MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - Ecricome 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Exercice 1

Pour toute variable discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout entier naturel k, on pose :

$$R_X(k) = \mathbf{P}(X > k).$$

Partie I

1. Soit p un réel de $]0\,;1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p.

   a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $[X > k] = [X \geqslant k+1] = \bigcup_{i=k+1} [X = i]$.

   L'union est évidemment disjointe, donc par σ-additivité :

   $$\mathbf{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \overset{[j=i+1]}{=} p\sum_{j=k}^{+\infty}(1-p)^j = p \times \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} \boxed{= (1-p)^k}.$$

   b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors : $\dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} \boxed{= 1-p}$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

   a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: puisque X est à valeurs entières : $[X > k-1] = [X \geqslant k] = [X = k] \cup [X > k]$ et l'union est disjointe, donc :

   $$\mathbf{P}(X > k-1) = \mathbf{P}(X = k) + \mathbf{P}(X > k) \iff R_X(k-1) = \mathbf{P}(X = k) + R_X(k)$$
   $$\iff \boxed{\mathbf{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)}.$$

   b) Montrons alors par double implication que X et Y suivent la même loi si et seulement si :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ R_X(k) = R_Y(k).$$

   - Si X et Y suivent la même loi (à valeurs dans $\mathbb{N}^*$), alors $\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{P}(Y = i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et comme au début du calcul fait à la question 1.a) :

     $$\forall k \in \mathbb{N},\quad R_X(k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i) \overset{(*)}{=} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = i) = R_Y(k).$$

     $(*)$ on utilise précisément ici le fait que X et Y suivent la même loi.

   - Réciproquement, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = R_Y(k)$ $(*)$, alors d'après la question précédente 2.a) :

     $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k) \overset{(*)}{=} R_Y(k-1) - R_Y(k) = \mathbf{P}(Y = k),$$

     donc X et Y suivent la même loi.

   On a bien démontré l'équivalence demandée.

Partie 2

3. a) Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{n!} - \dfrac{b}{(n+1)!} = \dfrac{a(n+1)-b}{(n+1)!} = \dfrac{an+(a-b)}{(n+1)!}$.

   Par identification des coefficients aux numérateurs : $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{a}{n!} - \dfrac{b}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, dès que :

$$a = 1 \text{ et } a - b = 0 \iff \boxed{a = b = 1},$$

   c'est-à-dire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

   Remarque : il est tout à fait admissible de calculer directement :

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!},$$

   et de conclure que l'égalité demandée est vraie pour $a = b = 1$.

   b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$; d'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$$

   par télescopage ; comme $\lim\limits_{N \to +\infty} (N+1)! = +\infty$, alors : $\lim\limits_{N \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{(N+1)!} = 1$, ce qui permet de conclure que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n}{(n+1)!}$ converge, et a pour somme (totale) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

4. Dans cette question, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

   (Remarque : ce simple fait est une confirmation en soi du fait que la somme précédente doit valoir 1, pour que la loi de X soit correctement définie !)

   a) D'après le théorème de transfert : la variable aléatoire $X+1$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (n+1)\mathbf{P}(X = n)$ est absolument convergente. Comme la série est à termes positifs, la convergence absolue équivaut à la convergence simple. On considère donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} (n+1)\mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1)n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} \overset{[k=n-1]}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}.$$

   On reconnaît une série exponentielle (de paramètre $x = 1$), qui est donc convergente : $\mathbf{E}(X+1)$ existe donc et vaut

$$\mathbf{E}(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e^1 = e.$$

   Par linéarité de l'espérance : $\quad X = X + 1 - 1$ admet donc une espérance qui vaut

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X+1) - 1 \boxed{= e - 1}.$$

b) De la même manière, et toujours d'après le théorème de transfert : $\mathbf{E}\big((X-1)(X+1)\big)$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(n-1)(n+1)\mathbf{P}(X=n)$ converge absolument. Là encore, il s'agit d'une série à termes positifs, et pour tout entier $N \geqslant 2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n+1)\mathbf{P}(X=n) \overset{(*)}{=} \sum_{n=2}^{N}\frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!} \overset{[j=n-2]}{=} \sum_{j=0}^{N-2}\frac{1}{j!}.$$

On reconnaît à nouveau une série exponentielle convergente, donc $\mathbf{E}\big((X-1)(X+1)\big)$ existe et vaut :

$$\mathbf{E}\big((X-1)(X+1)\big) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} = e.$$

Or : $(X-1)(X+1) = X^2-1$, donc par linéarité de l'espérance, $X^2 = (X-1)(X+1)+1$ admet une espérance, c'est-à-dire que X admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}\big((X-1)(X+1)\big)+1 = e+1.$$

La variable aléatoire X admet donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \big(\mathbf{E}(X)\big)^2 = e+1-(e-1)^2 = e+1-(e^2-2e+1) \boxed{= 3e-e^2 = e(3-e)}\ .$$

(Remarque : puisque $2 < e < 3$, la variance trouvée est bien positive !)

Partie III

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X > k]$ signifie que la durée de vie de l'appareil est strictement supérieure à k, ce qui est équivalent au fait qu'à la fin de l'année k, l'appareil est toujours en état de fonctionnement.

   Cet événement est donc réalisé si et seulement si à la fin de l'année $(k-1)$, l'appareil était encore en état de fonctionnement (événement $[X > k-1]$) **et** que l'appareil a continué à rester en fonctionnement sans encombre, jusqu'à la fin de l'année k (notons cet événement F_k).

   Ainsi : $[X > k] = [X > k] \cap F_k$, et d'après la formule des probabilités composées,

   $$\mathbf{P}(X > k) = \mathbf{P}(X > k-1) \times \mathbf{P}_{[X>k-1]}(F_k) \iff \boxed{R_X(k) = R_X(k-1)\times(1-\alpha_k)}$$

   puisque $\mathbf{P}_{[X>k-1]}(F_k) = 1-\alpha_k$ d'après les données de l'énoncé.

6. Il y a plusieurs façons possibles de rédiger cette question, la plus simple est par récurrence : montrons que $\mathcal{P}(k)$: "$R_X(k) = \prod\limits_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)$" est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par récurrence.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $k=1$: $R_X(1) = \mathbf{P}(X>1) = 1-\mathbf{P}(X=1) = 1-\alpha_1 = \prod\limits_{i=1}^{1}(1-\alpha_i)$ puisque $[X=1]$ est réalisé si et seulement si l'appareil cesse de fonctionner dès la fin de la première année ; ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie.

   D'après la question précédente :

   $$R_X(k+1) = (1-\alpha_{k+1})R_X(k) \overset{H.R.}{=} (1-\alpha_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i) = \prod_{i=1}^{k+1}(1-\alpha_i),$$

   donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

7. Le résultat de la question 2.a) peut alors s'appliquer, qui donne pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\mathbf{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i) = \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) \times \big(1-(1-\alpha_k)\big) \boxed{= \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)}.$$

Remarquons que pour $k = 1$, on a simplement $\mathbf{P}(X = 1) = \alpha_1$.

8. **Étude de deux exemples.**

   a) Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_k = p$.

   D'après la formule obtenue à la question 7., on a alors :

$$\mathbf{P}(X = 1) = p \text{ et } \forall k \geqslant 2, \quad \mathbf{P}(X = k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) = p\prod_{i=1}^{k-1}(1-p) = p(1-p)^{k-1}.$$

   On reconnaît donc dans ce cas, que X suit la loi géométrique de paramètre p.

   b) Dans cette question uniquement, on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_k = \dfrac{k}{k+1}$. Alors :

$$\mathbf{P}(X = 1) = \alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall k \geqslant 2,\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{i+1}\right) = \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i+1} = \frac{k}{(k+1)k!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

   On retrouve ici la loi de la variable aléatoire X de la question 4.

Partie IV

9. a) La requête suivante compte le nombre total d'ordinateurs produits par le fabricant :

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateurs ;
```

   b) La requête suivante compte le nombre d'ordinateurs ayant cessé de fonctionner exactement un an après leur production :

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateurs WHERE annee_panne = anne_fabrication + 1 ;
```

   c) Si la durée de vie d'un ordinateur est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p : alors p est aussi la probabilité que cette durée de vie soit égale à 1 an seulement.
   Le quotient du résultat de la requête de la question 9.b), par celui de la requête de la question 9.a), correspond à la *proportion* d'ordinateurs ayant eu une durée de vie d'un an seulement, qu'on peut utiliser pour approcher (surtout si la table contient un nombre important de données) la probabilité théorique p.

10. La requête SQL demandée consiste à réattribuer à l'attribut `duree_vie` la valeur correspondant à la différence entre les attributs `anne_panne` et `annee_fabrication`, **si** une année de panne est enregistrée, c'est-à-dire si cet attribut ne vaut plus -1 :

```
UPDATE ordinateurs SET duree_vie = anne_panne - annee_fabrication
WHERE annee_panne > -1 ;
```

11. Dans cette question, on cherche à déterminer s'il est raisonnable de représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire de loi géométrique d'un certain paramètre p que l'on cherche à approcher.

    a) La requête SQL :

```
SELECT AVG(duree_vie) FROM ordinateurs
```

calcule la durée de vie moyenne des ordinateurs enregistrés dans la base. Sous l'hypothèse que cette durée de vie suit une loi géométrique de paramètre p : l'espérance de cette loi vaut $\frac{1}{p}$, donc l'*inverse* du résultat fourni par la requête, peut constituer une valeur approchée de p.

b) Les requêtes exécutées dans cette question, calculent les proportions d'ordinateurs qui ont une durée de vie égale à 1, égale à 2, ..., égale à 24, qu'on peut utiliser pour estimer les probabilités $\mathbf{P}(X=1),\ \mathbf{P}(X=2),\ldots,\mathbf{P}(X=24)$.

Or une variable aléatoire suit une loi géométrique, de paramètre p, si et seulement si ces probabilités théoriques forment justement une suite géométrique, dont la raison est alors égale à $1-p$.

On peut donc par exemple, calculer les quotients successifs de deux résultats consécutifs de ces requêtes : si ces quotients gardent une valeur constante, alors on pourra considérer qu'il est pertinent de représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire de loi géométrique.

Exercice 2

Soit a un réel. On considère la fonction I_a définie par :

$$I_a(x)=\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\mathrm{d}t.$$

On considère également l'intégrale J_a définie par : $\quad J_a=\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t.$

Partie I

1. a) Pour $t>0$ assez grand : $\quad t^2e^{-2at-t^2}=e^{2\ln(t)-2at-t^2}=e^{t^2\left(2\frac{\ln(t)}{t^2}-\frac{2a}{t}-1\right)}$, où par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}=0\Longrightarrow\lim_{t\to+\infty}2\frac{\ln(t)}{t^2}-\frac{2a}{t}-1=-1\Longrightarrow\lim_{t\to+\infty}t^2\left(2\frac{\ln(t)}{t^2}-\frac{2a}{t}-1\right)=-\infty,$$

donc puisque $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$, par composition de limites :

$$\lim_{t\to+\infty}e^{2\ln(t)-2at-t^2}=0=\lim_{t\to+\infty}t^2e^{-2at-t^2},$$

ce qui prouve bien, que : $\quad e^{-2at-t^2}=o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$

b) La fonction $t\mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;+\infty[$, ce qui assure déjà que $\displaystyle\int_0^1 e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$ est bien définie.

De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha=2>1$; on en déduit donc, d'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, que $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1 e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

2. Pour tout réel x, et pour tout réel $t\geqslant x$: $\quad e^{2a(x-t)-t^2}=e^{2ax}\times e^{-2at-t^2}$,
donc $I_a(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{2a(x-t)-t^2}\mathrm{d}t=e^{2ax}\int_x^{+\infty}e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$ converge comme reste à un facteur constant près, d'une intégrale convergente. La fonction I_a est donc bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

3. a) Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$ converge, alors le reste de cette intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t$, tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

   Si on veut redémontrer explicitement ce point de cours, on écrit grâce à la relation de Chasles :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t = 0.$$

   b) Dans cette question uniquement, on suppose que a est positif. Soit x un réel. Pour tout réel x, et pour tout réel $t \in [x\,;+\infty[$:

$$t \geqslant x \Longrightarrow (x-t) \geqslant 0 \overset{-2a\leqslant 0}{\Longrightarrow} -2a(x-t) \leqslant 0 \Longrightarrow -2a(x-t)-t^2 \leqslant -t^2 \Longrightarrow e^{-2a(x-t)-t^2} \leqslant e^{-t^2}$$

   par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$. Les fonctions comparées sont continues sur $\mathbb{R}$ et les intégrales convergent, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} e^{-2a(x-t)-t^2}\mathrm{d}t = I_a(x) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

   c) Pour tout réel x, l'intégrale $I_a(x)$ est positive puisque la fonction intégrée est continue et positive sur $[x\,;+\infty[$, donc $0 \leqslant I_a(x)$ par positivité de l'intégrale.

D'après 3.a) avec $a=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$, donc par encadrement puisque $0 \leqslant I_a(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$:

$$\lim_{x\to+\infty} I_a(x) = 0, \text{ quel que soit le réel } x.$$

Partie II

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable :

$$y' = 2ay - e^{-x^2} \qquad (1)$$

Cette partie s'intéressait aux solutions de l'équation (1) qui vérifient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

On considère l'équation homogène associée à (1) :

$$y' = 2ay \qquad (2)$$

4. D'après le cours, l'ensemble des solutions de l'équation homogène (2) est

$$\mathcal{H} = \left\{ y : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda.e^{2ax} \middle|\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

5. On considère la fonction F_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t.$$

   a) Sous cette forme intégrale, F_a est en fait **la** primitive qui s'annule en 0 de la fonction $f_a : x \mapsto e^{-2ax-x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$. (*théorème fondamental de l'analyse*).

   À ce titre, et sans calcul, on peut conclure que F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a'(x) = f_a(x) = e^{-2ax-x^2}.$$

   b) Pour tout réel x :

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} e^{2ax}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t \overset{(**)}{=} e^{2ax}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t\right) = e^{2ax}\big(J_a - F_a(x)\big).$$

   $(*)$: par linéarité de l'intégrale, et $(**)$: d'après la relation de Chasles.

c) Sous cette forme, I_a est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_a'(x) = 2ae^{2ax}\big(J_a - F_a(x)\big) + e^{2ax} \times \big(-F_a'(x)\big) = 2aI_a(x) - e^{2ax} \times e^{-2ax-x^2} = 2aI_a(x) - e^{-x^2}.$$

Il apparaît donc en effet que I_a est une solution particulière de l'équation différentielle (1).

6. D'après le théorème de structure de l'ensemble-solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants : les solutions de (1) sont toutes les fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une solution particulière de (1), et d'une solution de l'équation homogène (2).
D'après 4. et 5.c), on en déduit l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation différentielle (1) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda.e^{2ax} + I_a(x) = \lambda.x + \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} \mathrm{d}t \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. Notons que le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$ d'après 3.c), implique que la limite en $+\infty$ d'une solution de (1) est celle du terme $\lambda.e^{2ax}$. Par conséquent :

a) Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 2ax = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2ax} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$:
Dans ce cas, quel que soit le réel λ, $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda e^{2ax} = 0$ et toutes les solutions de (1) ont pour limite 0 en $+\infty$.

b) Si $a = 0$: alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda.e^{2ax} = \lambda.e^0 = \lambda \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda$.
On en déduit que dans ce cas, la seule solution de (1) qui tend vers 0 en $+\infty$ est celle pour laquelle $\lambda = 0$, c'est-à-dire la solution I_a.

c) Si $a > 0$: alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 2ax = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2ax} = +\infty$.
Là encore donc, seule la solution pour laquelle $\lambda = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.

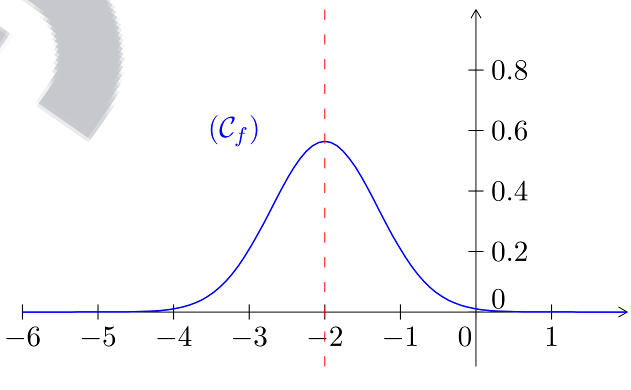
Partie III

On considère une variable aléatoire X de loi normale d'espérance $-a$ et de variance $\dfrac{1}{2}$.

8. a) D'après le cours sur la loi normale, une densité de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-(-a))^2}{2\times\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+a)^2}.$$

b) Dans le cas $a = 2$, la variable aléatoire X a pour espérance $-a = -2$: la courbe de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = -2$, $f(-2) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$
et la courbe présente l'allure caractéristique de la courbe de Gauss, en forme de "cloche" :



9. Soit x un réel.

a) Puisque X est une variable de densité f :

$$\mathbf{P}(X \geqslant x) = \mathbf{P}\big(X \in [x\,;+\infty[\big) = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2}\mathrm{d}t.$$

b) En développant $-(t+a)^2 = -t^2 - 2at - a^2$, on réalise que l'on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(X \geqslant x) = \frac{e^{-2ax-a^2}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{2ax-2at-t^2}\mathrm{d}t \iff \underbrace{\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\mathrm{d}t}_{=I_a(x)} = \sqrt{\pi}e^{2ax+a^2}\mathbf{P}(X \geqslant x).$$

10. a) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée, réduite.

Pour tous réels α et β, le cours nous apprend que la variable aléatoire $\alpha Z + \beta$ suit la loi normale d'espérance β et de variance α^2.

La variable aléatoire $\alpha Z + \beta$ suit donc la même loi normale que celle de X si et seulement si $\beta = -a$ et $\alpha^2 = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{2}}Z - a$ suit la même loi que X.

(*Remarque : $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ convenait aussi.*)

b) La fonction `Python` ci-dessous calcule une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}(X \geqslant x)$ via la fréquence de réalisation de l'événement $[X \geqslant x]$ sur 10000 simulations de la loi normale suivie par X :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def estim_proba(a, x):
    num = 0
    for i in range(10000):
        Z = rd.normal()  # simulation de la loi normale centree reduite
        X = -a + Z/np.sqrt(2)
        if X >= x :
            num = num + 1
    return num/10000
```

11. La relation obtenue en 9.b) permet finalement d'écrire la fonction demandée qui calcule une valeur approchée de $I_a(x)$:

```
def approx_I(a, x):
    p = estim_proba(a, x)
    return np.pi*np.exp(2*a*x+a**2)*p
```

Exercice 3

Partie I

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit la matrice $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Étude du cas $n = 3$.**

   Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème admis du cours.

   b) La matrice $M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie classiquement : $(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I)$, donc (puisque l'identité remarquable s'applique, vu que M et I commutent) :

   $$M^2 + 2MI + I^2 = 3M + 3I \iff \boxed{M^2 - M - 2I = 0_3}$$

   où 0_3 désigne la matrice nulle. Ainsi, $\boxed{P(x) = x^2 - x - 2}$ est un polynôme annulateur de M.

   c) On sait que les valeurs propres de M se trouve *parmi* les racines du polynôme P.
   Or -1 est racine évidente de P, ainsi que 2 : comme $\deg(P) = 2$, P n'a pas d'autres racines, donc

   $$\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1\,;2\}.$$

   Vérifions réciproquement si -1 et 2 sont bien valeurs propres de M, ou non :

   - Avec $\lambda = -1$: $M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est non-inversible puisque ses colonnes sont toutes égales, donc -1 est bien valeur propre de M.

     De plus, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\quad (M+I)X = 0_{3,1} \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y$

     (les trois lignes du système étaient toutes identiques).

     On en déduit : $\quad E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

     On a ainsi obtenu une famille génératrice de $E_{-1}(M)$, formée de deux vecteurs non colinéaires : cette famille est libre, et c'est une base du sous-espace propre.

   - Avec $\lambda = 2$: $\quad M - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est non-inversible, puisque la somme des éléments de chaque ligne est égale à 0, de sorte que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie : $(M - 2I)V = 0_{3,1} \iff MV = 2.V$, c'est-à-dire que ce vecteur non-nul est vecteur propre de M pour la valeur propre 2.

     Ainsi, $\dim E_2(M) \geqslant 1$: mais on a aussi $\dim E_2(M) \leqslant 1$, puisqu'on a déjà $\dim E_{-1}(M) = 2$ et puisque la somem des dimensions des sous-espaces propres de M ne peut pas dépasser 3.

     Ainsi, $\dim E_2(M) = 1$ et puisque V est un vecteur non-nul de ce sous-espace propre, il en forme une base : $\quad E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) La façon la plus simple de répondre à la question est ici de calculer le produit matriciel :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2+0 & 1+0-1 & 1-2+1 \\ 1-1+0 & 1+0+2 & 1+1-2 \\ 1-1+0 & 1+0-1 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I,$$

ce qui prouve directement que P est inversible, et que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

e) Là encore on peut répondre sans calcul : au vu des bases obtenues pour les deux sous-espaces propres de M, il est clair que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, à la base de vecteurs propres obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres $E_{-1}(M)$ et $E_2(M)$ dans cet ordre.

Par conséquent, d'après la formule de changement de base :

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

f) Montrons par récurrence, comme demandé par l'énoncé, que la propriété $\mathcal{P}(k)$: "$M^k = PD^kP^{-1}$", est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 0$: $M^0 = I$ d'une part, et d'autre part $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie, soit : $M^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$.

La relation $D = P^{-1}MP$ s'écrit aussi : $M = PDP^{-1}$, donc :

$$M^{k+1} = M \times M^k = PD \underbrace{P^{-1} \times P}_{=I_3} D^kP^{-1} = PD \times D^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1},$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

g) Soit $k \in \mathbb{N}$. En admettant, comme le fait l'énoncé, qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_k.M + b_k.I_3$, les résultats précédents permettent d'écrire :

$$M^k = a_kM + b_kI_3 \iff P^{-1}M^kP = a_kP^{-1}MP + b_kP^{-1}I_3P \iff D^k = a_k.D + b_k.I_3.$$

comme D est une matrice diagonale, cette dernière égalité s'écrit explicitement :

$$\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_k+b_k & 0 & 0 \\ 0 & -a_k+b_k & 0 \\ 0 & 0 & 2a_k+b_k \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -a_k+b_k & = (-1)^k \\ 2a_k+b_k & = 2^k \end{cases}$$

par identification des coefficients. Dans le dernier système, l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne :

$$\begin{cases} -a_k+b_k = (-1)^k \\ 3a_k = 2^k - (-1)^k \end{cases} \iff \boxed{a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3}} \text{ et } \boxed{b_k = a_k + (-1)^k = \frac{2^k + 2(-1)^k}{3}}.$$

2. **Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.**
On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Le produit matriciel de J_n par elle-même est classique, et donne la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à n, donc :

$$(J_n)^2 = n.J_n.$$

Cette relation permet alors de démontrer par récurrence, que la propriété

$$\mathcal{Q}(k) : \text{"}(J_n)^k = n^{k-1}.J_n\text{"}, \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 1$: $(J_n)^1 = J_n$ et $n^{1-1}.J_n = 1.J_n = J_n$, donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie, soit : $(J_n)^{k+1} = n^k.J_n$.

Par hypothèse de récurrence : $(J_n)^k = n^{k-1}.J_n$, donc

$$(J_n)^{k+1} = (J_n)^k \times J_n = n^{k-1}.(J_n)^2 = n^{k-1}.n.J_n = n^k.J_n.$$

Ainsi, $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

b) Il est clair que : $M_n = J_n - I_n$.

c) La matrice identité I_n commute avec J_n (comme avec toute matrice carrée d'ordre n), donc la formule du binôme de Newton s'applique, qui donne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(M_n)^k = (J_n - I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (J_n)^i (-I_n)^{k-i}$$

$$= \binom{k}{0}(J_n)^0(-I_n)^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{i} n^{i-1}.J_n.(-1)^{k-i}.I_n \quad \text{la formule de 2.a) n'est pas vraie au rang 0}$$

$$= (-1)^k.I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}\right).J_n,$$

ce qui est bien la forme attendue : $(M_n)^k = c_k.J_n + (-1)^k.I_n$ avec $c_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}$.

d) La somme qui définit le réel c_k est très proche de la formule du binôme de Newton : il y a deux éléments à gérer pour qu'elle corresponde parfaitement, qu'on met en couleur dans ce qui suit :

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i} \quad \text{la somme doit commencer au rang 0 et l'exposant de } n \text{ doit être } i \text{ seul}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i}(-1)^{k-i} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i}(-1)^{k-i} - \binom{k}{0} n^0 (-1)^{k-0}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left((n-1)^k - (-1)^k\right) = \boxed{\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}}, \quad CQFD.$$

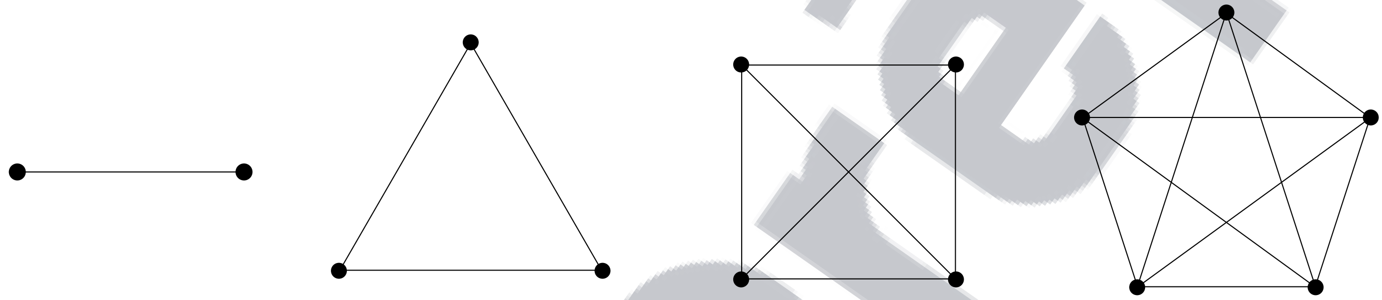
e) Le calcul explicite de $(M_n)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ s'en déduit, via la relation $(M_n)^k = c_k.J_n + (-1)^k.I_n$:

- Les éléments diagonaux de $(M_n)^k$ sont tous égaux à $c_k + (-1)^k = \dfrac{(n-1)^k + (n-1).(-1)^k}{n}$
- Les éléments non-diagonaux de $(M_n)^k$ sont tous égaux à $c_k = \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$ (la matrice identité ne contribue pas à ces places-là).

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n, dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête (*Ce type de graphe est dit* ***complet***).

3. De gauche à droite, sont tracés ci-dessous les graphes complets $K_2,\ K_3,\ K_4$ et K_5 :



4. a) Il est clair que la matrice d'adjacence du graphe K_n est la matrice M_n définie précédemment : pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient d'indices (i,j) de cette matrice est en effet le nombre d'arêtes qui relie le i-ème sommet au j-ème sommet : il vaut 1 si $i \neq j$, et 0 sinon (donc si $i = j$, ce qui correspond aux éléments diagonaux).

   b) D'après le cours : dans le graphe K_4 le nombre de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même, est égal au coefficient d'indices $(1,1)$ (donc diagonal) de la matrice $(M_4)^4$. D'après la question 2.e), avec $n = 4$ et $k = 4$ ce nombre est égal à :
$$\frac{3^4 + 3.(-1)^4}{4} = \frac{81+3}{4} = 21.$$

5. Par définition, le degré d'un sommet du graphe K_n est le nombre d'arêtes qui relient ce sommet à d'autres sommets : dans ce graphe complet K_n, le degré de chaque sommet est donc égal à $n-1$.

6. La Formule d'Euler affirme que si p désigne le nombre d'arêtes dans le graphe K_n, et d_i le degré du sommet i ($1 \leqslant i \leqslant n$), alors :
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2p \iff \sum_{i=1}^{n} (n-1) = 2p \iff n(n-1) = 2p \iff p = \frac{n(n-1)}{2}.$$
   On peut aussi donner un argument direct de dénombrement : au vu de la définition de K_n, ce graphe possède autant d'arêtes qu'il y a de façons de choisirs deux sommets distincts parmi les n possibles, donc : $p = \dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Partie III

7. Comme on se trouve forcément sur le sommet numéro 1 à l'étape $k = 0$: $\quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
   À l'étape suivante $k = 1$, on quitte forcément le sommet 1 et on parcourt avec équiprobabilité, l'une des $(n-1)$ arêtes qui relie ce sommet à chacun des autres sommets, donc $V_1 = \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \cdots \ \frac{1}{n-1}\right)$.

8. La matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constituée des probabilités (indépendantes de k) : $\quad \mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$: c'est donc clairement la matrice $\dfrac{1}{n-1}.M_n$.

9. a) Un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, est une matrice-ligne $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont tous positifs ou nuls, de somme égale à 1, telle que $YM_n = Y$.

b) Soit V la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$: ces éléments sont bien tous positifs et de somme égale à 1, et :

$$\begin{aligned} VM_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1)\times\frac{1}{n(n-1)} & (n-1)\times\frac{1}{n(n-1)} & \cdots & (n-1)\times\frac{1}{n(n-1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = V, \end{aligned}$$

donc V est bien un état stable de la chaîne de Markov.

10. a) Les matrices-lignes $(V_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont liées par la relation (demandée sans démonstration par l'énoncé :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_{k+1} = V_k \times \frac{1}{n-1}M_n \text{ ou } V_{k+1} = \frac{1}{n-1}V_kM_n$$

Rappelons que la preuve formelle vient de la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet $\big([X_k = i]\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *associé à la variable aléatoire* X_k.

b) Une dernière récurrence très facile pour conclure : montrons que $\mathcal{R}(k)$: "$V_k = \frac{1}{(n-1)^k}V_0(M_n)^k$", est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 0$: $\frac{1}{(n-1)^0}V_0(M_n)^0 = 1.V_0 \times I_n = V_0$, donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{R}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{R}(k+1)$ est encore vraie.

On sait que $V_{k+1} = \frac{1}{n-1}.V_kM_n$, donc par hypothèse de récurrence :

$$V_{k+1} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)^k}.V_0(M_n)^k \times M_n = \frac{1}{(n-1)^{k+1}}\cdot V_0(M_n)^{k+1},$$

donc $\mathcal{R}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{R}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est intitialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Les coefficients des matrices-lignes V_k et V_0 étant respectivement les $\big(\mathbf{P}(X_k = i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\big(\mathbf{P}(X_0 = i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$, la relation précédente donne :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \mathbf{P}(X_k = i) &= \frac{1}{(n-1)^k}\Big(\big(c_k + (-1)^{k+1}\big).\mathbf{P}(X_0 = i) + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} c_k\mathbf{P}(X_0 = j)\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}.\big(\frac{-1}{n-1}\big)^k\Big).\mathbf{P}(X_0 = i) + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\big(\frac{-1}{n-1}\big)^k\Big).\mathbf{P}(X_0 = j) \end{aligned}$$

Puisque $-1 < \frac{-1}{n-1} < 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty}\big(\frac{-1}{n-1}\big)^k = 0$, et par conséquent :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \lim_{k\to+\infty}\mathbf{P}(X_k = i) = \frac{1}{n}.\mathbf{P}(X_0 = i) + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{n}\mathbf{P}(X_0 = j) = \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_0 = i)}_{=1}\boxed{=\frac{1}{n}}.$$

Ce résultat signifie que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme (discrète) sur $[\![1\,;n]\!]$.

11. Remarquons que le résultat de convergence en loi qu'on vient d'établir, ne dépend pas en fait de la loi initiale de X_0 : dans tous les cas, la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers l'état stable V.

★★★ FIN DU SUJET ★★★