

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1990

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLEME 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n . Pour tout entier $k \in [0; n]$, μ_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \mu_k(t) = t^k$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [0; n]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt$ est convergente .
2. Soit f un élément de E . Montrer qu'on peut définir une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

Cette fonction g dépend de f et est notée $L(f)$.

3. (a) Calculer $L(\mu_0)$, $L(\mu_1)$, $L(\mu_2)$.
(b) Montrer que, pour tout entier $k \in [0, n-1]$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.
En déduire $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j$.
(c) Montrer que, pour tout élément f de E , $L(f)$ appartient à E .

On considère l'application $L : f \mapsto L(f)$ de E vers E .

4. (a) Montrer que L est une application linéaire et injective.
(b) Ecrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_k)_{0 \leq k \leq n}$.
Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} (on pourra utiliser 3. b.).
5. (a) Soient λ une valeur propre de L , et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ .
Montrer que λ est non-nul et que, pour tout réel x , $(1 - \lambda)f(x) = \lambda f'(x)$.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} f(x)$.
Montrer que φ est constante.

- (b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L . Es-t-ce que L est diagonalisable ?

PROBLEME 2

N.B. La partie C est largement indépendante des parties A et B.

$\ln$ désigne le logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on note $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

Partie A : Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2n^2}$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Partie B : Expression Intégrale de γ .

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ existe, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \right) dx$ existe.
2. (a) Montrer que, pour tout $t \in]-1, +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$.
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in [0, n], \quad \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \leq e^{-x}$.
(c) Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : [0; \sqrt{n}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_n(x) = x + n \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right) - \ln \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)$$

- (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in [0; n], \quad \left(1 - \frac{x^2}{n} \right) e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers I .
4. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ existent et sont égales.

On note $J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $J_n = \int_1^n \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n dx$.

5. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge vers J .
6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, l'intégrale $K_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx$ existe.
(b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
7. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $I_n - J_n = K_n - \ln n$.
(b) En déduire $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx = \gamma$.

Partie C : Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

On utilise ici le résultat de la question B7b :

$$\gamma = I - J \quad \text{où} \quad I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

1. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$\sum_{\ell=0}^{2n-1} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)} \leq I \leq \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)}$$

puis

$$-\frac{1}{(2n)!2n} \leq I - \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)} \leq 0.$$

- (c) Donner une valeur approchée de I à $0,5 \cdot 10^{-3}$ près.

2. (a) Montrer : $\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \leq \frac{e^{-x}}{x}.$

- (b) Vérifier que le réel $x_0 = 7$ satisfait l'inégalité : $\frac{e^{-x_0}}{x_0} < 0,25 \cdot 10^{-3}.$

- (c) On admet que $\int_1^7 \frac{e^{-y}}{y} dy$ vaut $0,2193$ à $0,25 \cdot 10^{-3}$ près .

Donner une valeur approchée de J à $0,5 \cdot 10^{-3}$ près.

- (d) Conclure.