Concours ESCP 2024, correction

ECT2 *23/24*

EXERCICE 1

1. (a) Pour tout t de $]0,+\infty[$, on a :

$$\boxed{h'(t)=\frac{-1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}.}$$

Remarque : l'énoncé sous-entend que la fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ c'est la raison pour laquelle nous n'avons pas justifié la dérivabilité; mais il n'est pas difficile de le faire : la fonction $t\longmapsto -\sqrt{t}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]-\infty,0[$, ensemble sur lequel la fonction exponentielle est dérivable. Donc, par composition, la fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$.

(b) Pour tout y de $]0,+\infty[$, on a (*cf* question précédente pour l'obtention d'une primitive) :

$$\int_0^y g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^y \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\right]_0^y=-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}-\left(-\mathrm{e}^{-\sqrt{0}}\right)=-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}+\mathrm{e}^0=-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}+1.$$

On a obtenu :

$$\boxed{\int_0^y g(t)\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}+1.}$$

Remarque : on sort du cadre usuel de la ECT ici car la fonction h n'est pas continue par morceaux, en effet :

$$\lim_{t\to 0^+} g(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}=+\infty$$

car $\lim\limits_{t\to 0^+}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}=1$ (par composition) et $\lim\limits_{t\to 0^+}2\sqrt{t}=0$ par valeurs supérieures.
Ce qui fait que la démarche précédente n'amène «pas de problème» est que l'on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^y \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\right]_\varepsilon^y=\lim_{\varepsilon\to 0^+}-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}-\left(-\mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon}}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon}}=-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}+1.$$

2.
   - Pour tout t de $]-\infty,0]$, on a : $f(t)=\mathrm{e}^t>0$ et, pour tout t de $]0,+\infty[$, on a : $f(t)=0\geq 0$. Donc, pour tout t de $\mathbb{R}$, on a : $f(t)\geq 0$.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de 0 (car coïncide avec la fonction exponentielle -qui est continue sur $\mathbb{R}$- sur $]-\infty,0[$ et constante sur $]0,+\infty[$).
   - Comme la fonction f est nulle sur $]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, auquel cas, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Or, pour tout B de $]-\infty,0[$, on a :
   $$\int_B^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_B^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\left[\mathrm{e}^t\right]_B^0=\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^B=1-\mathrm{e}^B.$$
   Comme $\lim\limits_{B\to-\infty}\mathrm{e}^B=0$, on a : $\lim\limits_{B\to-\infty}1-\mathrm{e}^B=1$, ce qui permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que l'on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=1$.
   Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

   Avec les trois points précédents, on peut conclure que :

$$\boxed{f\text{ peut être considérée comme une densité de probabilité.}}$$