valeur du moment d'ordre  $p$  de la variable aléatoire  $Y$ . En déduire la demande mensuelle en litre que la société ALFDIS peut espérer, et avec quel écart-type (les valeurs seront arrondies au 100 litres près au mieux).
3. Les services de gestion de la société ALFDIS indiquent que pour un niveau  $s$  de stock d'essence fixé et réalisé en début de mois ( $s$  en millions de litres), le coût de gestion mensuel est une variable  $g_s$  dépendant du nombre aléatoire  $t$  de millions de litres d'essence demandés, et dont la valeur en millions de francs est :

$$g_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 3 \cdot (s - t) & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ 2 \cdot (t - s) & \text{si } t > s \end{cases}$$

On admet que l'espérance du coût mensuel est définie par :  $E(g_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) f(t) dt$ .

- (a) Exprimer  $\int_s^{+\infty} t.f(t)dt$  en fonction de  $E(Y)$  et de  $I_2(s)$  pour  $s \geq 0$ .
- (b) En déduire que l'on a :  $E(g_s) = 5s.F(s) + 2E(Y) - 2s - 20I_2(s)$ .
- (c) Déterminer alors l'expression de  $E(g_s)$  en fonction de  $s$ .

4. On considère la fonction  $\varphi$  définie, pour tout  $s$  positif ou nul, par :

$$\varphi(s) = 5.(s + 1)e^{-2s} + 3.(s - 1).$$

- (a) Déterminer  $\varphi'(s)$  et  $\varphi''(s)$ .
- (b) En déduire que l'équation  $\varphi'(s) = 0$  admet une unique solution  $s_0$ . Donner l'entier naturel  $q$  tel que l'on ait :

$$\frac{q}{10^3} < s_0 < \frac{q+1}{10^3}.$$

- (c) Construire le tableau de variation de la fonction  $\varphi$ .
- (d) Conclure que l'espérance du coût mensuel  $E(g_s)$  admet pour valeur minimale le nombre réel :

$$\frac{6s_0^2}{2s_0 + 1}.$$

Table donnant certaines valeurs des probabilités  $P(X = n)$  et  $p_n = P(X \leq n)$ , si  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre 5

| $n$        | 0         | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $P(X = n)$ | 0,0067379 | 0,0336897 | 0,0842243 | 0,1403739 | 0,1754674 | 0,1754674 | 0,1462228 | 0,1044449 |
| $p_n$      | 0,0067379 | 0,0404277 | 0,1246520 | 0,2650259 | 0,4404933 | 0,6159607 | 0,7621835 | 0,8666283 |