Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2003

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 5 mai 2003 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère l'application $\varphi : [0\,;+\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{1} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t.$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Montrer que φ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale J_n existe.

***2*. a.** Montrer que φ est strictement positive sur $[0\,;1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.

b. Établir, pour tout réel $t \in \,]0\,;+\infty[$: $|\varphi(t)| < 1$.

***3*. a.** Montrer, pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$: $\varphi(t) \geqslant 1 - t$.

(On pourra étudier les variations sur $[0\,;+\infty[$ de l'application $t \longmapsto \sin t - t + t^2$).

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$: $J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1

1.a. Montrer, pour tout réel $x \in [1\,;+\infty[$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

2.a. Montrer, pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$:

$$|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big).$$

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

c. Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n pour $n \geqslant 2$

1.a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale K_n est convergente.

b. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$: $|K_n| \leqslant \dfrac{1}{n-1}$ ·

2.a. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

b. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ converge ; on note ℓ sa limite.

c. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a \in]0\,;1[$:

$$\int_0^a \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \leqslant a \quad \text{et} \quad \int_a^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \leqslant (1-a)\big(\varphi(a)\big)^n.$$

(On pourra utiliser ***I.2.***).

d. En déduire, pour tout réel $a \in]0\,;1[$: $0 \leqslant \ell \leqslant a$, et conclure : $\ell = 0$.

3.a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n est convergente.

b. Établir : $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n, $n \geqslant 2$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

2. En déduire, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{p=1}^{N} \big(I_{2p} + I_{2p+1}\big) \geqslant \sum_{p=1}^{N} \big(J_{2p} + J_{2p+1}\big).$$

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser ***I.3.b.***).

SECOND PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle\, .\,,\, .\,\rangle$ et la norme associée est notée $\|\,.\,\|$.

On note id_E l'application identique de E, et $\widetilde{0}$ l'application nulle de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.
Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F.

Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f, on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x)\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, f(y) \rangle.$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.

2.a. Soient λ et μ deux valeurs propres de f.
Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda\langle x\,,\, y \rangle = \mu\langle x\,,\, y \rangle.$$

b. En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ avec $k \geqslant 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4. Soit x un vecteur de E.

a. Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0,\ x_1, \ldots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$.

b. Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $p_j(x) = x_j$.

Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$\mathrm{id}_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k.$$

5.a. Etablir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Rightarrow \ p_i \circ p_j = \widetilde{0}.$$

b. Montrer : $$f = \lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 + \cdots + \lambda_k\, p_k.$$

c. Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\operatorname{Im} f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \dfrac{1}{\lambda_1}p_1 + \dfrac{1}{\lambda_2}p_2 + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_k}p_k$.

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6. a. Montrer : $\quad f \circ f^\sharp = p$.

b. En déduire : $\quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \Big(f(x) = p(y) \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$.

7. Soit y un vecteur de E.

a. Montrer : $\quad \forall x \in E, \quad \Big(\| f(x) - y \| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \| f(z) - y \| \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$.

b. En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\| f(x) - y \| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \| f(z) - y \|.$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2. Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.
On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer : $\quad A = 2M_1 + 4M_2$.

4. a. Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b. Montrer : $\quad \forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x , v_2 \rangle v_2$.

c. Déterminer la matrice M_2.

5. En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.