MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - Ecricome 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Exercice 1

Pour toute variable discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout entier naturel k, on pose :

$$R_X(k) = \mathbf{P}(X > k).$$

Partie I

1. Soit p un réel de $]0\,;1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p.

   a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $[X > k] = [X \geqslant k+1] = \bigcup\limits_{i=k+1} [X = i]$.

   L'union est évidemment disjointe, donc par σ-additivité :

$$\mathbf{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \overset{[j=i+1]}{=} p\sum_{j=k}^{+\infty}(1-p)^j = p \times \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} \boxed{= (1-p)^k}.$$

   b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors : $\dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} \boxed{= 1-p}$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

   a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: puisque X est à valeurs entières : $[X > k-1] = [X \geqslant k] = [X = k] \cup [X > k]$ et l'union est disjointe, donc :

$$\mathbf{P}(X > k-1) = \mathbf{P}(X = k) + \mathbf{P}(X > k) \iff R_X(k-1) = \mathbf{P}(X = k) + R_X(k)$$
$$\iff \boxed{\mathbf{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)}.$$

   b) Montrons alors par double implication que X et Y suivent la même loi si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ R_X(k) = R_Y(k).$$

   - Si X et Y suivent la même loi (à valeurs dans $\mathbb{N}^*$), alors $\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{P}(Y = i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et comme au début du calcul fait à la question 1.a) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad R_X(k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i) \overset{(*)}{=} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = i) = R_Y(k).$$

     $(*)$ on utilise précisément ici le fait que X et Y suivent la même loi.

   - Réciproquement, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = R_Y(k)$ $(*)$, alors d'après la question précédente 2.a) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k) \overset{(*)}{=} R_Y(k-1) - R_Y(k) = \mathbf{P}(Y = k),$$

     donc X et Y suivent la même loi.

   On a bien démontré l'équivalence demandée.