

Mathématiques 1 Approfondies 2024: Un cours proposé par G. Bignon

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ $({}^t P P)_{ij} = \sum_{k=1}^m ({}^t P)_{i,k} P_{k,j} = \sum_{k=1}^m \delta_{k,\sigma(i)} \delta_{k,\sigma(j)}$

Comme σ est bijective: $\sigma(i) = \sigma(j) \Leftrightarrow i = j$ d'où:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{ si } i=j \quad ({}^t P P)_{i,i} = \delta_{\sigma(i),\sigma(i)} \cdot \delta_{\sigma(i),\sigma(i)} = 1 \\ \cdot \text{ si } i \neq j \quad ({}^t P P)_{i,j} = \sum_{k=1}^m 0 = 0 \end{array} \right\} {}^t P P = \text{Im.} \quad \text{i.e. } P \in \text{O}_m(\mathbb{R})$$

$$\cdot ({}^t P)_{i,j} = P_{j,i} = \delta_{j,\sigma(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \text{ i.e. } i = \sigma^{-1}(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{\sigma^{-1}(j),i}$$

Ainsi P est la matrice associée à la permutation σ^{-1} .

2. Premièrement, $Q_{ij}^2 = 1 \Leftrightarrow Q$ a ses coefficients égaux à ± 1 ou -1

$$\cdot {}^t Q Q = m \text{Im} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket ({}^t Q Q)_{i,i} = m \text{ et } \forall i \neq j ({}^t Q Q)_{i,j} = 0$$

$$\text{on } ({}^t Q Q)_{i,j} = \sum_{k=1}^m Q_{k,i} \cdot Q_{k,j} = \langle Q_i, Q_j \rangle \text{ où } Q_i \text{ est la } i\text{-ième colonne de } Q.$$

$$\text{De plus } ({}^t Q Q)_{i,i} = \sum_{k=1}^m Q_{k,i}^2 = 1 \text{ lorsque } Q_{k,i}^2 = 1.$$

3. H est de Hadamard donc ${}^t H H = m \text{Im}$ i.e. ${}^t H \left(\frac{1}{m} H\right) = \text{Im}$

$$\text{d'où } {}^t ({}^t H) H = H {}^t H = m \left(\frac{1}{m} H\right) {}^t H = m ({}^t H)^{-1} {}^t H = m \text{Im.}$$

de plus la seconde condition de l'équivalence de 2 est évidente:

${}^t H$ est donc aussi de Hadamard d'après Q2.

4. Le produit à droite (resp. à gauche) par D , matrice diagonale ne comportant

que des -1 ou 1 , multiplie les colonnes (resp. les lignes) de H par -1 ou 1

donc les coefficients valent encore -1 ou 1

$D \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}(n) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(n)$

de plus ${}^t(DH)DH = {}^tH {}^tD DH = {}^tH D^2 H = {}^tH I_m H = H$
 de même pour HD donc d'après 2: DH et HD sont de Hadamard.

Le produit par la matrice de permutation P échange l'ordre des coefficients*
 de H donc les coefficients de PH sont toujours de -1 ou 1 , de plus
 ${}^t(PH)PH = {}^tH {}^tPPH = m I_m$ d'après 1 (${}^tPP = I_m$)
 de même pour HP , donc PH et HP sont de Hadamard.

*: $(PH)_{i,j} = \sum_{k=1}^m d_{i,\sigma(k)} H_{k,j} = H_{\sigma(i),j} = \pm 1$.

5- Écrivons $H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_m \\ * & & * \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Posons $D = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$
 on a donc $HD = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_m^2 \\ * & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ * & & * \end{pmatrix}$ de Hadamard d'après 4.

6- Soit \mathcal{Q} de Hadamard de 1^{ère} ligne $(1 \dots 1)$. La ligne 1 est \perp à la ligne 2 :

$$\sum_{i=1}^m 1 \times \mathcal{Q}_{2,i} = 0. \text{ Notons } d \text{ le nombre de } 1 \text{ présents sur la ligne } 2. \text{ Alors:}$$

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{Q}_{2,i} = d \times 1 + (m-d) \times (-1), \text{ d'où } m-2d = 0 \text{ i.e. } m=2d : m \text{ est pair.}$$

$$7- \sum_{k=1}^m (\mathcal{S}_{i,k} + 1)(\mathcal{S}_{m,k} + 1) = \sum_{k=1}^m \mathcal{S}_{i,k} \mathcal{S}_{m,k} + \mathcal{S}_{i,k} + \mathcal{S}_{m,k} + 1$$

Or $\sum_{k=1}^m \mathcal{S}_{i,k} \mathcal{S}_{m,k} =$ produit scalaire entre les lignes i et m de \mathcal{S} , donc entre les colonnes i et m de \mathcal{S}^t ,

qui est aussi de Hadamard (5.) donc cela vaut 0 ($i \neq m$)

de même $\sum_{k=1}^m \mathcal{S}_{i,k} = \sum_{k=1}^m \mathcal{S}_{i,k} \times 1 =$ produit scalaire entre colonnes i et 1 de \mathcal{S} , donc nul

car $i \neq 1$. Idem pour $\sum_{k=1}^m \mathcal{S}_{m,k}$.

Ainsi $\sum_{k=1}^m (\mathcal{S}_{i,k} + 1)(\mathcal{S}_{m,k} + 1) = 0 + 0 + 0 + \sum_{k=1}^m 1 = m$.

8- Si $m > 2$, avec $\mathcal{S}_{i,j} = \pm 1$, le produit $(\mathcal{S}_{i,k} + 1)(\mathcal{S}_{m,k} + 1)$ est soit nul soit égal à 4.

Donc m est une somme de 0 et de 4: m est multiple de 4.

3 - Une colonne de S a ses 3 premières lignes de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ car la 1^{ère} ligne contient des 1 et les autres ± 1 . Il suffit simplement de permuter l'ordre des colonnes pour les ranger dans l'ordre voulu, cela est possible par le produit par P_σ où σ est la permutation voulue. La matrice obtenue est de Hadamard d'après 4.

6 - Par orthogonalité des lignes 1 et 2, il y a autant de 1 que de -1 dans la ligne 2, donc la taille des 2 premiers blocs est égale à celle des 2 derniers.

Par orthogonalité des lignes 2 et 3, il y a autant de 1 que de -1 dans les blocs de la ligne 3.

Ainsi les 6 blocs ont même taille.

Donc $m =$ taille des 6 blocs $= 6p$ où p est la taille d'un bloc.

11 - $A \otimes B$ a tous ses coefficients égaux à ± 1 car A et B sont de Hadamard.

$$\bullet \text{ On a } A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}(b_1 \dots b_p) & \dots & A_{1m}(b_1 \dots b_p) \\ A_{21}(b_1 \dots b_p) & \dots & A_{2m}(b_1 \dots b_p) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}(b_1 \dots b_p) & \dots & A_{mm}(b_1 \dots b_p) \end{bmatrix} \text{ où } b_1, \dots, b_p \text{ sont les colonnes de } B$$

Le produit scalaire entre deux colonnes de $A \otimes B$ vaut donc:

$$\left\langle \begin{pmatrix} A_{1i} b_p \\ A_{2i} b_p \\ \vdots \\ A_{mi} b_p \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} A_{1j} b_q \\ A_{2j} b_q \\ \vdots \\ A_{mj} b_q \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{h=1}^m A_{hi} \cdot A_{hj} \langle b_p, b_q \rangle$$

où i, j, p, q sont des entiers.

Ainsi lorsque $b_p \neq b_q$, c'est nul par \perp des colonnes de B .

lorsque $b=q$, il reste $\sum_{k=1}^m A_{ki} A_{kj} \times m \Rightarrow$ pas \perp des colonnes de A .

Ainsi $A \otimes B$ est de Hadamard d'après 2.

12 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de Hadamard donc $A \otimes A \in M_{2^2}(\mathbb{R})$ aussi, donc

on définit par récurrence la suite (A_m) où $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = A \otimes A_n \end{cases}$

Ainsi A_m est de Hadamard et $A_m \in M_{2^m}(\mathbb{R})$.

13 - Dans l'ordre, en complexité :

- $m! = p \quad \cdot m \quad \cdot p \quad \cdot M[i, j]^{**} \cdot 2 \quad \cdot m-1 \quad \cdot j+1$
- $\text{transpose}(M[:, h], M[:, j]) \neq$ produit scalaire colonne h et j

14 - Dans l'ordre, en complexité :

- i in range $(1, m)$ \neq la ligne 1 est fixée à $(1, \dots, 1)$
- and $2^{*}(j - mb - um) < m$ $\neq j$ est le nombre d'étrapes sur la ligne i
- $mb - um += \text{val}$ \neq 1 change sur 1 de valeur 1 ou -1.
- $j = j + 1$
- $\text{mat}pm[i, k] = -1$ \neq si on a $m-1$, les autres valent -1.
- return matpm

15. $\langle z, z \rangle = \sum_{k=1}^m p_k z_k^2 \geq 0$ car $p_k \geq 0$. $\xrightarrow{p_k > 0}$ car $p_k = P(\{z_k \neq 0\}) \neq 0$
 cette somme est nulle ssi: $\forall k \in \{1, \dots, m\} p_k z_k^2 = 0$ i.e. $\forall k z_k = 0$ i.e. $z = 0$.

Les autres points sont immédiats (à vérifier le jour J bien sûr)

16. $E(a_i z_i + b_i) = 0$ et $V(a_i z_i + b_i) = 1 \iff \begin{cases} a_i E(z_i) + b_i = 0 \\ a_i^2 V(z_i) = 1 \end{cases}$

On a $\#z_i(\Omega) \geq 2$ et $P(z_i = z_k) \neq 0 \forall z_k \in z_i(\Omega)$ mme que $\{z_i = z_k\} \neq \emptyset$.

donc z_i n'est pas de loi certaine donc $V(z_i) > 0$.

Ainsi notre système équivalent (comme $a_i \geq 0$) a: $\begin{cases} b_i = -\frac{E(z_i)}{V(z_i)} \\ a_i = 1/\sqrt{V(z_i)} \end{cases}$

17. $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^m v_k \times 1 \times p_k = \sum_{k=1}^m V(w_k) P(\{w_k\}) = E(V)$

Remarque: cette "formule" est vraie comme en \mathbb{R}^C . On peut la comprendre comme

cela: $V = \sum_{k=1}^m V(w_k) \times \mathbb{1}_{\{w_k\}}$, car $\sum_{k=1}^m V(w_k) \mathbb{1}_{\{w_k\}}(w_i) = V(w_i)$.

et $E(\mathbb{1}_{\{w_k\}}) = P(\{w_k\})$ car $\mathbb{1}_{\{w_k\}} \subset B(P(w_k))$.

• $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^m V(w_k) W(w_k) P(\{w_k\}) = \sum_{k=1}^m (VW)(w_k) P(\{w_k\}) = E(VW)$

d'après la même formule appliquée à VW .

18. $E(X_i) = 0$ par définition de X_i et $E(X_i) = \langle z_i, w \rangle$ d'après 17.

• $\langle z_i, z_i \rangle = E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 = V(X_i) = 1$ par définition de X_i .

• $\langle z_i, z_j \rangle = E(X_i X_j) = E(X_i) E(X_j) = 0$ car $X_i \perp X_j$ par construction.

19. L'énoncé donne $l \geq 2$.

• D'après 18 (z_1, \dots, z_l, u) est orthogonale et ses vecteurs sont normés donc

elle est libre dans \mathbb{R}^m donc $\text{Card}(x_1, \dots, x_l, u) = l+1 \leq m$.

20 - (a) des formes linéaires $l_1: (x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{k=1}^m A(z=x_k) x_k$

$$l_2: (x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{k=1}^m A(z=x_k) x_k x_k$$

sont des formes linéaires non nulles ($l_1 \neq 0$ car les $A(z=x_k) \neq 0$ et $l_2 \neq 0$

(car au moins 1 $x_k \neq 0$ en que $\#Z(\mathcal{P}) > 2$ - ce fait au moins 2) sur \mathbb{R}^m).

Ainsi les l_1 et les l_2 sont des hyperplans i.e. des sous-espaces de dimension $m-1$.

Donc $\dim(l_1 \cap l_2) \stackrel{*}{\geq} m-2 \geq 1$ donc il existe $(\beta_1, \dots, \beta_m) \neq (0, \dots, 0)$

dans $l_1 \cap l_2$ i.e. vérifiant les deux égalités voulues.

*: je sors du programme, j'im'excuse!

(b). La linéarité est claire par linéarité des évaluations $(x_i \mapsto Q(x_i))_{1 \leq i \leq m}$

. L'injectivité vient du fait que si $T(Q) = 0$, Q a m racines, or $\deg Q < m$ donc $Q = 0$.

. Comme $\dim \mathbb{R}_{m-1}[x] = m = \dim \mathbb{R}^m$: Q est une isométrie.

(c) Prenons Q l'antécédent de $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ par l'application linéaire T . Alors:

$$\begin{aligned} \cdot E(Q(z)) &= \sum_{k=1}^m A(z=x_k) Q(x_k) = \sum_{k=1}^m A(z=x_k) \beta_k = 0 \\ \cdot E(Q(z)z) &= \sum_{k=1}^m A(z=x_k) Q(x_k) x_k = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \cdot E(Q(z)) \\ \cdot E(Q(z)z) \end{aligned}} \right\} \text{d'après le théorème de transfert}$$

$$\cdot Q(z)(1) = \left\{ Q(x_i) \right\}_{1 \leq i \leq m} \neq \{0\} \text{ car } (Q(x_1), \dots, Q(x_m)) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \neq (0, \dots, 0)$$

2.1 Soient $X_{i_1}, \dots, X_{i_\ell}$ les X_i vérifiant $\# X_i(\Omega) > 2$.

Ils vérifient les hypothèses de la 2.0. Notons alors $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_\ell} \in \mathcal{R}_{m-n}(\mathcal{X})$ des polynômes

vérifiant $E(Q_{i_j}(X_{i_j})) = 0$; $E(Q_{i_j}(X_{i_j}) X_{i_j}) = 0$ et $Q(X_{i_j})(\Omega) \neq \{0\}$.

On va prouver que la famille $(u_0, x_1, \dots, x_\ell, Q_{i_1}(x_{i_1}), \dots, Q_{i_\ell}(x_{i_\ell}))$ est orthogonale. On a :

- $\langle u_0, x_i \rangle = 0$ et $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ d'après 2.0 et $i \neq j$.
- $\langle u_0, Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(Q_{i_j}(X_{i_j})) = 0$ d'après 1 et par définition de Q_{i_j} .
- $\langle x_{i_j}, Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(X_{i_j} Q_{i_j}(X_{i_j})) = 0$ par définition de Q_{i_j} .
- $\forall k \neq i_j : \langle x_k, Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(X_k Q_{i_j}(X_{i_j}))$
 $= \sum_{j=0}^{m-1} q_{i_j}^j E(X_k X_{i_j}^j)$ $\} Q_{i_j} = \sum_{j=0}^{m-1} q_{i_j}^j x_{i_j}^j \in \mathcal{R}_{m-n}(\mathcal{X})$
 $= 0$ par \perp de X_k et $X_{i_j}^j$ et un que $E(X_k) = 0$.
- $\forall i_j' \neq i_j : \langle Q_{i_j'}(x_{i_j'}), Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(Q_{i_j'}(X_{i_j'}) Q_{i_j}(X_{i_j}))$
par calcul croisé, on a l'indép de $Q_{i_j'}(X_{i_j'})$ et $Q_{i_j}(X_{i_j})$
 $= E(Q_{i_j'}(X_{i_j'})) \times E(Q_{i_j}(X_{i_j})) = 0 \times 0 = 0$.

Ainsi $(u_0, x_1, \dots, x_\ell, Q_{i_1}(x_{i_1}), \dots, Q_{i_\ell}(x_{i_\ell}))$ est orthogonale et composée de $1 + \ell + \ell$ vecteurs non nuls ($u_0 \neq 0$, $x_i \neq 0$, et $Q_{i_j}(x_{i_j}) \neq 0$ car $Q_{i_j}(X_{i_j})(\Omega) \neq \{0\}$) donc elle est libre dans \mathcal{R}^m : donc $1 + \ell + \ell \leq m$

$$\text{c-à-d : } \ell + \ell \leq m - 1$$

Remarque: cette question me paraît trop difficile. Si vous trouvez une preuve plus simple, je suis preneur.

(b) $\alpha \geq 1$ et $1 + \alpha \leq m - 1$ donc $2\alpha \leq m - 1$ donc $\alpha \leq \frac{m-1}{2}$.

22_ (a) Comme $l = m - 1$, $\lambda = 0$ d'après 21 (a).

(b) On a $E(X_i) = 0$ i.e. $\alpha_i \vartheta_i + \beta_i (1 - \vartheta_i) = 0$

$V(X_i) = 1$ i.e. $E(X_i^2) = 1$ i.e. $\alpha_i^2 \vartheta_i + \beta_i^2 (1 - \vartheta_i) = 1$

On réécrit

$$\begin{cases} \alpha_i \vartheta_i + \beta_i (1 - \vartheta_i) = 0 \\ \alpha_i^2 \vartheta_i + \beta_i^2 (1 - \vartheta_i) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = -\frac{\alpha_i \vartheta_i}{1 - \vartheta_i} \\ \alpha_i^2 \vartheta_i + \left(\frac{\alpha_i \vartheta_i}{1 - \vartheta_i}\right)^2 (1 - \vartheta_i) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = \frac{\alpha_i \vartheta_i}{1 - \vartheta_i} \\ \alpha_i^2 (\vartheta_i + \frac{\vartheta_i}{1 - \vartheta_i}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_i = \dots = -\frac{1}{\alpha_i} \quad (\text{calculs sans intérêt}) \\ \alpha_i = \sqrt{\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}} \end{cases}$$

(car $\alpha_i > 0$, en effet $\alpha_i > \beta_i$ et X_i a une espérance nulle et n'est pas constante donc elle a nécessairement au moins une valeur > 0 et une valeur < 0).

(c) Comme $D = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m})$. MD = $\begin{pmatrix} \sqrt{p_1} X_1(w_1) & \dots & \sqrt{p_m} X_1(w_m) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sqrt{p_1} & \dots & \sqrt{p_m} \end{pmatrix}$

Ainsi le produit scalaire entre les lignes i et j de MD vaut (pour $i, j \neq m$)

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sqrt{p_k} X_i(w_k) \sqrt{p_k} X_j(w_k) = \sum_{k=1}^m p_k (X_i X_j)(w_k) = \begin{cases} E(X_i^2) = V(X_i) = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

si $j = m$ et $i \in \{1, \dots, m-1\}$: $\sum_{k=1}^{m-1} \sqrt{p_k} X_i(w_k) \sqrt{p_k} = E(X_i) = 0$.

si $j = i = m$: $\sum_{k=1}^m \sqrt{p_k} \sqrt{p_k} = 1$.

Ainsi la ligne de MD forme une famille orthogonale donc

les colonnes de ${}^t(MD)$ forment une famille orthogonale i.e. ${}^t(MD) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$

Donc MD est orthogonale.

(d) Comme MD est orthogonale, la colonne $i \in [1, m]$ a de norme 1 :

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{m-1} (\sqrt{p_i} X_k(w_i))^2 + (\sqrt{p_i})^2 = 1$$

$$\text{i.e. } \sum_{k=1}^{m-1} X_k^2(w_i) p_i + p_i = 1$$

$$\text{i.e. } \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} X_k^2\right)(w_i) = \frac{1}{p_i} \quad \downarrow \text{égalité valable pour tout } w_i \in \Omega.$$

$$\text{Donc } Y = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} X_k^2.$$

(e) Ainsi, pour $i \in [1, m-1]$: $YX_i = X_i + \sum_{k=1}^{m-1} X_k^2 X_i$

$$\text{donc } X_i^3 = YX_i - X_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m-1} X_k^2 X_i$$

$$\begin{aligned} \text{donc } E(X_i^3) &= E(YX_i) - E(X_i) - \sum E(X_k^2) E(X_i) \quad \text{par indep de } X_k \text{ et } X_i \\ E(X_i) &= 0 \\ &= E(YX_i) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k} \cdot p_k X_i(w_k) = \sum_{k=1}^m X_i(w_k) \end{aligned}$$

(f) On a $E(X_i^3) = \alpha_i^3 P(X=\alpha_i) + \beta_i^3 P(X=\beta_i)$ par transfert

$$\stackrel{224}{=} 0 = \alpha_i^3 \vartheta_i - \frac{1}{\alpha_i^3} (1 - \vartheta_i)$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^m X_i(w_k) = m \alpha_i + (m - m_i) \beta_i \quad \text{car } X_i(\Omega) = \{\alpha_i, \beta_i\} \text{ et pas d'él de } m_i$$

$$\text{Donc } \alpha_i^3 \vartheta_i - \frac{1 - \vartheta_i}{\alpha_i^3} = m_i \alpha_i + (m - m_i) \left(-\frac{1}{\alpha_i} \right)$$

$$\text{donc } \alpha_i^6 \vartheta_i - (1 - \vartheta_i) = m_i \alpha_i^4 - \alpha_i^3 (m - m_i) \quad \text{et avec } \alpha_i = \sqrt{\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}}$$

$$\text{donc } \left(\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}\right)^3 \vartheta_i - (1 - \vartheta_i) = m_i \left(\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}\right)^2 - \left(\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}\right)^{3/2} (m - m_i)$$

$$\text{cela donne } m_i = \left(\frac{(1 - \vartheta_i)^3}{\vartheta_i^2} - (1 - \vartheta_i) + \left(\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}\right)^{3/2} m \right) / \left(\left|\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}\right|^2 + \left(\frac{1 - \vartheta_i}{\vartheta_i}\right)^{3/2} \right)$$

Après calculs on obtient $m_i = D_i(m-2) + 1$, ce qui équivaut à $D_i = \frac{m_i - 1}{m-2}$.

Enfin on injecte D_i dans $\alpha_i = \sqrt{\frac{1-D_i}{D_i}}$, après simplification $\alpha_i = \sqrt{\frac{m-m_i-1}{m_i-1}}$

(A2) Si $m=3$, on a $D_i = m_i - 1 \in \mathbb{N}$: impossible car $D_i \in]0, 1[$. Donc $m \geq 4$.

(A3) On a déjà $m_i - 1 \neq 0$ et comme $D_i \neq 1$, $m_i - 1 < m - 2$ i.e. $m_i \leq m - 2$.

(g) (a) On a $P(X_i = \alpha_i) = D_i$, or $P(X_i = \alpha_i) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \mathbb{1}_{X_i(\omega) = \alpha_i} = m_i \times \frac{1}{m}$

Ainsi $D_i = \frac{m_i}{m}$, donc d'après (f):

$$\frac{m_i - 1}{m - 2} = \frac{m_i}{m} \text{ donc } (m_i - 1)m = (m - 2)m_i \text{ donc } m_i = \frac{m}{2}.$$

Ainsi, comme $m_i \in \mathbb{N}$, m est pair et $D_i = \frac{m/2}{m} = \frac{1}{2}$.

(b) Donc d'après 2.2 (b) $\alpha_i = \sqrt{\frac{1-1/2}{1/2}} = 1$ et $\beta_i = -\frac{1}{\alpha_i} = -1$.

Ainsi M a à coefficient dans $\{-1, 1\}$ et on sait que $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

$$\text{Or } D = \frac{1}{\sqrt{m}} I_m \text{ donc } \left(M \frac{1}{\sqrt{m}} I_m \right) \left({}^t M \frac{1}{\sqrt{m}} I_m \right) = I_m$$

$$\text{i.e. } M {}^t M = m I_m$$

donc M est de Hadamard d'après la 2.2.

Remarque : On a donc prouvé dans cette partie que :

si il existe $(Z_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ $m-1$ variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

(où $\Omega = \{1, m\}$ et P est la probabilité uniforme) et à 2 indépendants et $\#Z_i(\Omega) \geq 2$.

alors il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

On ne sait toujours pas s'il existe pour tout m : problème de recherche ouvert !

23 - La linéarité de φ est claire et :

$$\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_{(i-1)m+j}^2 = \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=1}^m x_{m+j}^2 + \dots + \sum_{j=1}^m x_{m(n-1)+j}^2 = \sum_{i=1}^{m^2} x_i^2 = \|x\|^2$$

26 - $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^m ({}^tAA)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ji}A_{ji} = \|A\|^2$.

25 - $F(A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_{ij}| = \langle A, (1) \rangle \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|A\| \cdot \|(1)\| = \left(\sum_{i,j} A_{ij}^2 \right)^{1/2} \sqrt{m^2}$.

• On a $\left(\sum_{i,j} |A_{ij}| \right)^2 = \sum_{i,j} A_{ij}^2 + \sum_{\substack{(i,j) \neq (i',j') \\ (i',j') \in I}} |A_{ij}| |A_{i'j'}| \geq \sum_{i,j} A_{ij}^2$

donc $F(A) \geq \left(\sum_{i,j} A_{ij}^2 \right)^{1/2}$ par croissance de $t \mapsto t^{1/2}$.

26 - Soit $x \in \mathcal{H}_m$. $\|x\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 = \text{Tr}({}^t\varphi(x)\varphi(x)) = \text{Tr}(\text{Im}) = m$.

donc \mathcal{H}_m est borné ($\mathcal{H}_m \subset \overline{B(0, \sqrt{m})}$).

• $\varphi(x) \in \mathcal{D}_m \Leftrightarrow {}^t\varphi(x)\varphi(x) = \text{Im} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum x_i x_j = 0 \\ \sum x_i^2 = 1 \end{cases}$ on a m^2 égalités de formes quadratiques

Ainsi, par continuité des formes quadratiques, \mathcal{H}_m est fermé.

27 - $|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| = \left| \sum_{i=1}^{m^2} |x_i| - \sum_{i=1}^{m^2} |y_i| \right| = \left| \sum_{i=1}^{m^2} |x_i - y_i| \right|$ inégalité triangulaire

* on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

La partie de gauche est connue mais c'est du cours !

$$\leq \sum_{i=1}^{m^2} (|x_i| + |y_i|) \quad \text{idem}^*$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m^2} |x_i - y_i|$$

$$= F(x - y) \quad \text{Q. 25}$$

$$\leq m \|x - y\|^2$$

28 - $\inf_{A \in \mathcal{A}} F(A) = \inf_{x \in \mathcal{H}_m} F(\varphi(x))$. Or $F \circ \varphi$ est continue d'après 27 par théorème

d'équicontinuité. Donc $F \circ \varphi$ a un mini global sur \mathcal{H}_m ,

qui est fermé borné. De même pour le maximum.

29 - Si $Q \in \mathcal{O}_m$, $F(Q) \geq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m Q_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^m (1)^{1/2} = m$
les colonnes de Q sont de norme 1.

Donc $M_m^- \geq m$ et $F(I_m) = m$ donc $M_m^- = m$ (car $I_m \in \mathcal{O}_m$).

30 - $F(Q) = m \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |Q_{ij}| = m$

Or, comme $Q \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ $\sum_{j=1}^m Q_{ij}^2 = 1$ donc $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Q_{ij}^2 = m$

d'où $F(Q) = m \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |Q_{ij}| - Q_{ij}^2 = 0$

or $|Q_{ij}| \leq 1$ donc $|Q_{ij}| - Q_{ij}^2 \geq 0$ donc :

$\forall i, j \quad |Q_{ij}| - Q_{ij}^2 = 0$ i.e. $Q_{ij} \in \{0, -1, 1\}$.

or $\sum |Q_{ij}| = 1$ donc ce sont les matrices possédant un seul 1 sur chaque ligne et chaque colonne et des 0 ailleurs : les matrices de permutation.

31 - $\|Q - \frac{1}{\sqrt{m}} S(Q)\|^2 = \|Q\|^2 - \frac{2}{\sqrt{m}} \langle Q, S(Q) \rangle + \frac{1}{m} \|S(Q)\|^2$

Or, on sait que : $\|Q\|^2 = m$ car $Q \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$

$\bullet \|S(Q)\|^2 = \sum_{i,j} (\pm 1)^2 = m^2$.

$\bullet \langle Q, S(Q) \rangle = \sum_{i,j} Q_{ij} \times \text{sgn}(Q_{ij}) = \sum_{i,j} |Q_{ij}| = F(Q)$

donc : $m\sqrt{m} - \frac{\sqrt{m}}{2} \|Q - \frac{1}{\sqrt{m}} S(Q)\|^2 = m\sqrt{m} - \frac{\sqrt{m}}{2} (m - \frac{2}{\sqrt{m}} F(Q) + \frac{1}{m} m^2)$
 $= F(Q)$

32 - donc $F(Q) \leq m\sqrt{m}$ donc $M_m^+ = \max_{Q \in \mathcal{O}_m} F(Q) \leq m\sqrt{m}$.

Avec égalité ssi : $\exists Q \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \mid \frac{\sqrt{m}}{2} \|Q - \frac{1}{\sqrt{m}} S(Q)\|^2 = 0$

ssi : $\exists Q \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \mid Q = \frac{1}{\sqrt{m}} S(Q)$

• Ainsi, s'il existe H de Hadamard, $Q = \frac{1}{\sqrt{m}} H \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ convient car

$$\frac{1}{\sqrt{m}} S\left(\frac{1}{\sqrt{m}} H\right) = \frac{1}{m} S(H) = \frac{1}{m} H \quad (H \text{ n'est composé que de } \pm 1)$$

• Et si on a égalité, $H = \sqrt{m} \rho$ est de Hadamard car ${}^t H H = {}^t (\sqrt{m} \rho) (\sqrt{m} \rho) = m I$
 et $H = \sqrt{m} \rho = S(\rho)$ a ses coefficients égaux à ± 1 .

Q. 8.

33 - $M_n^+ = m \sqrt{m} \iff$ il existe une matrice de Hadamard de taille $n = m^2 \implies m$ multiple de 4.

donc par contraposition : m non multiple de 4 $\implies M_n^+ < m \sqrt{m}$ (car $M_n^+ \leq m \sqrt{m}$).

34 - $U(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}_3 \iff$ les colonnes de $U(\alpha, \beta)$ forment une b.o.n

$$\iff \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + (-\beta)^2 = 1 & (\text{norme de } c_1, c_2 \text{ et } c_3) \\ \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = 0 & (\text{produit scalaire de } c_1, c_2 \text{ et } c_1, c_3 \text{ et } c_2, c_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha^2 + 2\beta^2 = 1 \\ \beta(2\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2\alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$$

Donc $U(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}_3 \iff (\alpha, \beta) \in \left\{ (1, 0); (-1, 0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$.

$$\text{On a } F\left(U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 5.$$

donc $M_3^+ \geq 5$ et on sait que $M_3^+ \leq 3\sqrt{3}$ donc :

$$M_3^+ \in [5, 3\sqrt{3}] \quad (\text{ouvert car } 3 \neq 4p)$$

35-b) $|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^m x_i y_i \right|$ où $\sum x_i y_i$ est une somme de 1 de -1.

Cette somme est non nulle ($\langle x, y \rangle \neq 0$) et elle correspond au nombre pair (m) de termes donc elle ne peut ni valoir 1 ni -1 donc

$$|\sum x_i y_i| \geq 2$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad |\langle x, y \rangle - \langle u, v \rangle| &= |\langle x, y \rangle + \langle u, y \rangle - \langle u, y \rangle - \langle u, v \rangle - \langle u, y \rangle + \langle u, y \rangle| \\
 &= |\langle x-u, y \rangle + \langle u, y-v \rangle| \quad \downarrow \text{Cauchy-Schwarz et inégalité} \\
 &\leq \|x-u\| \|y\| + \|u\| \|y-v\| \quad \text{triangulaire} \\
 &\leq \sqrt{2 \|x-u\|^2 \|y\|^2 + \|u\|^2 \|y-v\|^2}
 \end{aligned}$$

Cela pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$, en effet cette inégalité équivaut à :

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{ce qui est vrai.}$$

(c) Comme $S(Q)$ n'est pas de Hadamard, elle possède 2 colonnes x et y non orthogonales.

Donc par 35.a) $|\langle x, y \rangle| \geq 2$.

En notant u et v les colonnes de $\sqrt{m}Q$ correspondant aux mêmes indices que x et y :

on a $\|\sqrt{m}Q - S(Q)\|^2 = \sum \|k_i\|^2 \geq \|u-x\|^2 + \|v-y\|^2$ où k_i sont les colonnes de $\sqrt{m}Q - S(Q)$
 de plus $\|u\|^2 = m$ ($Q \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$) et $\|y\|^2 = m$ ($y = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$).

On a donc : $m \|\sqrt{m}Q - S(Q)\| \geq \|y\|^2 \|u-x\|^2 + \|u\|^2 \|v-y\|^2 \quad \downarrow \text{35.b.}$
 $\geq \frac{1}{2} |\langle x, y \rangle - \langle u, v \rangle|$

or les colonnes de Q et $\sqrt{m}Q$ et u et v sont orthogonales donc :

$$m \|\sqrt{m}Q - S(Q)\| \geq \frac{1}{2} |\langle x, y \rangle| \geq 1$$

Ainsi $\|Q - \frac{1}{\sqrt{m}} S(Q)\|^2 \geq \frac{2}{m^2}$

(d) $F(Q) = m\sqrt{m} - \frac{\sqrt{m}}{2} \|Q - \frac{1}{\sqrt{m}} S(Q)\|^2$

Q.35.c) $\hookrightarrow \leq m\sqrt{m} - \frac{\sqrt{m}}{2} \cdot \frac{2}{m^2} = m\sqrt{m} - \frac{1}{m\sqrt{m}}$