

CONCOURS ESCP 2024, CORRECTION

ECT2

23/24

EXERCICE 1

1. (a) Pour tout t de $]0, +\infty[$, on a :

$$h'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}.$$

Remarque : l'énoncé sous-entend que la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ c'est la raison pour laquelle nous n'avons pas justifié la dérivabilité; mais il n'est pas difficile de le faire : la fonction $t \mapsto -\sqrt{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]-\infty, 0[$, ensemble sur lequel la fonction exponentielle est dérivable. Donc, par composition, la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout y de $]0, +\infty[$, on a (cf question précédente pour l'obtention d'une primitive) :

$$\int_0^y g(t) dt = \int_0^y \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt = \left[-e^{-\sqrt{t}} \right]_0^y = -e^{-\sqrt{y}} - \left(-e^{-\sqrt{0}} \right) = -e^{-\sqrt{y}} + e^0 = -e^{-\sqrt{y}} + 1.$$

On a obtenu :

$$\int_0^y g(t) dt = -e^{-\sqrt{y}} + 1.$$

Remarque : on sort du cadre usuel de la ECT ici car la fonction h n'est pas continue par morceaux, en effet :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} = +\infty$$

car $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\sqrt{t}} = 1$ (par composition) et $\lim_{t \rightarrow 0^+} 2\sqrt{t} = 0$ par valeurs supérieures.

Ce qui fait que la démarche précédente n'amène «pas de problème» est que l'on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^y \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-e^{-\sqrt{t}} \right]_{\varepsilon}^y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -e^{-\sqrt{y}} - \left(-e^{-\sqrt{\varepsilon}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -e^{-\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{\varepsilon}} = -e^{-\sqrt{y}} + 1.$$

2. • Pour tout t de $]-\infty, 0]$, on a : $f(t) = e^t > 0$ et, pour tout t de $]0, +\infty[$, on a : $f(t) = 0 \geq 0$.
Donc, pour tout t de \mathbb{R} , on a : $f(t) \geq 0$.

• La fonction f est continue sur \mathbb{R} éventuellement privé de 0 (car coïncide avec la fonction exponentielle -qui est continue sur \mathbb{R} - sur $]-\infty, 0[$ et constante sur $]0, +\infty[$).

• Comme la fonction f est nulle sur $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ converge, auquel cas, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt$.

Or, pour tout B de $]-\infty, 0[$, on a :

$$\int_B^0 f(t) dt = \int_B^0 e^t dt = [e^t]_B^0 = e^0 - e^B = 1 - e^B.$$

Comme $\lim_{B \rightarrow -\infty} e^B = 0$, on a : $\lim_{B \rightarrow -\infty} 1 - e^B = 1$, ce qui permet de conclure que l'intégrale

$\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ converge et que l'on a : $\int_{-\infty}^0 f(t) dt = 1$.

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Avec les trois points précédents, on peut conclure que :

f peut être considérée comme une densité de probabilité.

3. (a) Supposons $x \geq 0$. On a alors :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \underbrace{\int_0^x 0 dt}_{=0}.$$

Or, dans la question précédente, on a vu que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ était convergente et égale à 1. On a donc bien, dans le cas $x \geq 0$:

$$\boxed{F_X(x) = 1.}$$

(b) Traitons le cas $x < 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^x e^t dt \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^x e^t dt \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} [e^t]_B^x \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} e^x - e^B \\ &= e^x. \end{aligned}$$

On a obtenu, dans le cas $x < 0$:

$$\boxed{F_X(x) = e^x.}$$

Remarque : on a finalement, pour tout x de \mathbb{R} , $F_X(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

4. (a) On a, pour tout x de \mathbb{R} :

$$G(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - F_X(-x).$$

On a obtenu, pour tout x de \mathbb{R} :

$$\boxed{G(x) = 1 - F_X(-x).}$$

(b) Soit x un réel. D'après la remarque de la fin de la question 3., on a :

$$F_X(-x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } -x < 0 \\ 1 & \text{si } -x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

D'où, d'après la question précédente :

$$G(x) = 1 - F_X(-x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 1 - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Par conséquent, G coïncide avec la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, donc :

$$\boxed{-X \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

(c) • D'après la question précédente, $-X$ admet une espérance, donnée par : $E(-X) = \frac{1}{1} = 1$.
On en déduit, par linéarité de l'espérance, que l'on a :

$$-E(X) = 1$$

donc :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance, donnée par : } E(X) = -1.}$$

- D'après la question précédente, $-X$ admet une espérance, donnée par : $V(-X) = \frac{1}{1^2} = 1$.
Or :

$$V(-X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$$

donc :

$$\boxed{X \text{ admet une variance, donnée par : } V(X) = 1.}$$

5. (a) D'après la formule de Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. D'où, avec la définition de Y et la question précédente :

$$E(Y) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + (-1)^2 = 2.$$

On a obtenu que :

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance, donnée par : } E(Y) = 2.}$$

- (b) Il est clair que $\underbrace{Y}_{=X^2}$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$. On en déduit que, pour tout y de $] -\infty, 0[$, on a :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\emptyset) = 0.$$

De plus :

$$F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(X^2 \leq 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0 \quad (\text{car } X \text{ est une variable aléatoire à densité}).$$

Il nous reste à traiter le cas $y > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{y}) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } t \mapsto \sqrt{t} \text{ sur } [0, +\infty[) \\ &= P(|X| \leq \sqrt{y}) \\ &= P(-X \leq \sqrt{y}) \quad (*) \\ &= G(\sqrt{y}) \\ &= 1 - e^{-\sqrt{y}} \quad (\text{car } \sqrt{y} > 0). \end{aligned}$$

Détail de (*) : une densité de X est f qui est nulle sur $]0, +\infty]$, donc on peut supposer que X est à valeurs dans $] -\infty, 0]$, c'est-à-dire à valeurs négatives.

Finalement :

$$\boxed{F_Y \text{ est la fonction définie, pour tout } y \text{ de } \mathbb{R}, \text{ par } F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases} .}$$

Remarque : on peut aussi conclure en constatant que l'on a :

$$F_Y(y) = \dots = P(-X \leq \sqrt{y}) = P(X \geq -\sqrt{y}) = 1 - F_X(-\sqrt{y}) = 1 - e^{-\sqrt{y}} \quad (-\sqrt{y} < 0)$$

- (c) Vu sa définition, la fonction F_Y est dérivable sur \mathbb{R} éventuellement privé de 0 (cf question 1.(a) pour la dérivabilité $y \mapsto e^{-\sqrt{y}}$ donc de f sur $]0, +\infty[$). La fonction F_Y est donc continue sur \mathbb{R} éventuellement privé de 0 et comme :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} F_Y(y) &= \lim_{y \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} F_Y(y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} 1 - e^{-\sqrt{y}} = 1 - 1 = 0 \\ F_Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

la fonction F_Y est aussi continue en 0.

Remarquons que, pour tout y de \mathbb{R}^* , on a :

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 0 - \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases} .$$

Donc la fonction F'_Y est continue sur \mathbb{R} éventuellement privé de 0 (la fonction $y \mapsto e^{-\sqrt{y}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car dérivable et la continuité de F_Y sur $]0, +\infty[$ en découle par quotient).

On peut donc conclure que :

Y est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de Y est la fonction g .

EXERCICE 2

1. (a) Commençons par expliciter A^2 . On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+1+2 & 3+3+2 & 3+1+4 \\ 3+3+2 & 1+9+2 & 1+3+4 \\ 6+2+8 & 2+6+8 & 2+2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$A^2 - 8A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 8 & 8 \\ 8 & 24 & 8 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Or, avec $a = -12$, on a :

$$aI = -12 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

donc :

$$\boxed{\text{avec } a = -12, \text{ on a : } A^2 - 8A = aI.}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} A^2 - 8A &= -12I & \text{d'où } A(A - 8I) &= -12I \\ & & \text{d'où } \frac{-1}{12}A(A - 8I) &= I \\ & & \text{d'où } A\left(\frac{-1}{12}(A - 8I)\right) &= I. \end{aligned}$$

Donc A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \frac{-1}{12}(A - 8I) = \frac{-1}{12} \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

On a obtenu que :

$$\boxed{A \text{ est inversible, d'inverse } A^{-1} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après la question (a), on a : $A^2 - 8A + 12I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, donc le polynôme $X^2 - 8X + 12$ est annulateur de A . Les racines de ce polynôme sont donc les valeurs propres possibles de A . Déterminons les :

Le polynôme $X^2 - 8X + 12$ est de discriminant :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 64 - 48 = 16 > 0$$

donc il admet deux racines qui sont :

$$\frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Finalement, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } 2 \text{ et } 6.}$$

2. (a) Pour tous réels x et y , avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
 AX = 6X &\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 3x + y + 2 \\ x + 3y + 2 \\ 2x + 2y + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 12 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 3x + y + 2 = 6x \\ x + 3y + 2 = 6y \\ 2x + 2y + 8 = 12 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3x + y + 2 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3x + y = -2 \\ x - 3y = -2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - 3y = -2 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -3x + y = -2 & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -8y = -8 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ 8y = 8 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - 3y = -2 \\ y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - 3 = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

l'équation $AX = 6X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ (avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) admet une unique solution qui est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) On a :

$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$
--

et :

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$
--

(c) D'après la question (a), on a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et d'après la question précédente, on a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme de plus les matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas nulles, on en déduit que la ma-

trice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre 6 et la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre 2.

En particulier les réels 2 et 6 sont des valeurs propres de A . Comme ce sont les seules possibles (cf question 1.(c)), on peut conclure que :

les valeurs propres de A sont 2 et 6.

3. (a) • On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+2 & 1-3+2 & 1+1-2 \\ 1-1+0 & 1+3+0 & 1-1-0 \\ 2+0-2 & 2-0-2 & 2+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a obtenu :

$$PQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

• D'après le point précédent, on a : $PQ = 4I$, donc : $\frac{1}{4}PQ = 4I$, donc :

$$P \left(\frac{1}{4}Q \right) = I$$

ce qui permet de conclure que :

$$P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) • On a :

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et :

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

• D'après le point précédent, on a : $AP = PD$. Comme la matrice P est inversible (cf question (a)) et la matrice D est diagonale, on peut conclure que :

la matrice A est diagonalisable.

- (c) Notons P_n la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$ » et montrons par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} , P_n est vraie.

Initialisation :

On a :

$$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Soit n un élément de \mathbb{N} . Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned} PD^{n+1}P^{-1} &= PDD^nP^{-1} \\ &= APD^nP^{-1} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= AA^n \quad (\text{car } P_n \text{ est vraie}) \\ &= A^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie (lorsque P_n l'est).

Conclusion :

Pour tout n de \mathbb{N} , P_n est vraie, c'est-à-dire que, pour tout n de \mathbb{N} , on a :

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}.}$$

- (d) Soit n un élément de \mathbb{N} . On a :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{d'après la question (a)}) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{car } D \text{ est diagonale}) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 6^n & 6^n \\ 2^n & -3 \cdot 2^n & 2^n \\ 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 2^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6^n + 2^n + 2 \cdot 2^n & 6^n - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n & 6^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \\ 6^n - 2^n & 6^n + 3 \cdot 2^n & 6^n - 2^n \\ 2 \cdot 6^n - 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 6^n - 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 6^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6^n + 3 \cdot 2^n & 6^n - 2^n & 6^n - 2^n \\ 6^n - 2^n & 6^n + 3 \cdot 2^n & 6^n - 2^n \\ 2 \cdot 6^n - 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 6^n - 2 \cdot 2^n & 2 \cdot 6^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(6^n + 3 \cdot 2^n) & \frac{1}{4}(6^n - 2^n) & \frac{1}{4}(6^n - 2^n) \\ \frac{1}{4}(6^n - 2^n) & \frac{1}{4}(6^n + 3 \cdot 2^n) & \frac{1}{4}(6^n - 2^n) \\ \frac{1}{4}(2 \cdot 6^n - 2 \cdot 2^n) & \frac{1}{4}(2 \cdot 6^n - 2 \cdot 2^n) & \frac{1}{4}(2 \cdot 6^n + 2 \cdot 2^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc la dernière colonne de la matrice A^n est égale à :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(6^n - 2^n) \\ \frac{1}{4}(6^n - 2^n) \\ \frac{1}{4}(2 \cdot 6^n + 2 \cdot 2^n) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2}((3 \times 2)^n - 2^n) \\ \frac{1}{2^2}((3 \times 2)^n - 2^n) \\ \frac{1}{2^2}(2 \cdot (3 \times 2)^n + 2 \cdot 2^n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2}(3^n \times 2^n - 2^n) \\ \frac{1}{2^2}(3^n \times 2^n - 2^n) \\ \frac{1}{2^2}(2 \times 3^n \times 2^n + 2 \cdot 2^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{2^n}{2^2} (3^n - 1) \\ \frac{2^n}{2^2} (3^n - 1) \\ \frac{2^n}{2^2} (2 \cdot 3^n + 2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-2} (3^n - 1) \\ 2^{n-2} (3^n - 1) \\ 2^{n-2} (2(3^n + 1)) \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 2(3^n + 1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a bien obtenu que, pour tout n de \mathbb{N} , la dernière colonne de A^n vaut :

$$2^{n-2} \begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 2(3^n + 1) \end{pmatrix}.$$

4. (a) Le premier jour, Lucile lit un livre de dinosaures. Donc :

$$X_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ p_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(C_1) \\ P(P_1) \\ P(D_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements (C_n, P_n, D_n) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\
&= P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(C_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(C_{n+1}) \\
&= c_n \times \frac{1}{2} + p_n \times \frac{1}{6} + d_n \times \frac{1}{6} \quad (*) \\
&= \frac{3}{6}c_n + \frac{1}{6}d_n + \frac{1}{6}d_n.
\end{aligned}$$

Détail de (*) : sachant que le jour n Lucile lit un livre de chevaux, la probabilité qu'elle lise un livre de chevaux le jour $n + 1$ est $\frac{1}{2}$, d'où : $P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Sachant que le jour n Lucile lit un livre de princesses, la probabilité qu'elle lise un livre de chevaux le jour $n + 1$ est $\frac{1}{6}$, d'où : $P_{P_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{6}$.

Sachant que le jour n Lucile lit un livre de dinosaures, la probabilité qu'elle lise un livre de chevaux le jour $n + 1$ est $\frac{1}{6}$, d'où : $P_{D_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{6}$.

La formule des probabilités totales, utilisée avec le même système complet d'événements, permet aussi d'obtenir :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(P_{n+1}) \\
&= P(C_n) \times P_{C_n}(P_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(P_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(P_{n+1}) \\
&= c_n \times \frac{1}{6} + p_n \times \frac{1}{2} + d_n \times \frac{1}{6} \quad (**) \\
&= \frac{1}{6}c_n + \frac{3}{6}d_n + \frac{1}{6}d_n
\end{aligned}$$

détail de (**): justification similaire à celle donnée plus haut

et encore :

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= P(D_{n+1}) \\
 &= P(C_n) \times P_{C_n}(D_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(D_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) \\
 &= c_n \times \frac{1}{3} + p_n \times \frac{1}{3} + d_n \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2}{6}c_n + \frac{2}{6}d_n + \frac{4}{6}d_n.
 \end{aligned}$$

Déduisons-en l'égalité souhaitée. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6}AX_n &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3c_n + p_n + d_n \\ c_n + 3p_n + d_n \\ 2c_n + 2p_n + 4d_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(3c_n + p_n + d_n) \\ \frac{1}{6}(c_n + 3p_n + d_n) \\ \frac{1}{6}(2c_n + 2p_n + 4d_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{6}c_n + \frac{1}{6}d_n + \frac{1}{6}d_n \\ \frac{1}{6}c_n + \frac{3}{6}d_n + \frac{1}{6}d_n \\ \frac{2}{6}c_n + \frac{2}{6}d_n + \frac{4}{6}d_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ p_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} \quad (\text{d'après ce que l'on vient de voir}) \\
 &= X_{n+1}.
 \end{aligned}$$

On a bien obtenu, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$X_{n+1} = \frac{1}{6}AX_n.$$

Remarque : en toute rigueur on devrait traiter le cas $n = 1$ à part (car $P(C_1) = P(P_1) = 0$). Vérifions que le résultat obtenu est encore valable dans ce cas.

Comme le premier jour Lucile lit un livre de dinosaure, vu le protocole de l'expérience aléatoire, on a :

$$X_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ p_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(C_2) \\ P(P_2) \\ P(D_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\frac{1}{6}AX_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc : $X_2 = \frac{1}{6}AX_1$, c'est-à-dire que le résultat obtenu plus haut est bien valable dans le cas $n = 1$.

- (c) Notons Q_n la propriété « $X_n = \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1$ » et montrons par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N}^* , Q_n est vraie.

Initialisation :

On a :

$$\frac{1}{6^{1-1}}A^{1-1}X_1 = \frac{1}{1}IX_1 = X_1.$$

Donc Q_1 est vraie.

Hérédité :

Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Supposons que Q_n est vraie et montrons que Q_{n+1} est vraie.
On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{6}AX_n \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \frac{1}{6}A\left(\frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1\right) \quad (\text{car } Q_n \text{ est vraie}) \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{6^{n-1}}AA^{n-1}X_1 \\ &= \frac{1}{6^{1+n-1}}A^nX_1 \\ &= \frac{1}{6^n}A^nX_1. \end{aligned}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion :

Pour tout n de \mathbb{N}^* , Q_n est vraie, c'est-à-dire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$\boxed{X_n = \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1.}$$

(d) • Soit n un élément de \mathbb{N}^* . On a :

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1 \quad (\text{cf question précédente}) \\ &= \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{d'après la question (a)}) \\ &= \frac{1}{6^{n-1}} \cdot 2^{n-1-2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \\ 2(3^{n-1} + 1) \end{pmatrix} \quad (*) \\ &= \frac{2^{n-1}}{6^{n-1}} \cdot 2^{-2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \\ 2(3^{n-1} + 1) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \\ 2(3^{n-1} + 1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \\ 2(3^{n-1} + 1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3^{n-1} - 1) \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3^{n-1} - 1) \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 2 \cdot (3^{n-1} + 1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 3^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 3^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 2 \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 3^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \times 3\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{3} \times 3\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 2 \left(\left(\frac{1}{3} \times 3\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 1^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 2 \left(1^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 2 \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Détail de (*) : le produit $A^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est égal à la dernière colonne de la matrice A^{n-1} , donc est égal à $2^{n-1-2} \begin{pmatrix} 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \\ 2(3^{n-1} + 1) \end{pmatrix}$ d'après la question 3.(d).

De plus, $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix}$, donc :

$$d_n = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}} \right).$$

- On a : $3 > 1$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n-1} = +\infty$. On en déduit (par somme et inverse) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{3^{n-1}} = 1$$

donc, avec le point précédent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}} \right) = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 3

Partie I)

1. (a) Les numéros pairs de l'urne sont : $2, 4, \dots, 2N$; c'est-à-dire :

$$2 \times 1, 2 \times 2, \dots, 2 \times N.$$

On a donc :

$$\text{card}([1, N]) = N \text{ numéros pairs dans l'urne.}$$

(b) • La variable aléatoire X est le numéro de la bille obtenue lors d'un tirage au hasard dans une urne qui contient des billes numérotées de 1 à n , donc :

$$X \text{ suit la loi uniforme sur } [1, n].$$

On en déduit que :

$$X \text{ admet une espérance et une variance données par : } E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

• La variable aléatoire Y prend les valeurs 0 et 1. De plus, d'après la question précédente, on a :

$$P(Y = 0) = \frac{N}{n} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Donc, comme la famille $([Y = 0], [Y = 1])$ est un système complet d'événements :

$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent :

$$Y \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.$$

On en déduit que :

$$Y \text{ admet une espérance et une variance données par : } E(Y) = \frac{1}{2} \text{ et } V(Y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. On peut compléter le programme Python de la façon suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def jeu_1(N):
    n=2*N
    X= rd.randint(1,n+1)
    Y= rd.randint(0,2)
    return X+Y
```

Remarque : ce qui fait que ce programme est correct est que la loi uniforme sur $[0, 1]$ est «la même chose» que la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

3. Comme il y a remise de la bille tirée lors du premier tirage avant de procéder au deuxième tirage (et que X est relative au premier tirage uniquement et Y relative au deuxième tirage uniquement) :

$$\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$

4. Les valeurs prises par X sont $1, 2, 3, \dots, n$. Les valeurs prises par Y sont 0 et 1 . Comme X et Y sont indépendantes, les valeurs prises par $X + Y$ sont :

$$1 + 0, 1 + 1, 2 + 0, 2 + 1, 3 + 0, 3 + 1, \dots, n + 0, n + 1$$

c'est-à-dire :

$$1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots, n, n + 1.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par } X + Y \text{ est } \llbracket 1, n + 1 \rrbracket.}$$

5. (a) • Comme on peut le constater dans la question précédente, l'événement $[X + Y = 1]$ est réalisé, si et seulement si, les événements $[X = 1]$ et $[Y = 0]$ le sont. On en déduit :

$$\begin{aligned} P(X + Y = 1) &= P([X = 1] \cap [Y = 0]) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 0) \quad (\text{par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{P(X + Y = 1) = \frac{1}{2n}.}$$

- A nouveau à partir de la question précédente, on obtient que l'événement $[X + Y = n + 1]$ est réalisé, si et seulement si, les événements $[X = n]$ et $[Y = 1]$ le sont. On en déduit :

$$\begin{aligned} P(X + Y = n + 1) &= P([X = n] \cap [Y = 1]) \\ &= P(X = n) \times P(Y = 1) \quad (\text{par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)) \\ &= \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{P(X + Y = n + 1) = \frac{1}{2n}.}$$

- (b) Comme $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ (cf question 1.(b)), la famille $([X = 1], [X = 2], \dots, [X = n])$ est un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned} &P(X + Y = k) \\ &= P([X = 1] \cap [X + Y = k]) + P([X = 2] \cap [X + Y = k]) + \dots + P([X = n] \cap [X + Y = k]) \\ &= P([X = 1] \cap [1 + Y = k]) + P([X = 2] \cap [2 + Y = k]) + \dots + P([X = n] \cap [n + Y = k]) \quad (*) \\ &= P([X = 1] \cap [Y = k - 1]) + P([X = 2] \cap [Y = k - 2]) + \dots + P([X = n] \cap [Y = k - n]) \\ &= P([X = 1] \cap [Y = k - 1]) + P([X = 2] \cap [Y = k - 2]) + \dots + P([X = k - 1] \cap [Y = k - (k - 1)]) \\ &\quad + P([X = k] \cap [Y = k - k]) + \dots + P([X = n] \cap [Y = k - n]) \\ &= P([X = 1] \cap [Y = k - 1]) + P([X = 2] \cap [Y = k - 2]) + \dots + P([X = k - 1] \cap [Y = 1]) \quad (**) \\ &\quad + P([X = k] \cap [Y = 0]) + \dots + P([X = n] \cap [Y = k - n]) \\ &= 0 + 0 + \dots + P([X = k - 1] \cap [Y = 1]) \\ &\quad + P([X = 1] \cap [Y = 0]) + \dots + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(X = k - 1) \times P(Y = 1) + P(X = k) \times P(Y = 0) \quad (\text{par indépendance de } X \text{ et } Y) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)) \\
&= 2 \times \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Détail de (*) : pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les événements $[X = j] \cap [X + Y = k]$ et $[X = j] \cap [j + Y = k]$ sont égaux.

Détail de (**): car les valeurs prises par Y sont 0 et 1.

On a obtenu (pour tout k de $\llbracket 2, n \rrbracket$) :

$$P(X + Y = k) = \frac{1}{n}.$$

Remarques : on aurait pu conclure en constatant que $[X + Y = k]$ est l'union des événements $[X = k] \cap [Y = 0]$ et $[X = k - 1] \cap [Y = 1]$ mais ce n'est pas (tout à fait) la démarche imposée par l'énoncé.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} P(X + Y = k) &= P(X + Y = 1) + P(X + Y = 2) + \dots + P(X + Y = n) + P(X + Y = n + 1) \\
&= \frac{1}{2n} + \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n-1 \text{ termes}} + \frac{1}{2n} \quad (*) \\
&= \frac{1}{2n} + (n - 1) \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1 + 1}{2n} + \frac{n - 1}{n} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{n - 1}{n} \\
&= \frac{n}{n} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Détail de (*) : cf les deux questions précédentes pour les valeurs des probabilités et on a $n + 1 - 2 = n - 1$ termes égaux à $\frac{1}{n}$ car la somme contient $n + 1$ termes et deux de ses termes ne sont pas égaux à $\frac{1}{n}$.

On a bien obtenu :

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(X + Y = k) = 1.$$

6. (a) On a :

$$\begin{aligned}
E(X + Y) &= E(X) + E(Y) \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\
&= \frac{n + 1}{2} + \frac{1}{2} \quad (\text{cf question 1.(b)}) \\
&= \frac{n + 2}{2}.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$E(X + Y) = \frac{n + 2}{2}.$$

Par conséquent :

$$\text{le nombre moyen de points marqués par le joueur est } \frac{n+2}{2}.$$

- (b) Le programme `simulation` retourne la moyenne de 1000 simulations de la variable aléatoire X , donc renvoie une valeur approchée de l'espérance de X .

C'est bien cohérent avec la valeur numérique obtenue car, avec $N = 4$, on a : $n = 2 \times 4 = 8$,

$$\text{donc, on a (cf question précédente) : } E(X + Y) = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \approx 4,939.$$

Partie II)

1. (a) • Avant le premier tirage, l'urne contient N numéros pairs et N numéros impairs (cf question 1.(a)). Sachant que l'événement $[X \text{ est paire}]$ est réalisé, l'urne contient, au moment du deuxième tirage, $N-1$ numéros pairs et N numéros impairs. Donc, sachant que l'événement $[X \text{ est paire}]$ est réalisé, la probabilité que l'événement $[Y = 1]$ le soit, c'est-à-dire qu'on obtienne un numéro impair lors du deuxième tirage, est égale à $\frac{N}{N-1+N} = \frac{N}{2N-1}$.

D'où :

$$P_{[X \text{ est paire}]}(Y = 1) = \frac{N}{2N-1}.$$

- Raisonnons de façon similaire pour déterminer $P_{[X \text{ est impaire}]}(Y = 1)$. Sachant que l'événement $[X \text{ est impaire}]$ est réalisé, l'urne contient, au moment du deuxième tirage, N numéros pairs et $N-1$ numéros impairs. Donc, sachant que l'événement $[X \text{ est impaire}]$ est réalisé, la probabilité que l'événement $[Y = 1]$ le soit, c'est-à-dire qu'on obtienne un numéro impair lors du deuxième tirage, est égale à $\frac{N-1}{N-1+N} = \frac{N-1}{2N-1}$.

D'où :

$$P_{[X \text{ est impaire}]}(Y = 1) = \frac{N-1}{2N-1}.$$

- (b) D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $([X \text{ est paire}], [X \text{ est impaire}])$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X \text{ est paire}) \times P_{[X \text{ est paire}]}(Y = 1) + P(X \text{ est impaire}) \times P_{[X \text{ est impaire}]}(Y = 1) \\ &= P(X \text{ est paire}) \times \frac{N}{2N-1} + P(X \text{ est impaire}) \times \frac{N-1}{2N-1} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= P(X \text{ est paire}) \times \frac{N}{2N-1} + (1 - P(X \text{ est paire})) \times \frac{N-1}{2N-1}. \end{aligned}$$

Déterminons $P(X \text{ est paire})$. On a :

$$\begin{aligned} P(X \text{ est paire}) &= P([X = 2] \cup [X = 4] \cup \dots \cup [X = 2N]) \\ &= P(X = 2) + P(X = 4) + \dots + P(X = 2N) \quad (*) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{N \text{ termes}} \quad (**) \\ &= \frac{N}{n} \\ &= \frac{N}{2N} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Détail de (*) : par incompatibilité deux à deux des événements de l'union.

Détail de (**) : car X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et qu'on a N numéros pairs dans l'urne.

D'où :

$$\begin{aligned}
 P(Y = 1) &= P(X \text{ est paire}) \times \frac{N}{2N-1} + P(X \text{ est impaire}) \times \frac{N-1}{2N-1} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{N}{2N-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{N-1}{2N-1} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{N}{2N-1} + \frac{1}{2} \times \frac{N-1}{2N-1} \\
 &= \frac{N + N - 1}{2(2N-1)} \\
 &= \frac{2N-1}{2(2N-1)} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

(c) Avec la question précédente (et les valeurs prises par Y qui sont là encore 0 et 1), on obtient que :

$$Y \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 P([X = 1] \cap [Y = 1]) &= P(X = 1) \times P_{[X=1]}(Y = 1) \\
 &= \frac{1}{n} \times P_{[X=1]}(Y = 1) \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)) \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{N-1}{2N-1} \quad (*) \\
 &= \frac{1}{2N} \times \frac{N-1}{2N-1} \\
 &= \frac{N-1}{2N(2N-1)}.
 \end{aligned}$$

Détail de (*) : sachant que l'événement $[X = 1]$ est réalisé, l'urne contient, au moment du deuxième tirage, N numéros pairs et $N - 1$ numéros impairs (les N initiaux moins le numéro 1). Donc, sachant que l'événement $[X = 1]$ est réalisé, la probabilité que l'événement $[Y = 1]$ le soit, c'est-à-dire qu'on obtienne un numéro impair lors du deuxième tirage, est égale à $\frac{N-1}{N-1+N} = \frac{N-1}{2N-1}$.

On a obtenu :

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{N-1}{2N(2N-1)}.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 P([X = 1] \cap [Y = 1]) - P(X = 1)P(Y = 1) &= \frac{N-1}{2N(2N-1)} - P(X = 1)P(Y = 1) \quad (\text{cf question précédente}) \\
 &= \frac{N-1}{2N(2N-1)} - \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)) \\
 &= \frac{N-1}{2N(2N-1)} - \frac{1}{2N} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2(N-1)}{4N(2N-1)} - \frac{2N-1}{4N(2N-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2N - 2 - 2N + 1}{4N(2N - 1)} \\ &= \frac{-1}{4N(2N - 1)}. \end{aligned}$$

Donc : $P([X = 1] \cap [Y = 1]) - P(X = 1)P(Y = 1) \neq 0$, donc :

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$$

ce qui permet d'affirmer que :

les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Le calcul d'espérance effectué dans la partie I (question 6.(a)) est toujours valable car X et Y suivent les mêmes lois. Donc :

aucune version du jeu n'est plus favorable en moyenne au joueur que l'autre.

EXERCICE 4

1. (a) • Vu la définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned} (1+1)v_{1+2} - (2 \times 1 + 1)v_{1+1} + 1 \times v_1 &= 0 & \text{d'où} & \quad 2v_3 - 3v_2 + v_1 = 0 \\ & & \text{d'où} & \quad 2v_3 = 3v_2 - v_1 \\ & & \text{d'où} & \quad 2v_3 = 3 \times 1 - 1 \\ & & \text{d'où} & \quad 2v_3 = 2 \\ & & \text{d'où} & \quad v_3 = 1. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{v_3 = 1.}$$

- Avec la définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on obtient aussi :

$$\begin{aligned} (2+1)v_{2+2} - (2 \times 2 + 1)v_{2+1} + 2 \times v_2 &= 0 & \text{d'où} & \quad 3v_4 - 5v_3 + 2v_2 = 0 \\ & & \text{d'où} & \quad 3v_4 = 5v_3 - 2v_2 \\ & & \text{d'où} & \quad 3v_4 = 5 \times 1 - 2 \times 1 \\ & & \text{d'où} & \quad 3v_4 = 3 \\ & & \text{d'où} & \quad v_4 = 1. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{v_4 = 1.}$$

- (b) Notons $P(n)$ la propriété « $v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$ » et montrons par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $P(n)$ est vraie.

Initialisation :

On a $v_1 = 1$ et $v_2 = 1$ par définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$, et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a : $v_{n+1} = 1$ et $v_{n+2} = 1$. L'égalité $v_{n+1} = 1$ est déjà acquise par hypothèse, il reste à établir l'égalité $v_{n+2} = 1$. Or, d'après la définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned} (n+1)v_{n+2} - (2n+1)v_{n+1} + nv_n &= 0 & \text{d'où} & \quad (n+1)v_{n+2} = (2n+1)v_{n+1} - nv_n \\ & & \text{d'où} & \quad (n+1)v_{n+2} = (2n+1) \times 1 - n \times 1 \quad (\text{car } P(n) \text{ est vraie}) \\ & & \text{d'où} & \quad (n+1)v_{n+2} = 2n+1 - n \\ & & \text{d'où} & \quad (n+1)v_{n+2} = n+1 \\ & & \text{d'où} & \quad v_{n+2} = 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

Pour tout n de \mathbb{N}^* , $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$\boxed{v_n = 1 \text{ et } v_{n+1} = 1.}$$

- (c) i. On a :

$$\begin{aligned} S_{2N} - S_N &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right) \\ &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \\ &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{N+N}. \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{N+1} \geq \frac{1}{N+N}, \quad \frac{1}{N+2} \geq \frac{1}{N+N}, \quad \dots, \quad \frac{1}{N+N} \geq \frac{1}{N+N}$$

donc, par sommation membre à membre :

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{N+N} \geq \frac{1}{N+N} \dots + \frac{1}{N+N}.$$

Comme la somme de droite (et celle de gauche) contient $\text{card}([N+1, N+N]) = N+N - (N+1) + 1 = N$ termes, cette inégalité se réécrit :

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{N+N} \geq \underbrace{N \times \frac{1}{N+N}}_{= \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}}$$

soit encore, d'après ce que l'on a vu plus haut :

$$S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}.$$

ii. • Pour tout N de \mathbb{N}^* , on a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n+1} \geq 0$, on peut conclure que :

la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- D'après le point précédent la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc il n'y a que deux possibilités :
 - la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de plus majorée, auquel cas elle converge.
 - la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, auquel cas on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Supposons que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors convergente, notons ℓ sa limite.

D'après la question précédente, on a, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2} \quad (*).$$

Or, comme $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ell$.

En passant à la limite dans l'inégalité (*) (lorsque n tend vers $+\infty$), on obtient donc : $\ell - \ell \geq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire :

$$0 \geq \frac{1}{2}$$

ce qui est exclu. Donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, ce qui, d'après ce que l'on vient de voir, permet de conclure que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

iii. • Pour tout N de \mathbb{N}^* , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{nv_n} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad (\text{d'après la question (b)}) \\ &= S_N. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$, donc :

la série de terme général $\frac{1}{nv_n}$ est divergente.

• Pour que X_v existe, il faut et il suffit que :

- pour tout n de \mathbb{N}^* , $\frac{\alpha_v}{nv_n}$ soit positif
- la série de terme général $\frac{\alpha_v}{nv_n}$ soit convergente et de somme 1.

La première condition est satisfaite car α_v est positif par hypothèse. Intéressons-nous à la deuxième :

Pour tout N de \mathbb{N}^* , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_v}{nv_n} &= \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_v}{n} \\ &= \alpha_v \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad (\text{car } \alpha_v \text{ est indépendant de } n) \\ &= \alpha_v S_N. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans le cas $\alpha_v = 0$, on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_v}{nv_n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et dans

le cas $\alpha_v > 0$, on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_v}{nv_n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \alpha_v S_N = +\infty$.

Donc, quel que soit α_v , la deuxième condition n'est pas satisfaite. Donc :

X_v n'existe pas.

2. • Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned} (1+1)u_{1+2} - (2 \times 1 + 1)u_{1+1} + 1 \times u_1 &= \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) & \text{d'où } 2u_3 - 3u_2 + u_1 &= \ln(2) \\ & & \text{d'où } 2u_3 &= \ln(2) + 3u_2 - u_1 \\ & & \text{d'où } 2u_3 &= \ln(2) + 3 \times 1 - 1 \\ & & \text{d'où } 2u_3 &= \ln(2) + 2 \\ & & \text{d'où } u_3 &= \frac{1}{2} \ln(2) + 1. \end{aligned}$$

On a donc :

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2} \ln(2) = \left(= 1 + \frac{1}{2} \ln(2) + 0 \cdot \ln(3) \right).$$

- Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a aussi :

$$\begin{aligned}
 (2+1)u_{2+2} - (2 \times 2 + 1)u_{2+1} + 2 \times u_2 &= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) & \text{d'où} & \quad 3u_4 - 5u_3 + 2u_2 = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
 & & \text{d'où} & \quad 3u_4 = \ln\left(\frac{2+1}{2}\right) + 5u_3 - 2u_2 \\
 & & \text{d'où} & \quad 3u_4 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 5 \times \left(1 + \frac{1}{2}\ln(2)\right) - 2 \times 1 \\
 & & \text{d'où} & \quad 3u_4 = \ln(3) - \ln(2) + 5 + \frac{5}{2}\ln(2) - 2 \\
 & & \text{d'où} & \quad 3u_4 = 3 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)\ln(2) + \ln(3) \\
 & & \text{d'où} & \quad 3u_4 = 3 + \frac{3}{2}\ln(2) + \ln(3) \\
 & & \text{d'où} & \quad u_4 = 1 + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{3}\ln(3).
 \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$u_4 = 1 + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{3}\ln(3).$$

3. On peut compléter la fonction Python de la manière suivante :

```

import numpy as np
def Suite_U(N):
    u = np.ones(N)
    for k in range(1, N-1):
        u[k+1] = 1/(k+1) * (np.log(1+1/k) + (2*k+1)*u[k] - k*u[k-1])
    return u

```

On utilise ici le fait que l'énoncé :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_{n+2} - (2n+1)u_{n+1} + nu_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

se réécrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (k+1)u_{k+2} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + (2k+1)u_{k+1} - ku_k$$

soit encore :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+2} = \frac{1}{k+1} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + (2k+1)u_{k+1} - ku_k \right)$$

et que, pour tout k de $[0, N-1]$, $u[k]$ modélise le terme u_{k+1} (ce qui amène «un décalage» sur les indices des termes de la suite mais pas sur le reste -et n'est donc pas très aisé à appréhender-).

4. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{e^{1 \cdot (u_{1+1} - u_1)}}{1} \\
 &= e^{u_2 - u_1} \\
 &= e^{1-1} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$w_1 = 1.$$

- (b) Notons P_n la propriété « $w_n = 1$ » et montrons par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N}^* , P_n est vraie.

Initialisation :

On vient de voir que l'on a : $w_1 = 1$, donc P_1 est vraie.

Hérédité :

Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} &= \frac{e^{(n+1)(u_{n+2}-u_{n+1})}}{n+1} \\
 &= \frac{e^{(n+1)u_{n+2}-(n+1)u_{n+1}}}{n+1} \\
 &= \frac{e^{\ln(1+\frac{1}{n})+(2n+1)u_{n+1}-nu_n-(n+1)u_{n+1}}}{n+1} \quad (*) \\
 &= \frac{e^{\ln(1+\frac{1}{n})+(2n+1-(n+1))u_{n+1}-nu_n}}{n+1} \\
 &= \frac{e^{\ln(1+\frac{1}{n})+nu_{n+1}-nu_n}}{n+1} \\
 &= \frac{e^{\ln(1+\frac{1}{n})+n(u_{n+1}-u_n)}}{n+1} \\
 &= \frac{e^{\ln(1+\frac{1}{n})} \times e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n+1} \\
 &= \frac{(1+\frac{1}{n}) \times e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n+1} \\
 &= \frac{n+1}{n} \times \frac{e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n+1} \\
 &= \frac{e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n} \\
 &= w_n \\
 &= 1 \quad (\text{car } P_n \text{ est vraie}).
 \end{aligned}$$

Détail de (*) : par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$(n+1)u_{n+2} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (2n+1)u_{n+1} - nu_n.$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion :

Pour tout n de \mathbb{N}^* , P_n est vraie, c'est-à-dire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $w_n = 1$.

Par conséquent :

la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

- (c) Soit n un élément de \mathbb{N}^* . D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 w_n = 1 & \quad \text{d'où} \quad \frac{e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n} = 1 \\
 & \quad \text{d'où} \quad e^{n(u_{n+1}-u_n)} = n \\
 & \quad \text{d'où} \quad n(u_{n+1} - u_n) = \ln(n) \\
 & \quad \text{d'où} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n)}{n}.
 \end{aligned}$$

On a bien obtenu, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n)}{n}.$$

(d) On va calculer $\sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n)$ de deux manières.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) &= u_{1+1} - u_1 + u_{2+1} - u_2 + u_{3+1} - u_3 + \dots + u_{N-2+1} - u_{N-2} + u_{N-1+1} - u_{N-1} \\ &= u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + u_4 - u_3 + \dots + u_{N-1} - u_{N-2} + u_N - u_{N-1} \\ &= -u_1 + u_N \quad (\text{par télescopage}) \\ &= -1 + u_N \end{aligned}$$

et, d'autre part, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n} \\ &= \frac{\ln(1)}{1} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n} \\ &= \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n} \quad (\text{car } \ln(1) = 0). \end{aligned}$$

D'où : $-1 + u_N = \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}$ et donc :

$$u_N = 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Remarques :

- On déduit de cette question que, pour tout N de $\llbracket 3, +\infty \llbracket$, u_N est strictement positif (en tant que somme de réels qui le sont). Comme $u_1 = 1 > 0$ et $u_2 = 1 > 0$, la suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite de réels strictement positifs.
- On peut vérifier à partir de cette question que les résultats obtenus dans la question 2. sont bien corrects.

5. (a) La fonction f est dérivable sur $[2, +\infty[$ car est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$.

Pour tout t de $[2, +\infty[$, on a :

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t} \times t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}.$$

Or, pour tout t de $[2, +\infty[$, on a les équivalences :

$$1 - \ln(t) > 0 \iff 1 > \ln(t) \iff e > t$$

et les équivalences :

$$1 - \ln(t) = 0 \iff 1 = \ln(t) \iff e = t.$$

D'où le tableau de signes et de variations suivant :

t	2	e	$+\infty$
$1 - \ln(t)$	+	0	-
t^2	+		+
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\frac{1}{e}$ 		

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$ et comme $e < 3$:

la fonction f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$.

(b) Soit k un élément de $\llbracket 3, +\infty \llbracket$.

Pour tout t de $[k, k+1]$, on a : $k \leq t \leq k+1$, donc, par décroissance de f sur l'intervalle $[k, k+1]$ (qui est inclus dans $[3, +\infty[$), on a, pour tout t de $[k, k+1]$, on a : $f(k) \geq f(t) \geq f(k+1)$.
On en déduit (par croissance de l'intégrale avec des bornes triées par ordre croissant) :

$$\int_k^{k+1} f(k) dt \geq \int_k^{k+1} f(t) dt \geq \int_k^{k+1} f(k+1) dt.$$

Or :

$$\int_k^{k+1} f(k) dt = f(k) \int_k^{k+1} 1 dt = f(k) \times [t]_k^{k+1} = f(k) \times (k+1 - k) = f(k)$$

de même :

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt = f(k+1) \int_k^{k+1} 1 dt = f(k+1) \times [t]_k^{k+1} = f(k+1) \times (k+1 - k) = f(k+1).$$

On a donc bien (pour tout k de $\llbracket 3, +\infty \llbracket$) :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

(c) D'après la question précédente, on a :

$$f(4) \leq \int_3^4 f(t) dt \leq f(3) , \quad f(5) \leq \int_4^5 f(t) dt \leq f(4) , \quad \dots , \quad f(N) \leq \int_{N-1}^N f(t) dt \leq f(N-1).$$

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$f(4) + f(5) + \dots + f(N) \leq \int_3^4 f(t) dt + \int_4^5 f(t) dt + \dots + \int_{N-1}^N f(t) dt \leq f(3) + f(4) + \dots + f(N-1)$$

d'où avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=4}^N f(k) \leq \int_3^N f(t) dt \leq \sum_{k=3}^{N-1} f(k).$$

(d) • Inégalité de gauche. D'après la question précédente, on a :

$$\int_3^N f(t) dt \leq \sum_{n=3}^{N-1} f(n)$$

ce qui se réécrit :

$$\int_3^N f(t) dt \leq \sum_{n=3}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}.$$

On en déduit :

$$1 + \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^N f(t) dt \leq 1 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Comme :

$$1 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n} = u_N \quad (\text{cf 4.(d)})$$

on obtient l'inégalité :

$$1 + \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^N f(t) dt \leq u_N$$

inégalité qui se réécrit :

$$1 + f(2) + \int_3^N f(t) dt \leq u_N.$$

- Inégalité de droite. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{n=4}^N f(n) \leq \int_3^N f(t) dt$$

ce qui se réécrit :

$$\sum_{n=4}^N \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_3^N f(t) dt.$$

On en déduit :

$$1 + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \sum_{n=4}^N \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_3^N f(t) dt + 1 + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}.$$

Comme :

$$1 + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \sum_{n=4}^N \frac{\ln(n)}{n} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{\ln(n)}{n} = 1 + \frac{\ln(N)}{N} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(N)}{N} + u_N$$

on obtient :

$$\frac{\ln(N)}{N} + u_N \leq \int_3^N f(t) dt + 1 + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}.$$

Comme $N \geq 4 \geq e$, on a : $\frac{\ln(N)}{N} \geq 0$, d'où :

$$u_N \leq \frac{\ln(N)}{N} + u_N$$

donc, avec l'inégalité précédente, on obtient en particulier :

$$u_N \leq \int_3^N f(t) dt + 1 + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}$$

inégalité qui se réécrit :

$$u_N \leq \int_3^N f(t) dt + 1 + f(2) + f(3).$$

A partir de deux point précédents, on peut en effet conclure que l'on a (pour tout N de $\llbracket 4, +\infty \rrbracket$) :

$$1 + f(2) + \int_3^N f(t) dt \leq u_N \leq \int_3^N f(t) dt + 1 + f(2) + f(3).$$

6. (a) Notons h la fonction définie, pour tout t de $]0, +\infty[$, par $h(t) = (\ln(t))^2$. La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ car la fonction $t \mapsto \ln(t)$ l'est, et pour tout t de $]0, +\infty[$, on a :

$$h'(t) = 2 \times \frac{1}{t} \times (\ln(t))^{2-1} = \frac{2 \ln(t)}{t}.$$

(b) On a :

$$\int_3^N f(t) dt = \int_3^N \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_3^N \frac{1}{2} h'(t) dt = \left[\frac{1}{2} h(t) \right]_3^N = \frac{1}{2} h(N) - \frac{1}{2} h(3) = \frac{1}{2} (\ln(N))^2 - \frac{1}{2} (\ln(3))^2.$$

On a obtenu (pour tout N de $\llbracket 3, +\infty \rrbracket$) :

$$\boxed{\int_3^N f(t) dt = \frac{1}{2} (\ln(N))^2 - \frac{1}{2} (\ln(3))^2.}$$

7. Soit N un élément de $\llbracket 4, +\infty \rrbracket$. Avec le résultat de la question précédente, celui de la question 5.(b) se réécrit :

$$1 + f(2) + \frac{1}{2} (\ln(N))^2 - \frac{1}{2} (\ln(3))^2 \leq u_N \leq \frac{1}{2} (\ln(N))^2 - \frac{1}{2} (\ln(3))^2 + 1 + f(2) + f(3)$$

d'où :

$$\frac{1}{(\ln(N))^2} + \frac{f(2)}{(\ln(N))^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\ln(3))^2}{(\ln(N))^2} \leq \frac{u_N}{(\ln(N))^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\ln(3))^2}{(\ln(N))^2} + \frac{1}{(\ln(N))^2} + \frac{f(2)}{(\ln(N))^2} + \frac{f(3)}{(\ln(N))^2}.$$

Or (par somme et quotient) :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln(N))^2} + \frac{f(2)}{(\ln(N))^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\ln(3))^2}{(\ln(N))^2} = \frac{1}{2}$$

et :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\ln(3))^2}{(\ln(N))^2} + \frac{1}{(\ln(N))^2} + \frac{f(2)}{(\ln(N))^2} + \frac{f(3)}{(\ln(N))^2} = \frac{1}{2}$$

donc, par encadrement :

$$\boxed{\frac{u_N}{(\ln(N))^2} \text{ admet une limite finie lorsque } N \text{ tend vers } +\infty, \text{ donnée par : } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{u_N}{(\ln(N))^2} = \frac{1}{2}.}$$

8. (a) On a :

$$\begin{aligned} \int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\ln(t))^2} dt &= \int_2^A \frac{\frac{1}{t}}{(\ln(t))^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{\ln(t)} \right]_2^A \quad (*) \\ &= \frac{-1}{\ln(A)} - \left(\frac{-1}{\ln(2)} \right) \\ &= \frac{-1}{\ln(A)} + \frac{1}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Détail de (*) : on reconnaît la forme $\frac{u'}{u^2}$ (dont une primitive est $\frac{-1}{u}$).

On a obtenu :

$$\boxed{\int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\ln(t))^2} dt = \frac{-1}{\ln(A)} + \frac{1}{\ln(2)}.$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\ln(t))^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\ln(A)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\ln(t))^2} dt$ converge (et on a : $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\ln(t))^2} dt = \frac{1}{\ln(2)}$).

Par conséquent, avec le résultat admis par l'énoncé, la série de terme général $\frac{1}{nu_n}$ converge.

Notons S sa somme et vérifions que X_u existe.

Pour tout N de \mathbb{N}^* , on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{\alpha_u}{nu_n} = \alpha_u \sum_{n=1}^N \frac{1}{nu_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \alpha_u S.$$

Donc, pour que la série de terme général $\frac{\alpha_u}{nu_n}$ soit convergente et de somme 1, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha_u = \frac{1}{S}$; α_u est alors bien défini et strictement positif car, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a $\frac{1}{nu_n} > 0$ -cf remarque de la question 4.(d)-.

Avec $\alpha_u = \frac{1}{S}$ et la remarque de la question 4.(d), on a de plus, pour tout n de \mathbb{N}^* , $\frac{\alpha_u}{nu_n} \geq 0$ ce qui assure que :

X_u existe.