MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - EMLyon 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Problème 1

Partie 1 : Racine(s) d'une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On cherche à déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ et, si c'est le cas, à décrire l'ensemble des solutions de cette équation, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Alors :

$$AM = M^2 \times M = M^3 = M \times M^2 = MA$$

Une matrice commute toujours avec ses puissances, par associativité du produit matriciel.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
   - Si M est inversible, alors $A = M^2$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   - Réciproquement, si A est inversible, alors il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée A^{-1}, telle que :

$$AA^{-1} = I_n \iff M^2A^{-1} = I_n \iff M \times MA^{-1} = I_n.$$

   La matrice M est alors bien inversible aussi, d'inverse $M^{-1} = MA^{-1}$.

   On a donc bien démontré par double implication, que A est inversible si et seulement si M est inversible.

3. On considère, dans cette question : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 0-1 & 0+0 \\ 0+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

   On a donc $A^2 + I_2 = 0_2$, donc le polynôme $P(x) = x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
   Toute valeur propre de A est donc racine de P : mais P n'admet aucune racine réelle ($\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$) ! Par conséquent, A n'admet aucune valeur propre réelle, et ne peut donc pas être diagonalisable.

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$M^2 = A \iff \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+bc = 0 = bc+d^2 \\ c(a+d) = -1 \\ b(a+d) = 1 \end{cases}$$

- Le fait que $c(a+d) = -1 \neq 0$ implique (contraposée de la règle du produit nul) que $a+d \neq 0$, donc $c = -\dfrac{1}{a+d}$ et la troisième ligne du système donne aussi $b = \dfrac{1}{a+d} = -c$.
- La première ligne implique que $a^2 = d^2$, donc $a = d$ ou $a = -d$. La seconde option est impossible car équivalente à $a + d = 0$, ce qui n'est pas le cas, donc nécessairement $a = d$.

On a donc bien démontré que $M^2 = A$ implique $a = d$ et $b = -c$.

c) Les solutions éventuelles de l'équation $M^2 = A$ sont donc nécessairement de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, et alors :

$$M^2 = A \iff \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = b^2 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b \\ 2a^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = -a \\ -2a^2 = 1 : \text{impossible !} \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ a^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iff a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } a = b = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, si M est solution, alors $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $M = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie réciproquement que ces deux matrices opposées on le même carré, qui vaut $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = A$: l'équation $M^2 = A$ admet donc exactement deux solutions, définies ci-dessus.

4. On considère, dans cette question, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'énoncé suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

a) La matrice A est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, et ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0\}}$.

Si A était diagonalisable, alors f aussi et le seul sous-espace propre $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$ serait de dimension 3. Or il est clair que le rang de A et donc de f, est égal à 2 puisque A est échelonnée avec deux pivots non nuls.

Le théorème du rang assure alors que $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = 1 \neq 3$.

La matrice A n'est donc *pas* diagonalisable.

b) Sous l'hypothèse $M^2 = A$, on a $M^4 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $M^6 = A^3 = A^2 \times A = 0$ après calcul la matrice M est nilpotente (car A l'est). On note alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* ;\ M^p = 0\}$.

c) Par définition de p : $4 < p$ et M^{p-1} n'est pas nulle, donc f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul et par conséquent, il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^{p-1}(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Montrons alors que la famille $\big(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u)\big)$ est libre, en commençant par poser une combinaison linéaire nulle de cette famille : soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\alpha_0.u + \alpha_1.f(u) + \alpha_2.f^2(u) + \dots + \alpha_{p-1}.f^{p-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

En composant les deux membres de cette égalité par f^{p-1}, on obtient par linéarité de f (et donc de f^{p-1}) :

$$\alpha_0.f^{p-1}(u) + \alpha_1.f^p(u) + \alpha_2.f^{p+1}(u) + \dots + \alpha_{p-1}.f^{2p-2}(u) = f(0_{\mathbb{R}^3}) \iff \alpha_0.f^{p-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

puisque f^p est l'endomorphisme nul par définition de p, et par conséquent $f^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant p$.

Comme $f^{p-1}(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\alpha_0 = 0$, et la combinaison linéaire nulle devient :

$$\alpha_1.f(u) + \alpha_2.f^2(u) + \cdots + \alpha_{p-1}.f^{p-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Si on compose cette fois par f^{p-2}, on obtient :

$$\alpha_1.f^{p-1}(u) + \alpha_2.f^p(u) + \cdots + \alpha_{p-1}.f^{p-2}(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \alpha_1.f^{p-1}(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \alpha_1 = 0$$

pour les mêmes raisons. Ainsi de proche en proche, on obtient : $\alpha_0 = 0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{p-1}$, donc la famille $\big(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{p-1}(u)\big)$ est bien libre.

d) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à 3. La famille libre de la question précédente est de cardinal p, donc $p \leqslant 3$.

Ceci est impossible, car alors on aurait $M^3 = 0$ qui impliquerait $M^4 = M^3 \times M = 0$, ce qui n'est pas le cas.

On en conclut par l'absurde, que l'hypothèse de départ de cette question 4. est fausse : il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$: la matrice nilpotente A étudiée ici n'admet donc aucune racine carrée matricielle.

5. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I_n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M dans la base canonique.

a) Le fait que $M^2 = I_n \iff M^2 - I_n = 0$ assure que $Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ est un polynôme annulateur de M : ses racines évidentes sont -1 et 1, qui sont donc les seules valeurs propres possibles de M.

b) Montrons par analyse-synthèse que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

- **Analyse :** supposons que tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

  Alors par définition : $f(y) - y = 0_{\mathbb{R}^n} \iff f(y) = y$ et $f(z) + z = 0_{\mathbb{R}^n} \iff f(z) = -z$.

  On a alors, par linéarité de f : $f(x) = f(y) + f(z) = y - z$,

  donc $\begin{cases} y + z &= x \\ y - z &= f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) \\ z = \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) \end{cases}$,

  ce qui prouve que y et z, s'ils existent, sont alors bien définis de façon unique en fonction de x.

- **Synthèse :** soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque ; on pose $y = \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)$ et $y = \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)$.

  Il est alors clair que $y + z = \frac{1}{2}\big(x + f(x) + x - f(x)\big) = \frac{1}{2}.2x = x$.

  De plus, toujours par linéarité de f :

  $$f(y) = \tfrac{1}{2}\big(f^2(x) + f(x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(x + f(x)\big) = y \quad \text{et} \quad f(z) = \tfrac{1}{2}\big(f^2(x) - f(x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(x - f(x)\big) = -z$$

  du fait que $M^2 = I_n \iff f^2 = \mathrm{id}$. On a bien montré que $f(y) - y = 0_{\mathbb{R}^n} \iff y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et que $f(z) + z = 0_{\mathbb{R}^n} \iff z \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

Le raisonnement par analyse-synthèse est donc achevé, qui prouve que :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}).$$

c) Le résultat précédent signifie que les deux sous-espaces propres $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $E_{-1}(f) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$: d'après le théorème spectral, et même si l'un des deux sous-espaces est réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ (l'autre est alors égal à $\mathbb{R}^n$) on peut donc conclure que f est diagonalisable, et par conséquent sa matrice M aussi.

d) On vient de démontrer que toute matrice M telle que $M^2 = I_n$, est diagonalisable : elle est donc semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$, via une matrice inversible P, carrée d'ordre n telle que $M = PDP^{-1}$, où :

$$M^2 = I_n \iff PDP^{-1}PDP^{-1} = I_n \iff PD^2P^{-1} = I_n \iff D^2 = P-1I_nP$$

$$\iff D^2 = I_n \iff \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \varepsilon_i^2 = 1 \iff \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \varepsilon_i \in \{-1\,;1\}.$$

Donc toute matrice solution de $M^2 = I_n$ est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \varepsilon_i \in \{-1\,;1\}$, et réciproquement d'après le calcul ci-dessus, la réciproque est vraie, donc l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = I_n$ est bien l'ensemble des matrices semblables aux matrices diagonales ci-dessus.

6. On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, où les réels λ_i sont rangés dans l'ordre strictement croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

a) La matrice A est carrée d'ordre n, et l'énoncé suppose ici qu'elle possède n valeurs propres distinctes : le critère suffisant assure que la matrice A est diagonalisable (et que tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1) : A est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, via une matrice de passage inversible P, selon la relation $A = PDP^{-1}$.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $N = P^{-1}MP$: on a alors $M = PNP^{-1}$ et

$$M^2 = A \iff (PNP^{-1})^2 = A \iff PN\underbrace{P^{-1}P}_{=I_n}NP^{-1} = A \iff PN^2P^{-1} = A$$

$$\iff N^2 = P^{-1}AP \iff N^2 = D.$$

c) La question 1. a établi que toute matrice N telle que $N^2 = D$, vérifie aussi $ND = DN$, c'est-à-dire commute avec D.
Or, si on note $(N_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de N, et vu que D est diagonale :

$$ND = DN \iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (ND)_{i,j} = (DN)_{i,j}$$

$$\iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} N_{i,k}D_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k}N_{k,j}$$

$$\iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ N_{i,j}\lambda_j = \lambda_i N_{i,j}$$

Pour tout couple (i,j) de $[\![1\,;n]\!]^2$, la dernière condition implique $(\lambda_j - \lambda_i)N_{i,j} = 0 \Longrightarrow N_{i,j} = 0$ puisque les λ_i sont deux à deux distinctes.

En clair : toute matrice N qui commute avec D, a des éléments hors diagonale, tous nuls, c'est donc une matrice diagonale, et c'est donc en particulier le cas de toute matrice N telle que $N^2 = D$.

d) Si l'une des valeurs propres λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de N est strictement négative : alors l'équation $N^2 = D$ où N est diagonale, n'admet aucune solution puisqu'au i-ème élément diagonal, l'identification des coefficients donne : $N_{i,i}^2 = \lambda_i$, équation d'inconnue $N_{i,i}$ sans solution réelle puisque $\lambda_i < 0$.

L'équivalence obtenue en 6.b) assure que dans ce cas, l'équation $M^2 = A$ n'admet pas non plus de solutions.

e) Dans le cas où toutes les valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de A sont positives : pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, $N = P^{-1}MP$ est diagonale et solution de l'équation

$$N^2 = D \iff \begin{pmatrix} N_{1,1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{2,2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_{n,n}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ N_{i,i}^2 = \lambda_i.$$

Les solutions de l'équation $M^2 = A$ sont donc toutes les matrices de la forme $M = PNP^{-1}$,

où N est diagonale de la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{\lambda_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ avec : $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \varepsilon_i \in \{-1\,;1\}$.

7. On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives. *L'énoncé ne suppose plus ici qu'elles sont distinctes.*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

a) On peut ici reprendre une partie du raisonnement précédent : La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable, semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ via une matrice de passage inversible P qu'on peut même choisir orthogonale ($P{-}1 = {}^{\mathrm{t}}P$), via la relation $A = PD\,{}^{\mathrm{t}}P$.

En notant $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et $M = P\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P$; il est clair :

- que $\Delta^2 = D$ (produit de matrices diagonales),
- que M est diagonalisable car semblable à Δ et que $\mathrm{Sp}(M) = \left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right\}$,
- que $M^2 = P\Delta\underbrace{{}^{\mathrm{t}}PP}_{=I_n}\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P = P\Delta^2\,{}^{\mathrm{t}}P = PD\,{}^{\mathrm{t}}P = A$,
- et en enfin que M est symétrique, puisque : ${}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}(P\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}P)\,{}^{\mathrm{t}}\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P = P\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P = M$ (une matrice diagonale comme Δ est toujours symétrique).

b) On suppose qu'il existe deux matrices M_1 et M_2 vérifiant la propriété précédente.

i. Avec les notations de l'énoncé : M_1 (resp. M_2) est symétrique, donc diagonalisable, semblabe à D_1 (resp. D_2) matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres, via une matrice de passage P_1 (resp. P_2) orthogonale, telle que :

$$M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \text{ et } M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}.$$

Notons que la base de vecteurs propres pour M_1 (et donc la matrice de passage P_1, n'est pas a priori la même que pour M_2.

ii. On pose $P = P_1^{-1}P_2$. On a alors, avec les relations de la question précédente :

$$A = M_1^2 = P_1D_1P_1^{-1}P_1D_1P_1^{-1} = P_1D_1^2P_1^{-1} \text{ aussi égale à } M_2^2 = P_2D_2^2P_2^{-1},$$

donc : $\quad P_1D_1^2P_1^{-1} = P_2D_2^2P_2^{-1} \iff D_1^2P_1^{-1}P_2 = P_1^{-1}P_2D_2^2 \iff D_1^2P = PD_2^2.$

L'égalité des matrices entraîne celle de tous leurs coefficients aux mêmes indices :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad (D_1^2P)_{i,j} = (PD_2^2)_{i,j} \iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad \sum_{k=1}^{n}(D_1^2)_{i,k}P_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}P_{i,k}(D_2^2)_{k,j}$$

$$\iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad a_i^2(P)_{i,j} = (P_{i,j})b_j^2 \quad \text{puisque } (D_1^2)_{i,k} = 0 \text{ si } i \neq k, \quad \text{et } a_i^2 \text{ si } i = k$$

puisque D_1^2 (resp. D_2^2) est diagonale vu que D_1 (resp. D_2) l'est, et a pour éléments diagonaux les carrés des a_i^2 (resp. les b_i^2).

iii. On a alors, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$:

$$(a_i^2 - b_i^2)\cdot(P)_{i,j} = 0 \iff (a_i+b_i)(a_i-b_i)(P)_{i,j} = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} (a_i-b_i)\cdot(P_{i,j}) = 0, \text{ soit } a_{i,j}(P)_{i,j} = (P)_{i,j}b_i$$

$(*)$ d'après la règle du produit nul, car a_i et b_i sont strictement positifs par hypothèse, donc $(a_i + b_i)$ est un facteur non-nul dans le produit nul.

Les matrices D_1 et D_2 étant diagonales, comme à la question précédente :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 a_i(P)_{i,j} = (P)_{i,j}b_i \iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \ (D_1P)_{i,j} = (PD_2)_{i,j} \iff D_1P = PD_2.$$

iv. On a ainsi : $\quad D_1P_1^{-1}P_2 = P_1^{-1}P_2D_2 \iff P_1D_1P_1^{-1} = P_2D_2P{-1}_2 \iff M_1 = M_2.$

Ceci prouve qu'il y a unicité d'une racine carrée de A dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Partie 2 : Une suite de matrices

8. Montrons que l'application $(\cdot\,,\cdot) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB) \end{array}$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons que pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, ${}^{\mathrm{t}}AB$ est une matrice carrée d'ordre n et que sa trace somme de ses éléments diagonaux, est bien un réel : $(\cdot\,,\cdot)$ est une forme.

- Pour tout $(A,B,C) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^3$, et pour tout réel λ :

$$(\lambda.A + B\,,C) = \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}(\lambda.A+B)C\big) \overset{(*)}{=} \mathrm{Tr}\big((\lambda.{}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B)C\big) = \mathrm{Tr}\big(\lambda.{}^{\mathrm{t}}AC + {}^{\mathrm{t}}BC\big) \overset{(**)}{=} \lambda.\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AC) + \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}BC)$$
$$= \lambda.(A\,,C) + (B\,,C),$$

$(*)$: par linéarité de la transposée $\qquad (**)$: par linéarité de la trace.

Ainsi, $(\cdot\,,\cdot)$ est linéaire par rapport à la première variable.

- Pour tout $(A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$: puisque la trace d'une matrice carrée est égale à celle de sa transposée (opération qui ne change de place aucun élément diagonal de la matrice), alors :

$$(A\,,B) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB) = \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AB)\big) = \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)\big) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}BA) = (B\,,A)$$

donc $(\cdot\,,\cdot)$ est symétrique, et donc bilinéaire avec le premier point.

Remarque : il y a une deuxième façon de rédiger ce point (et le précédent aussi d'ailleurs) en explicitant le calcul

$$(A\,,B)=\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)=\sum_{i=1}^{n}({}^{\mathrm{t}}AB)_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}({}^{\mathrm{t}}A)_{i,k}B_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{k,i}B_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{k,i}A_{k,i}.$$

Sous cette forme la symétrie du produit scalaire devient évidente puisque le produit des réels est commutatif !

- En reprenant l'expression explicite écrite ci-dessus : pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A\,,A)=\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A_{i,k})^2 \text{ est toujours positif comme somme de réels postifs.}$$

- De plus, pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(A\,,A)=0 \iff \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A_{i,k})^2=0 \overset{(*)}{\iff} \forall(i,k)\in[\![1\,;n]\!]^2,\ (A_{i,k})^2=0$$
$$\iff \forall(i,k)\in[\![1\,;n]\!]^2,\ A_{i,k}=0 \iff A=0$$

$(*)$: une somme de réels *positifs* est nulle, si et seulement si chacun de ses termes est nul.

Ainsi l'application $(\cdot\,,\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive : c'est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'énoncé note $||\cdot||_2$ la norme associée.

9. Pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc $||M||_2=\sqrt{(M\,,M)}=\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\big(((M)_{i,k}\big)^2}$, où :

$$\forall(i,k)\in[\![1\,;n]\!]^2,\quad \big((M)_{i,k}\big)^2\leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\big(Mi,j\big)^2 \Longrightarrow ||M||_2^2\leqslant n^2\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\big((M)_{i,j}\big)^2$$
$$\Longrightarrow ||M||_2\leqslant \sqrt{\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\big((M)_{i,j}\big)^2}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|(M)_{i,j}|$$

par stricte croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, qui assure que la racine carrée du maximum de réels positifs, est le maximum de leurs racines carrées, avec $\sqrt{\big((M)_{i,j}\big)^2}=|(M)_{i,j}|$.

10. Soit $(M_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet comme limite coefficient par coefficient la matrice $L\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour toutes matrices $K_1,K_2\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toujours d'après la formule du produit matriciel :

$$\forall(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2,\quad (K_1M_kK_2)_{i,j}=\sum_{p=1}^{n}(K_1M_k)_{i,p}(K_2)_{p,j}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(K_1)_{i,q}(M_k)_{q,p}(K_2)_{p,j}$$

et par opérations sur les limites (ici des sommes et des produits, sachant que les coefficients de K_1 et K_2 sont constants :

$$\forall(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2,\quad \lim_{k\to+\infty}(K_1M_kK_2)_{i,j}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(K_1)_{i,q}(L)_{q,p}(K_2)_{p,j}=(K_1LK_2)_{i,j},$$

ce qui prouve bien que la suite de matrices $(K_1M_kK_2)_{k\geqslant 0}$ converge coefficient par coefficient, vers la matrice (K_1LK_2).

11. On considère un nombre réel $a\neq 0$ et la suite réelle $(u_m)_{m\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0=a\\ \forall m\in\mathbb{N},\quad u_{m+1}=\dfrac{1}{2}\Big(u_m+\dfrac{1}{u_m}\Big)\end{cases}$$

a) La fonction $\varphi :\ x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{2}\Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)$ est dérivable sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big) = \frac{x^2-1}{2x^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $2x^2 > 0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $x^2 - 1$, trinôme du second degré dont les deux racines évidentes sont -1 et 1.

On en déduit le tableau de signes de $\varphi'(x)$ et de variations de φ :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
φ	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) Soit $a > 0$: montrons par récurrence sur m que $\mathcal{P}(m)$: "u_n est bien définie et $u_m \geqslant 1$", est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Puisque $a > 0$, alors $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(a)$ est bien défini et d'après le tableau de variations de φ : $\quad u_1 \geqslant 1 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} \varphi(x)$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(m+1)$ est encore vraie.

On a supposé que $u_m \geqslant 1$, donc u_m appartient au domaine de définition de φ, et $u_{m+1} = \varphi(u_m)$ est bien définie, qui vérifie encore $u_{m+1} \geqslant 1 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} \varphi(x)$: ainsi $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(m)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence. En particulier, on a bien $|u_m| = u_m \geqslant 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et u_m est ici toujours positif, donc du signe de a.

Une récurrence en tout point analogue montrerait que si $a < 0$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, u_m est bien défini et $u_m \leqslant -1$ (et l'énoncé admettait cela), donc de façon générale : si $a \neq 0$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, u_m est bien défini, $|u_m| \geqslant 1$ et u_m est du signe de a.

c) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $\ u_{m+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\Big(u_m + \dfrac{1}{u_m} - 2u_m\Big) = \dfrac{1-u_m^2}{2u_m}$ est du signe opposé à celui de u_m, puisque $u_m^2 \geqslant 1 \iff 1 - u_m^2 \leqslant 0$.

Comme d'après la question précédente, u_m est de signe constant (celui de a), alors $u_{m+1} - u_m$ garde un signe constant, ce qui signifie bien que la suite $(u_m)_{m\geqslant 1}$ est monotone :

- décroissante si $a > 0$, auquel cas elle converge vers une limite $\ell \geqslant 1$ d'après le théorème de limite monotone, puisqu'elle est alors aussi minorée par 1 ;
- croissante si $a < 0$, auquell cas elle converge vers une limite $\ell \leqslant -1$ d'après le même théorème puisqu'elle est alors aussi majorée par -1.

Puisque la fonction φ est continue sur $[1\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;-1]$, alors on peut passer à la limite dans la relation de récurrence entre u_{m+1} et u_m, et on obtient en notant $\varepsilon = \lim\limits_{m\to+\infty} u_m$, l'équation :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big) \iff 2\varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon} = 0 \iff \varepsilon^2 = 1 \iff \varepsilon \in \{-1\,;1\}.$$

d) Pour tout réel x tel que $|x| \geqslant 1$, d'après le calcul de $\varphi'(x)$ déjà effectué à la question a) :

$$|\varphi'(x)| = \frac{|x^2-1|}{2x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{x^2-1}{x^2} \leqslant \frac{1}{2} \text{ puisque } 0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{x^2-1}{x^2} \leqslant 1.$$

e) Supposons $a > 0$; la fonction φ est dérivable (donc continue) sur $[1\,;+\infty[$ qui contient u_m pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et ε dans ce cas.

Au vu du résultat de la question précédente, l'Inégalité des Accroissements Finis s'applique, qui assure que :

$$\forall m \geqslant 1, \quad |\varphi(u_m) - \varphi(\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{2}|u_m - \varepsilon| \iff \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{m+1} - \varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}|u_m - \varepsilon|.$$

Une récurrence facile montre alors que $\mathcal{Q}(m)$: "$|u_m - \varepsilon| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m |a - \varepsilon|$", est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $m = 0$: $|u_0 - \varepsilon| = |a - \varepsilon| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \varepsilon|$, donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(m)$ vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{Q}(m+1)$ est encore vraie, soit : $|u_{m+1} - \varepsilon| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} |a - \varepsilon|$.

On a supposé (H.R.) que $|u_m - \varepsilon| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m |a - \varepsilon|$, donc $\frac{1}{2}|u_m - \varepsilon| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} |a - \varepsilon|$.

Comme $|u_{m+1} - \varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}|u_m - \varepsilon|$, alors par transitivité de l'inégalité, $|u_{m+1} - \varepsilon| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} |a - \varepsilon|$
$\mathcal{Q}(m+1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(m)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad |u_m - \varepsilon| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m |a - \varepsilon|.$$

12. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et symétrique et on introduit la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{cases} M_0 = A \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad M_{k+1} = \dfrac{1}{2}(M_k + M_k^{-1}) \end{cases}.$$

a) La matrice A est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : il existe une matrice diagonale D_0 et une matrice orthogonale P telles que

$$A = PD_0P^{-1} \iff D_0 = P^{-1}AP \text{ où } P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P.$$

Comme A est supposée inversible, $D_0 = P^{-1}AP$ est aussi inversible comme produit de matrices inversibles.

b) On ne peut pas échapper ici à une nouvelle récurrence pour prouver que $\mathcal{R}(k)$: "M_k est bien définie et inversible et $D_k = P^{-1}M_kP$ est diagonale et inversible", est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ $M_0 = A$ est défini par l'énoncé et est bien supposée inversible, et $D_0 = P^{-1}AP$ est inversible d'après a), donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{R}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{R}(k+1)$ est encore vraie.

Puisque par hypothèse de récurrence, M_k est supposée bien définie et inversible, alors $M_{k+1} = \frac{1}{2}(M_k + M_k^{-1})$ est bien définie.

De plus : $D_{k+1} = P^{-1}M_{k+1}P = \frac{1}{2}\big(P^{-1}M_kP + P^{-1}M_k^{-1}P\big) = \frac{1}{2}(D_k + D_k^{-1})$, où :

- D_k est par hypothèse de récurrence diagonale et inversible, donc son inverse D_k^{-1} est aussi diagonale : $D_{k+1} = \frac{1}{2}(D_k + D_k^{-1})$ est encore diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales.

- En notant $d_{k,i}$ l'élément diagonal de D_k à la place (i, i) pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:
  chaque $d_{i,k}$ est non-nul puisque D_k est inversible, et les éléments diagonaux de D_{k+1} sont les réels $\frac{1}{2}\Big(d_{k,i} + \frac{1}{d_{k,i}}\Big) = \frac{(d_{k,i})^2 + 1}{2d_{k,i}}$.
  Ce sont bien des réels tous non nuls comme quotients d'un réel strictement positif par un réel non nul, donc D_{k+1} est une matrice diagonale sans aucun élément diagonal nul : c'est une matrice inversible.
- La matrice $M_{k+1} = PD_{k+1}P^{-1}$ est alors elle aussi inversible, comme produit de trois matrices qui le sont.

Ainsi, $\mathcal{R}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{R}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

c) La relation : $D_{k+1} = \frac{1}{2}\big(D_k + D_k^{-1}\big)$, vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, est équivalente par identification des coefficients sur la diagonale de ces matrices, à :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad d_{k+1,i} = \frac{1}{2}\Big(d_{k,i} + \frac{1}{d_{k,i}}\Big).$$

Pour chaque entier $i \in [\![1\,;n]\!]$, la suite $(d_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la relation de récurrence étudiée à la question 11., et commence toujours par un premier terme $d_{0,i}$ non nul puisque D_0 est inversible : le résultat de 11.c) assure alors que

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \lim_{k\to+\infty} d_{k,i} \in \{-1\,;1\} \Longrightarrow \forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \lim_{k\to+\infty} d_{k,i}^2 = 1.$$

Ce résultat signifie que la suite $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge coefficient par coefficient vers une matrice diagonale D dont tous les éléments diagonaux appartiennent à $\{-1\,;1\}$, et par conséquent, toujours pour cette convergence coefficient par coefficient :

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = \lim_{k\to+\infty} PD_kP^{-1} = PDP^{-1}.$$

En notant L cette "matrice limite", on a alors : $L^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, où $D^2 = I_n$ puisque D^2 est diagonale et ses éléments diagonaux sont tous égaux à 1 puisqu'ils sont les carrés des éléments de D qui valent tous 1 ou -1.

La matrice L^2 est alors égale à $PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$.

d) i. Observons pour commencer qu'avec les définitions précédemment introduites :
pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
||M_k - L||_2 &= \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}(M_k - L)(M_k - L)\big) = \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}(PD_kP^{-1} - PDP^{-1})(PD_kP^{-1} - PDP^{-1})\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}P^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}(D_k - D)\,{}^{\mathrm{t}}P \times P(D_k - D)P^{-1}\big) = \mathrm{Tr}\big(P\,{}^{\mathrm{t}}(D_k - D)(D_k - D)P^{-1}\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(P^{-1}P\,{}^{\mathrm{t}}(D_k - D)(D_k - D)\big) = \mathrm{Tr}\big({}^{\mathrm{t}}(D_k - D)(D_k - D)\big) \\
&= ||D_k - D||_2.
\end{aligned}$$

Mais alors, d'après 9. :

$$||M_k - L||_2 = ||D_k - D||_2 \leqslant n \times \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |(D_k)_{i,j} - D_{i,j}|.$$

Or les éléments de D_k sont tous nuls en-dehors de la diagonale, et ce sont sinon (sur la diagonale) les valeurs propres de A, tandis que les éléments de D sont soit nuls (en-dehors de la diagonale), ou égaux à 1 ou -1 (sur la diagonale).

Par conséquent : dès que $i \neq j$, $(D_k)_{i,j} - D_{i,j} = 0$, et par conséquent le maximum voulu est à chercher parmi les éléments diagonaux :

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |(D_k)_{i,j} - D_{i,j}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |(D_k)_{i,i} - D_{i,i}|.$$

Or comme on l'a déjà dit en 12.b), les suites $\big((D_k)_{i,i}\big)_{k\in\mathbb{N}} = (d_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ suivent une relation de récurrence du même type que celle étudiée à la question 11., et $\varepsilon_i = D_{i,i}$ sa limite, appartient à $\{-1\,;1\}$: d'après 11.e), on en déduit :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \forall k\in\mathbb{N},\quad |d_{k,i} - \varepsilon_i| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k |d_{0,i} - \varepsilon_i| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \big(|d_0,i| + |\varepsilon_i|\big) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \big(\rho(A)+1\big).$$

puisque les éléments diagonaux de D_0 sont les valeurs propres de A qui lui est semblable, donc sont en valeur absolue tous inférieurs à $\rho(A)$ par définition de ce dernier.

On a donc bien :

$$||M_k - L||_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |(D_k)_{i,i} - D_{i,i}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^m \big(1+\rho(A)\big).$$

ii. Soit $k\in\mathbb{N}$. Si on reprend les formules employées à la question 9. : $||D_k - D||_2$ est la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de la matrice $(D_k - D)$.

Comme ces coefficients sont tous nuls en-dehors de la diagonale, on a en fait :

$$||M_k - L||_2 = ||D_k - D||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_{k,i} - \varepsilon_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \big(1+\rho(A)\big)\right)^2} \leqslant \sqrt{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \big(1+\rho(A)\big).$$

e) **Informatique.**

La fonction ci-dessous calcule de proche en proche les matrices $(M_k)_{k\geqslant 0}$ jusqu'à ce qu'on ait $\sqrt{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\big(1+\rho(A)\big) \leqslant 10^{-3}$ pour la première fois : on aura alors aussi $||M_k - L||_2 \leqslant 10^{-3}$.

Notons que la commande `al.eig(A)[0]` (dont l'énoncé aurait pu rappeler le sens... de même que les autres fonctions `Python` utilisées ici !) renvoie la liste des valeurs propres de la matrice A.

Le réel $\rho(A) = \max\big\{|\lambda|\,;\ \lambda\in\mathrm{Sp}(A)\big\}$ est alors le maximum entre les valeurs absolues de la plus petite et de la plus grande des valeurs propres de A :

```python
def suite_matricielle(A):
    n = len(A)   # nombre de lignes de A
    v = al.eig(A)[0]  # liste des valeurs propres de A
    x, y = max(v), min(v) # toute valeur propre de A est comprise entre x et y
    U, k = A, 0
    rho = max(np.abs(x), np.abs(y))
    while np.sqrt(n)*(1/2)**k*(1+rho) > 10**(-3):
        k = k+1
        U = 1/2*(U+al.inv(U))   # on aurait pu/du l'appeler M plutot...
    return U
```

Problème 2

Dans tout le problème, on considère un paramètre réel $\lambda > 0$ et une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

Partie 1 : Préliminaires

1. On introduit, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'intégrale : $\quad I_m = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^m e^{-u} \mathrm{d}u.$

   La fonction Gamma figure dans le programme officiel et permet de justifier directement que pour tout $m \in \mathbb{N},\ I_m = \Gamma(m+1)$ converge puisque $m \in \mathbb{N}$, donc $m+1 \geqslant 1 > 0$,

   et aussi que : $\quad \forall m \in \mathbb{N},\ I_{m+1} = \Gamma(m+2) = (m+1)\Gamma(m+1) = (m+1)I_{m+1}$.

   La récurrence ne porterait alors que sur le fait que $I_m = m!$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, ce qui est très facile à rédiger.

   Par acquis de conscience, on peut tout redémontrer en prouvant que $\mathcal{P}(m)$: "I_m converge et $I_m = m!$" est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $m = 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^0 e^{-u} \mathrm{d}u = \lim_{A\to+\infty} \Big[-e^{-u}\Big]_0^A = \lim_{A\to+\infty} 1 - e^{-A} = 1 = 0!$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(m+1)$ est encore vraie.

   Soit $A > 0$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A u^{m+1} e^{-u} \mathrm{d}u$, on réalise une intégration par parties en posant :

   $$\begin{aligned} f(u) &= u^{m+1} &\longrightarrow\quad f'(u) &= (m+1)u^m \\ g'(u) &= e^{-u} &\longrightarrow\quad g(u) &= -e^{-u} \end{aligned}$$

   Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$, donc par intégration par parties :

   $$\int_0^A u^{m+1} e^{-u} \mathrm{d}u = \Big[-u^{m+1}e^{-u}\Big]_0^A + (m+1)\int_0^A u^m e^{-u} \mathrm{d}u = -A^{m+1}e^{-A} + (m+1)\int_0^A u^m e^{-u} \mathrm{d}u.$$

   Puisque $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{m+1}e^{-A} = 0$ par croissances comparées, et puisque I_m converge par hypothèse de récurrence, alors I_{m+1} converge et on peut passer à la limite dans l'égalité précédente lorsque A tend vers $+\infty$, pour obtenir :

   $$\int_0^{+\infty} u^{m+1} e^{-u} \mathrm{d}t = I_{m+1} = (m+1)\int_0^{+\infty} u^m e^{-u} \mathrm{d}t = m(+1)I_m \overset{H.R.}{=} (m+1) \times m! = (m+1)!,$$

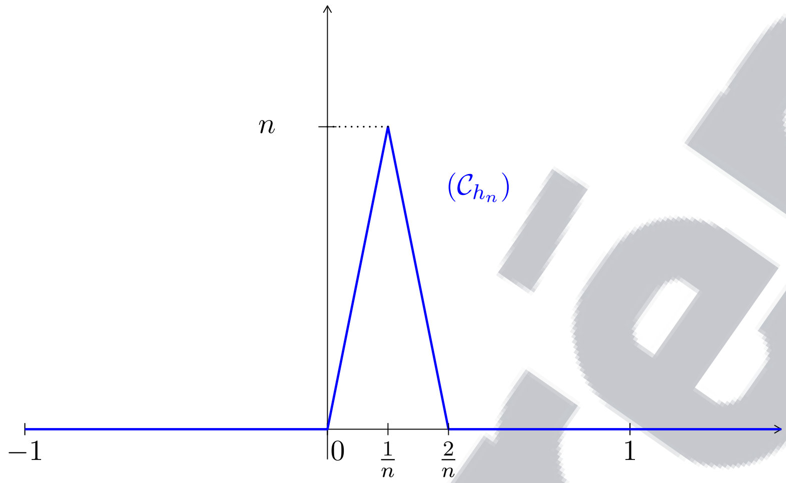
   donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(m)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

2. On considère, pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$h_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & \text{si } 0 < t \leqslant \frac{1}{n} \\ n^2\Big(\dfrac{2}{n} - t\Big), & \text{si } \frac{1}{n} < t \leqslant \frac{2}{n} \\ 0, & \text{si } t \notin \big]0\,;\frac{2}{n}\big] \end{cases}.$$

a) La fonction h_n est affine strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{1}{n}\right]$, puis affine strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{n}\,;\frac{2}{n}\right]$, et enfin constante nulle en-dehors de ces deux intervalles.
Une étude rapide des limites en 0, $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$ permet de vérifier que c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.



La fonction h_n est ainsi :

- positive sur $\mathbb{R}$: c'est évident en-dehors de $\left]0\,;\frac{2}{n}\right]$ où elle est constante nulle et sur $\left]0\,;\frac{1}{n}\right]$, où $h_n(t) = n^2t$ avec $t > 0$ et $n^2 > 0$. Pour tout $t \in \left]\frac{1}{n}\,;\frac{2}{n}\right]$, $t \leqslant \dfrac{2}{n}$ donc $\dfrac{2}{n} - t \geqslant 0$ et $h_n(t) \geqslant 0$.
- La fonction h_n est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $\left]\frac{2}{n}\,;+\infty\right[$ comme fonciton constante sur ces intervalles, sur $\left]0\,;\frac{1}{n}\right[$ et $\left]\frac{1}{n}\,;\frac{2}{n}\right[$ comme fonction affine sur chacun de ces deux intervalles, donc h_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points (la vérification de la continuité sur $\mathbb{R}$ constatée dans le tracé précédent, n'est pas indispensable).
- Enfin, puisque h_n est nulle en-dehors de $\left]0\,;\frac{2}{n}\right]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2t\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (2n - n^2t)\mathrm{d}t = n^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[2nt - n^2\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \frac{n^2}{2n^2} + 4 - \frac{4n^2}{2n^2} - 2 + \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

donc h_n peut bien être considérée comme une densité de probabilité.

b) Soit $t \in [0\,;1]$ fixé : puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}$, alors si $t > 0$, pour n assez grand $t > \dfrac{2}{n}$ et dans ce cas $h_n(t) = 0$, si $t = 0$ on a $h_n(t) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.
Par conséquent : $\quad \forall t \in [0\,;1], \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = 0$.

c) D'après ce qui précède : $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t = 1$ puisque $\left[0\,;\frac{2}{n}\right] \subset [0\,;1]$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 0 \ \mathrm{d}t = 0.$$

Partie 2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ admettent chacune une espérance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda}$ d'après le cours sur la loi exponentielle, donc par linéarité de l'espérance $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ admet une espérance qui vaut :

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(Y_i) = \frac{n}{\lambda}.$$

Les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ admettent chacune une variance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}$ et elles sont mutuellement indépendantes, donc S_n admet une variance qui vaut :

$$\mathbf{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(Y_i) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

4. a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On pose $X_i = \lambda Y_i$. Pour tout réel x :

$$\mathbf{P}(X_i \leqslant x) = \mathbf{P}(\lambda Y_i \leqslant x) \overset{\lambda>0}{=} \mathbf{P}\big(Y_i \leqslant \tfrac{x}{\lambda}\big) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda . \frac{x}{\lambda}} & \text{si } \frac{x}{\lambda} \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } \frac{x}{\lambda} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

La loi de X_i est caractérisée par sa fonction de répartition, qui est celle de la loi exponentielle de paramètre 1.

b) Le programme officiel permet de déterminer directment la loi de $\lambda S_n = X_1 + \cdots + X_n$: les X_i sont mutuellement indépendantes d'après le lemme des coalitions, puisque les Y_i le sont, et comme X_i suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ qui correspond aussi à la loi gamma $\gamma(1)$, alors le théorème de stabilité de cette loi par somme indépendante, assure que λS_n suit la loi gamma $\gamma(n)$.

Rédigeons la récurrence exigée qui démontre ce résultat de cours :
pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{Q}(n)$: "λS_n suit la loi gamma $\gamma(n)$".

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$, $\lambda S_n = \lambda Y_1 = X_1$ suit bien la loi $\gamma(1)$: $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{Q}(n+1)$ est encore vraie.

On sait que $\lambda S_{n+1} = X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1}$. La mutuelle indépendance des $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ implique celle des deux variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1}, toujours par le lemme des coalitions.

Or par hypothèse de récurrence, $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\gamma(n)$, et X_{n+1} suit la loi $\gamma(1)$: le théorème de stabilité du cours pour celle loi, assure que $X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1}$ suit la loi $\gamma(n+1)$, donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

c) Une densité de la variable aléatoire λS_n est alors la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} = \dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, la variable aléatoire $S_n = \dfrac{1}{\lambda} \times \lambda S_n$ admet pour densité, en tant que transformée affine de λS_n, la fonction f_{S_n} définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f_{S_n}(t) = \frac{1}{1/\lambda} f_n\Big(\frac{t}{1/\lambda}\Big) = \lambda f_n(\lambda t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda t \leqslant 0 \iff t \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1} & \text{si } \lambda t > 0 \iff t > 0 \end{cases}.$$

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ est presque-sûrement bien définie puisque $S_n(\Omega) =]0\,;+\infty[$, et admet une espérance si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda S_n}$ en admet une (conséquence de la linéarité de l'espérance).

La fonction inverse étant continue sur $]0\,;+\infty[$: d'après le théorème de transfert, cette espérance

existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_n(t)\mathrm{d}t$ converge. Comme la fonction $t \mapsto tf_n(t)$ est nulle sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $]0\,;+\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-2}e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} I_{n-2}$.
Comme on l'a vu à la question 1., $I_{n-2} = \Gamma(n-1)$ converge si et seulement si $n > 1 \iff n \geqslant 2$, et dans ce cas :

$$\mathbf{E}\Big(\frac{1}{\lambda S_n}\Big) = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} \iff \mathbf{E}\Big(\frac{1}{S_n}\Big) = \frac{\lambda}{n-1}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, et comme précédemment c'est le cas si et seulement si $\dfrac{1}{(\lambda S_n)^2}$ admet une espérance, ce qui se produit si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-3}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
On reconnaît $\dfrac{1}{(n-1)!} I_{n-3} = \dfrac{1}{(n-1)!}\Gamma(n-2)$, qui converge si et seulement si $n-2 > 0$ $\iff n > 2 \iff n \geqslant 3$ (n est entier). Le cas échéant :

$$\mathbf{E}\Big(\frac{1}{(\lambda S_n)^2}\Big) = \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \iff \mathbf{E}\Big(\frac{1}{S_n^2}\Big) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}.$$

La variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet alors une variance si et seulement si $n \geqslant 3$, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}\Big(\frac{1}{S_n}\Big) = \mathbf{E}\Big(\frac{1}{S_n^2}\Big) - \Big(\mathbf{E}\Big(\frac{1}{S_n}\Big)\Big)^2 = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} = \frac{\lambda^2\big(n-1-(n-2)\big)}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $W_n = \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}$.

6. La variable aléatoire W_n est une fonction affine de S_n qui admet une densité : on sait donc d'après le cours, que W_n admet elle-même une densité donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{W_n}(t) = \frac{1}{\lambda/\sqrt{n}} f_{S_n}\Big(\frac{t+\sqrt{n}}{\lambda/\sqrt{n}}\Big) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\Big(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\cdot(t+\sqrt{n})\Big) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\Big(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\Big).$$

7. a) Les variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, admettent une espérance et une variance non nulle, donc le Théorème Central Limite s'applique, qui assure que la suite $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires centrées réduites associées aux variables $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, converge en loi vers une variable aléatoire Z qui suit la loi normale centrée, réduite.
Or : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sigma(S_n)} \overset{q.3.}{=} \dfrac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}\Big(S_n - \dfrac{n}{\lambda}\Big) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n} = W_n,$
d'où le résultat demandé : la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z.

b) Ce théorème central limite assure ainsi que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} F_{W_n}(1) - F_{W_n}(0) = \Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

où Φ et φ désignent respectivement, la fonction de répartition et la densité usuelle de la loi normale centrée, réduite.

Partie 3 : Estimation de λ par maximum de vraisemblance

On suppose que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer à partir d'un n-échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_λ une densité de Y_1.

On utilise la méthode dite du *maximum de vraisemblance.*

8. On considère la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, définie sur $(\mathbb{R}+^*)^{n+1}$ par

$$L:\ (\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k).$$

On pose ensuite $\psi = \ln \circ L$.

Pour tout $(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$:

$$L(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda e^{-\lambda x_k}) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

$$\text{donc } \psi(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln\big(L(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \boxed{= n\ln(\lambda) - \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}\ .$$

9. Sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$, les fonctions $p_0 :\ (\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \lambda$ et $f :\ (\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \lambda(x_1 + \cdots + x_n)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ car polynômiales, et p_0 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur lequel ln est de classe $\mathcal{C}^1$.

Par composition et différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\psi = n * \ln \circ p_0 - f$ est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$:

$$\partial_1\psi(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\lambda} - (x_1 + \cdots + x_n) \text{ et } \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \partial_{i+1}\psi(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = -\lambda.$$

(*il a fallu gérer le décalage d'indice entre la notation pour les dérivées partielles et les x_i : la dérivée partielle de ψ par rapport à x_i est $\partial_{i+1}\psi$ à cause de la variable supplémentaire λ en première position.*)

Puisque $\lambda > 0$, il est alors clair que les n dernières dérivées partielles ne s'annulent jamais : ψ n'admet aucun point critique sur $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$.

10. On suppose les x_i fixés (strictement positifs) et on considère alors la fonction $\varphi :\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(\lambda) = \ln\big(L(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \overset{q.8.}{=} n\ln(\lambda) - \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Cette fonction de la seule variable λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, et :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

donc :

$$\varphi'(\lambda) > 0 \iff \frac{n}{\lambda} > x_1 + x_2 + \cdots + x_n \iff \lambda < \frac{n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

En notant $\hat{z} = \dfrac{n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$, qui est bien strictement positif : φ est donc strictement croissante sur $]0\,;\hat{z}]$, puis strictement décroissance sur $[\hat{z}\,;+\infty[$, elle admet donc un maximum en $\hat{z}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(\lambda) \leqslant \varphi(\hat{z}) &\iff \forall \lambda > 0, \quad \ln\big(L(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \leqslant ln\big(L(\hat{z}, x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \\ &\iff \forall \lambda > 0, \quad L(\lambda, x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant L(\hat{z}, x_1, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

par stricte croissance du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose dorénavant, pour $n \geqslant 3$, $\quad Z_n = \dfrac{n}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}$.

L'estimateur Z_n est appelé *estimateur du maximum de vraisemblance* pour λ.

11. En remarquant que $Z_n = n \times \dfrac{1}{S_n}$: d'après la question 5., Z_n admet bien pour $n \geqslant 3$ une espérance et une variance qui valent

$$\mathbf{E}(Z_n) = n \times \mathbf{E}\Big(\frac{1}{S_n}\Big) = \frac{n}{n-1}\lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Z_n) = n^2 \times \mathbf{V}\Big(\frac{1}{S_n}\Big) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2.$$

La variable aléatoire Z_n est bien un estimateur du paramètre λ car elle est presque-sûrement bien définie par une expression qui ne dépend pas explicitement de λ, et le biais de Z_n vaut $b_\lambda(Z_n) = \mathbf{E}(Z_n) - \lambda = -\dfrac{1}{n-1}\lambda < 0$: Z_n est un estimateur biaisé de λ, mais puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} b_\lambda(Z_n) = 0$, Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de λ.

12. Soit $n \geqslant 3$. La linéarité de l'espérance permet d'écrire : $\mathbf{E}\Big(\dfrac{n-1}{n}Z_n\Big) = \dfrac{n-1}{n}\mathbf{E}(Z_n) = \lambda$, donc $\tilde{Z}_n = \dfrac{n-1}{n}Z_n = \dfrac{n-1}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}$ est un estimateur sans biais pour λ.

On a alors : $\mathbf{V}(\tilde{Z}_n) = \dfrac{(n-1)^2}{n^2}\mathbf{V}(Z_n) = \dfrac{\lambda^2}{n^2(n-2)}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\tilde{Z}_n$ est bien un estimateur sans biais convergent pour λ.

13. Soit $\alpha \in]0\,;1[$. On note $t_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$. D'après 7.a) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big(Z_n\Big(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big) \leqslant \lambda \leqslant Z_n\Big(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big)\Big) &= \mathbf{P}\Big(\frac{n}{S_n}\Big(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big) \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{S_n}\Big(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \\
&= \mathbf{P}\Big(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\lambda}{n}S_n \leqslant 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big) \qquad \text{car } \frac{n}{S_n} \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \\
&= \mathbf{P}\Big(-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\lambda}{n}S_n - 1 \leqslant \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big) = \mathbf{P}\Big(-t_\alpha \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{n}}S_n - \sqrt{n} \leqslant t_\alpha\Big) \\
&= \mathbf{P}(-t_\alpha \leqslant W_n \leqslant t_\alpha)
\end{aligned}$$

donc d'après 7.a) et le théorème central limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\Big(Z_n\Big(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big) \leqslant \lambda \leqslant Z_n\Big(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big)\Big) &= \mathbf{P}(-t_\alpha \leqslant Z \leqslant t_\alpha) \\
&= \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) \qquad \text{or } \Phi(-t_\alpha) = 1 - \Phi(t_\alpha) \\
&= 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 2(1-\alpha/2) - 1 \\
&= 1 - \alpha,
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien, que $\Big[Z_n\Big(1 - \dfrac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big)\,;Z_n\Big(1 + \dfrac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\Big)\Big]$ est un intervalle de confiance asymptotique au seuil (ou niveau de confiance) $1-\alpha$ pour λ.

14. **Informatique.**
La fonction ci-dessous prend en argument un réel α et un n-échantillon Y d'une loi exponentielle de paramètre λ et renvoie l'intervalle de confiance précédent.

```
def IdC(alpha, Y) :
    n = len(Y)
    Z = n/np.sum(Y)
    t = sp.ndtri(1-alpha/2)
    A = Z*(1-t/np.sqrt(n))    # borne de gauche de l'IdC
    B = Z*(1+t/np.sqrt(n))    # borne de droite de l'IdC
    return [A, B]
```

On a simplement appliqué la définition de $Z_n = \dfrac{n}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}$ et ensuite calculé les deux bornes de l'intervalle de confiance asymptotique données dans la question précédente.

15. **Application.**

Dans la figure issue de l'exécuttion du script fourni par l'énoncé, sont affichés 12 intervalles de confiance matérialisés par les segments horizontaux dessinés les uns sous les autres.

À chaque fois, le point d'abscisse $1/10$ est matérialisé qui représente la valeur donnée au paramètre λ_0. Avec la définition donnée par l'énoncé, on constate ici que le test rejette (au seuil α) l'hypothèse 9 fois sur 12, $1/10$ n'appartenant pas dans tous ces cas à l'intervalle de confiance calculé.

On peut donc dire qu'il est très peu probable, au vu des tests réalisés, que le paramètre de la durée de vie des composants produits, soit égal à $1/10$. Il est probablement supérieur, et comme l'espérance d'une loi exponentielle est l'*inverse* du paramètre, les composants ont en moyenne une durée de vie inférieure au paramètre nominal voulu, ce qui doit être interprété comme un signe de mauvaise qualité de la production.

Partie 4 : Une convergence sous le signe intégrale

On reprend les notations de la **Partie 2**. On introduit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

16. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{2\pi(n+1)} \times n!}{(n+1)!n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^n \times (n+1) \times e^{-n} \times e^{-1} \times \sqrt{2\pi} \times \sqrt{n+1} \times n!}{n! \times (n+1) \times n^n \times e^{-n} \times \sqrt{2\pi} \times \sqrt{n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} \times e^{-1}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) = (n+\tfrac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Après cette grosse opération (classique mais difficile) de simplification : puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on peut utiliser la formule du Taylor-Young qui donne le développement limité de $\ln(1+x)$ lorsque x est au voisinage de 0, à l'ordre 3 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Longrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

$$\Longrightarrow (n+\tfrac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}\Big) - 1 = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

$$\Longrightarrow v_n = \frac{1}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

ce donne bien l'équivalent : $\quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{12n^2}$ est à un facteur constant près une série de Riemann qui converge puisque $2 > 1$: le critère d'équivalence des séries à termes positifs assure alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est elle-même convergente.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est une série télescopique : sa convergence est équivalente à la convergence de la *suite* $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il existe donc $L \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \underbrace{e^L}_{\ell} > 0,$$

par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

17. En explicitant la densité f_{W_n} obtenue à la question 6., qui s'exprime elle-même en fonction de la densité de S_n obtenue à la question 5. :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\Big(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda} \leqslant 0 \\ \dfrac{\sqrt{n}}{\lambda} \cdot \dfrac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\right)} \cdot \Big(\lambda\big(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\big)\Big)^{n-1} & \text{si } \frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda} > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -\sqrt{n} \\ \dfrac{\sqrt{n}}{(n-1)!} e^{-\sqrt{n}t} e^n \big(\sqrt{n}t + n\big)^{n-1} & \text{si } t > -\sqrt{n} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -\sqrt{n} \\ \dfrac{n}{n!}\sqrt{n} e^n e^{-\sqrt{n}t} n^{n-1}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}} + 1\Big)^{n-1} & \text{si } t > -\sqrt{n} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -\sqrt{n} \\ \underbrace{\dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}}_{=u_n/\sqrt{2\pi}} \Big(1 + \dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t} & \text{si } t > -\sqrt{n}\,, \end{cases} \quad \text{CQFD.}$$

18. On introduit la fonction R définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $\forall u > -1,\ R(u) = \ln(1+u) - u + \dfrac{u^2}{2}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t > -\sqrt{n}$:

$$f_{W_n}(t) = u_n\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} \times \Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{n} \times \frac{e^{-\sqrt{n}t}}{\sqrt{2\pi}} = u_n\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} \times \frac{e^{n\ln\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= u_n\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} \times \frac{e^{n\left(R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n}\right) - \sqrt{n}t}}{\sqrt{2\pi}} = u_n\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} \times e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \times \frac{e^{\sqrt{n}t - \frac{t^2}{2} - \sqrt{n}t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= u_n\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} \times e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \times \frac{-\frac{t^2}{2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad CQFD.$$

b) La fonction $g:\ u \mapsto \ln(1+u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$, donc sur $\big[-\frac{1}{2}\,;1\big]$, avec :

$$\forall u > -1, \quad g'(u) = \frac{1}{1+u}, \quad g''(u) = -\frac{1}{(1+u)^2}, \quad g^{(3)}(u) = \frac{2}{(1+u)^3}$$

La fonction $|g^(3)|$ étant continue et positive sur le segment $\big[-\frac{1}{2}\,;1\big]$, elle y admet un maximum $K \geqslant 0$, de sorte que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, écrite au point 0 qui appartient bien au segment, donne :

$$\forall u \in \big[-\tfrac{1}{2}\,;1\big], \quad \big|g(u) - g(0) - g'(0).u - g''(0).\frac{u^2}{2}\big| \leqslant \frac{K}{3!}|u-0|^3$$

soit ici, puisque $g(0) = \ln(1) = 0$, $g'(0) = 1$ et $g''(0) = -1$, et en notant $M_1 = \dfrac{K}{3!} \geqslant 0$:

$$\forall u \in \big[-\tfrac{1}{2}\,;1\big], \quad \big|\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}\big| = |R(u)| \leqslant M_1|u|^3$$

c) Soit $t\in\mathbb{R}$: puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{t}{\sqrt{n}}=0$, alors pour n assez grand, ce réel appartient à $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et on peut écrire :

$$\left|R\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|\leqslant M_1\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right|^3\Longrightarrow 0\leqslant n\left|R\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|\leqslant\frac{M_1|t|^3}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M_1|t|^3}{\sqrt{n}}=0$, le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n\to+\infty}n\left|R\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|=0\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}nR\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)=0\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}=e^0=1$$

par continuité de l'exponentielle en 0.

De plus, pour t fixé, lorsque n tend vers $+\infty$, $-\sqrt{n}$ tend vers $-\infty$ donc $t\leqslant-\sqrt{n}$ n'est jamais vrai lorsque n est assez grand, et :

$$\lim_{n\to+\infty}f_{W_n}(t)=\lim_{n\to+\infty}u_n\Big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1}\times e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}\times\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}=\ell\times1^{-1}\times1\times\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}}=\ell f_Z(t),$$

où f_Z désigne la densité de la variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

19. a) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0;1]$, $\quad g_n(t)=\Big(1+\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1}e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}$.

i. La fonction $t\mapsto\frac{t}{\sqrt{n}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, à valeurs dans $\left[0;\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\subset[0;1]$ sur lequel R et la fonction $u\mapsto(1+u)^{-1}=\dfrac{1}{1+u}$ sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$: par composition, produit, et vu que exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction g_n est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, avec :

$$\forall t\in[0;1],\quad g_n'(t)=-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-2}e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}+\Big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1}\times\frac{n}{\sqrt{n}}R'\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)},$$

d'où, pour tout $t\in[0;1]$:

$$\begin{aligned}|g_n'(t)|&=\left|-\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\big)^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{t}\sqrt{n}}\times\sqrt{n}R'\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|\times e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}\\&\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\times\underbrace{\frac{1}{\big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\big)^2}}_{\leqslant1}+\sqrt{n}\times\underbrace{\frac{1}{1+\frac{t}{\sqrt{n}}}}_{\leqslant1}\times\left|R'\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|\right)\times e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}\\&\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}\left|R'\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|\right)e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}\end{aligned}$$

ii. On a déjà dit que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

$$\forall u\in[0;1],\quad R'(u)=\frac{1}{1+u}-1+u=\frac{1-1-u+u+u^2}{1+u}=\frac{u^2}{1+u}\leqslant u^2,$$

donc on a bien : $\quad\forall u\in[0;1],\ |R'(u)|\leqslant M_2u^2$ avec $M_2=1\geqslant0$.

iii. De la question précédente, on déduit que pour tout $t\in[0;1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{t}{\sqrt{n}}\in[0;1]$, donc

$$\left|R'\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|\leqslant M_2\frac{t^2}{n}\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}\left|R'\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right|\leqslant\frac{1+M_2t^2}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1+M_2}{\sqrt{n}},$$

et d'après 18.b) : $\quad R\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big) \leqslant \Big|R\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big| \leqslant M_1 \dfrac{t^3}{\sqrt{n}} \leqslant M_1 \Longrightarrow e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \leqslant e^{M_1}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0\,;1], \quad |g_n'(t)| \leqslant \frac{(1+M_2).e^{M_1}}{\sqrt{n}}$$

En posant $C_1 = (1+M_2).e^{M_1} \geqslant 0$: $\dfrac{C_1}{\sqrt{n}}$ est un majorant de $|g_n'|$ sur $[0\,;1]$, donc on peut appliquer l'Inégalité des Accroissements Finis à g_n qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, pour obtenir :

$$\forall t \in [0\,;1], \quad \big|g_n(1) - g_n(0)\big| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}}.|t-0| \Longrightarrow |g_n(t) - 1| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}}|t| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}}.$$

iv. On utilise le résultat précédent et l'inégalité triangulaire pour écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0\,;1], \quad |g_n(t)| = |g_n(t) - 1 + 1| \leqslant |g_n(t) - 1| + 1 \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}} + 1 \leqslant \underbrace{C_1 + 1}_{=C_2 \geqslant 0}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0\,;1]$:

$$\big((u_n-\ell)g_n(t)+\ell(g_n(t)-1)\big)f_Z(t) = \big(u_n g_n(t)-\ell\big)f_Z(t) = u_n\Big(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - \ell f_Z(t) = f_{W_n}(t) - \ell f_Z(t).$$

Les fonctions ici concernées sont toutes continues sur $[0\,;1]$ et $0<1$, donc d'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \ell f_Z(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \big(f_{W_n}(t) - \ell f_Z(t)\big)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 |f_{W_n}(t) - \ell f_Z(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \big|(u_n-\ell)g_n(t) + \ell(g_n(t)-1)\big|f_Z(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0\,;1]$, puisque $f_Z(t) \geqslant 0$:

$$\big|(u_n-\ell)g_n(t)+\ell(g_n(t)-1)\big|f_Z(t) \leqslant \big(|u_n-\ell|\cdot|g_n(t)|+\ell\big|g_n(t)-1\big|\big)f_Z(t) \leqslant \Big(C_2|u_n-\ell|+\frac{\ell C_1}{\sqrt{n}}\Big)f_Z(t).$$

Les fonctions comparées sont continues sur $[0\,;1]$ et $0<1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \big|(u_n-\ell)g_n(t)+\ell(g_n(t)-1)\big|f_Z(t)\mathrm{d}t \leqslant \Big(C_2|u_n-\ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}}\Big)\int_0^1 f_Z(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui implique bien, par transitivité de l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \ell f_Z(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \Big(C_2|u_n-\ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}}\Big)\int_0^1 f_Z(t)\mathrm{d}t.$$

c) Puisque $\displaystyle\int_0^1 f_Z(t)\mathrm{d}t$ est une constante, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}} = 0$ et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n-\ell| = 0$ (par définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ) : le théorème d'encadrement (une valeur absolue est toujours positive) assure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \ell f_Z(t)\mathrm{d}t\right| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \ell f_Z(t)\mathrm{d}t.$$

On est donc ici dans la situation où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_{W_n}(t)\mathrm{d}t$, ce qui correspond bien à l'objectif poursuivi dans cette question 19.

20. En reprenant le résultat précédent et en le confrontant à celui de 7.b), on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 f_Z(t)\mathrm{d}t,$$

qui est une limite non nulle devant aussi être égale à $\ell\displaystyle\int_0^1 f_Z(t)\mathrm{d}t$: le réel ℓ est donc simplement égal à 1 ! Et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \iff \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1 \iff \boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\ ,$$

c'est le fameux **équivalent de Stirling** de la factorielle.

★★★ FIN DU SUJET ★★★