

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES I

Option économique

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

PROBLEME 1

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) &= e^{-\frac{1}{x} x^n} & \text{pour } x > 0 \\ f_n(0) &= 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f_n est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$.
3. Représenter graphiquement la fonction f_n pour $n \neq 0$, et la fonction f_0 .
4. Etudier, suivant les valeurs de n la convergence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.
5. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} , quand ces intégrales convergent et en déduire la valeur de I_n en fonction de n quand I_{n+1} converge.

PROBLEME 2

Soit A l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

1. Soit E le sous-ensemble de A des applications f telles que :

$$\forall n \geq 1 \quad , \quad f(n+1) = af(n) + bf(n-1) \quad \text{relation (i)}$$

où a et b désignent des réels.

- (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de A .
- (b) Soit α et β deux réels quelconques. Montrer qu'il existe une application unique f de A telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$ et vérifiant la relation (i).

2. Soit Φ l'application de E dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$\forall f \in E \quad , \quad \Phi(f) = (f(0), f(1))$$

- (a) Montrer que Φ est une application linéaire.
- (b) Montrer que Φ est bijective.
- (c) Quelle est la dimension de E ?
- (d) Soit $f_1 = \Phi^{-1}[(1, 0)]$ et $f_2 = \Phi^{-1}[(0, 1)]$.
Montrer que $\{f_1, f_2\}$ est une base de E .
Calculer les coordonnées d'une fonction f de E dans cette base.

3. Soit g l'élément de A , défini par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(n) = x^n$, où x est un réel fixé non nul.

- (a) Montrer que g est élément de E si et seulement si x est solution d'une équation du second degré que l'on déterminera.
- (b) Trouver une relation entre a et b pour que cette équation ait 2 solutions distinctes x_1 et x_2 , (que l'on ne calculera pas).
- (c) Cette condition étant vérifiée, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad g_1(n) = x_1^n \quad \text{et} \quad g_2(n) = x_2^n$$

Montrer que $\{g_1, g_2\}$ est une base de E .
Soit f un élément de E . On pose $f = \lambda.g_1 + \mu.g_2$.
Calculer λ et μ en fonction de $f(0)$, $f(1)$, x_1 et x_2 .

PROBLEME 3

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par

$$x_0 = 1 \quad , \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times \quad \begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} - x_{n-1} \end{cases}$$

Soit (z_n) la suite complexe définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = x_n + iy_n$.

- 1. Calculer z_0, z_1, z_2 et z_3 .
- 2. (a) Montrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
(b) En déduire l'expression de z_n en fonction de n .
(c) Donner z_n sous forme trigonométrique.
Exprimer alors x_n et y_n en fonction de n .

3. Soient $A_n = \sum_{k=0}^n z_k$

$$B_n = \sum_{k=0}^n x_k$$

$$C_n = \sum_{k=0}^n y_k$$

Calculer A_n, B_n et C_n en fonction de n .

PROBLEME 4

Un ascenseur dessert le rez-de-chaussée (niveau 0) et les niveaux 1, 2 et 3 d'un immeuble.

Dans la suite du problème on appellera "étage" la distance parcourue par l'ascenseur entre 2 niveaux consécutifs.

On suppose d'autre part :

- que les habitants n'utilisent l'ascenseur que pour se rendre du rez-de-chaussée à leur niveau d'habitation et réciproquement;
- qu'il y a le même nombre d'habitants à chaque niveau et que tous l'utilisent avec la même fréquence;
- que les habitants du rez-de-chaussée ne l'utilisent jamais;
- que l'ascenseur ne peut transporter qu'une personne à la fois;
- que, bien sûr, les habitants utilisent l'ascenseur autant de fois pour monter que pour descendre;
- que lorsqu'on utilise l'ascenseur, celui-ci doit se rendre du niveau où il se trouve au niveau où il est appelé, puis transporter l'habitant à son niveau de destination.

PARTIE A

On s'intéresse dans cette partie uniquement aux descentes des habitants.

Soit n , $0 \leq n \leq 3$ le niveau où se trouve l'ascenseur lorsqu'il est appelé, et p , $1 \leq p \leq 3$, le niveau d'habitation de l'utilisateur.

- a) Donner dans le tableau **1** le nombre d'étages parcourus par l'ascenseur en fonction de n et de p .

n p	0	1	2	3
1				
2				
3				

Tableau 1

- b) Quelles sont les probabilités respectives d_0, d_1, d_2 et d_3 pour que l'ascenseur se trouve aux niveaux 0, 1, 2, 3 lorsqu'on l'appelle?
- c) Soit X_k ($1 \leq k \leq 3$) la variable aléatoire réelle égale au nombre d'étages parcourus par l'ascenseur, pour une utilisation d'un habitant du niveau k .
Donner les lois de probabilités de X_1, X_2 et X_3 , et en déduire les espérances mathématiques $E(X_1), E(X_2), E(X_3)$.
- d) Combien d'étages parcourt en moyenne l'ascenseur, par descente d'un habitant de l'immeuble ?

PARTIE B

On s'intéresse dans cette partie uniquement aux montées des habitants.

- a) n et p ayant la même signification que dans la partie **A**, donner dans le tableau **2** le nombre d'étages parcourus par l'ascenseur en fonction de n et de p .

n p	0	1	2	3
1				
2				
3				

Tableau 2

- b) Soit Y_k : ($1 \leq k \leq 3$) la variable aléatoire égale au nombre d'étages parcourus par l'ascenseur, pour une utilisation d'un habitant du niveau k .
Donner les lois de probabilité de Y_1 , Y_2 et Y_3 .
- c) Combien d'étages parcourt en moyenne l'ascenseur par montée d'un habitant de l'immeuble ?

PARTIE C

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des utilisations de l'ascenseur (montées et descentes des habitants).

- a) Soit Z_k ($1 \leq k \leq 3$) la variable aléatoire réelle égale au nombre d'étages parcourus par ascenseur pour une utilisation d'un habitant du niveau k .
Dédurre des résultats des parties **A** et **B** les lois de probabilité des variables aléatoires Z_1 , Z_2 et Z_3 .
- b) Calculer $E(Z_1)$, $E(Z_2)$, et $E(Z_3)$.
- c) En admettant que le coût d'utilisation de l'ascenseur est proportionnel au nombre d'étages qu'il parcourt, quelle devrait être la répartition équitable des charges annuelles d'ascenseur, par niveau d'habitation, sachant qu'elles s'élèvent à 11 600 F ?