MATHÉMATIQUES 2S (ÉPREUVE n° 283)
ANNÉE 2015
Épreuve conçue par CCIR
Voie économique et commerciale

Le sujet

L'objet du problème de cette année était l'étude d'une mesure de risque encouru par les établissements financiers dans le choix de leurs investissements : il est en effet nécessaire de retrancher à la valeur moyenne attendue des investissements – qui est en quelque sorte une espérance mathématique pure – un terme correctif d'autant plus important que le risque est grand.
Cette « espérance corrigée » qui prend en compte cette notion de risque est déterminée à partir d'une « fonction de distorsion » et doit posséder les propriétés requises pour une évaluation cohérente de risques financiers, en particulier une propriété de sous-additivité nécessaire pour valoriser équitablement les avantages éventuels de la diversification.

Dans la partie I, on établissait une relation entre la fonction de surpassement d'une variable aléatoire X, définie par $S_X(x) = P([X > x])$, et l'espérance $E(X)$ de cette variable dans le cas où X est à densité et dans celui où X est discrète à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels.

La partie II était consacrée à l'étude d'un exemple de fonction de distorsion conduisant à la mesure de risque dite de Wang (2002). Cette étude utilisait un certain nombre d'outils d'analyse ainsi que les propriétés de la fonction de répartition de la loi normale et de sa bijection réciproque et incluait une sous-partie formée d'un certain nombre de questions de Scilab.

Dans la partie III, on démontrait la propriété de sous-additivité des fonctions de distorsion pour des variables aléatoires bornées et à valeurs positives. Cette partie, la plus difficile, nécessitait entre autres de solides connaissances en probabilités et la maîtrise de la notion de concavité d'une fonction réelle.

Les résultats statistiques

La note moyenne des 3296 candidats ayant participé à cette épreuve s'établit à 10,26 avec un écart-type de 4,78.
Un peu plus de 37% des candidats obtiennent une note supérieure à 12 et environ 15% de l'ensemble des candidats se voient attribuer une note supérieure à 16 ; enfin, 1,9% de candidats, soit une soixantaine, se situent entre 19 et 20, et parmi ceux-ci, 42 obtiennent la note maximale de 20.
Le barème de notation accordait aux trois parties du problème les poids respectifs de 38%, 28% et 34%.
Les meilleures copies réalisent près des deux-tiers du problème, c'est-à-dire les deux premières parties.

Les résultats par école sont les suivants :

- HEC (2346 candidats) - moyenne : 11,69 ; écart-type : 4,46.
- ESCP Europe (2568 candidats) – moyenne : 11,44 ; écart-type : 4,44.

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Globalement, l'examen des copies montre que les candidats ont poursuivi leur progression en algèbre linéaire mais que ces progrès se font surtout au détriment de l'analyse et dans une moindre mesure, des probabilités.

1.b) L'essentiel de cette question réside dans l'interprétation d'un graphique et les résultats se sont révélés « calamiteux », même dans d'excellentes copies !! On note environ 10% de très bonnes réponses.
3.a) On trouve : « *Comme X est une variable aléatoire à densité, alors elle admet une espérance* ».
3.b) Beaucoup de difficultés à trouver un équivalent. De plus, la conclusion « $S_X(x)$ *est équivalent à 0* » revient régulièrement.
4.b) La question de la continuité à droite est assez peu abordée et cette notion n'est presque jamais comprise.
5.b) Beaucoup de confusions concernant la convergence de l'intégrale demandée.
7.a) « *Comme* $w_\alpha(0) = 0$, *alors* w_α *est continue en 0 puisque les fonctions constantes sont continues* ».
7.c) Presqu'aucun candidat ne justifie correctement la dérivabilité de w_α.
En dérivant par rapport à x, des candidats écrivent $(\Psi(x)- \Psi(\alpha))' = \Psi'(x)- \Psi'(\alpha)$ avant de préciser que $\Psi'(\alpha) = 0$ puisque α est une constante.
7.e) Certains candidats trouvent que $w_\alpha(\alpha) = 0$.
9.a) Le format matriciel de la variable p donne lieu à des réponses quelque peu fantaisistes.
11. Des candidats ne font aucune différence entre *espérance* et *espérance corrigée*. On lit également que si X est une variable aléatoire certaine, alors $E(X) = 1$.
14. L'encadrement qui définit la partie entière est rarement connu.