MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - Edhec 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Exercice 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\mathrm{d}x$ et on a en particulier $u_0 = \dfrac{1}{4-x^2}\mathrm{d}x$.

1. a) On cherche ici deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall x \in [0\,;1],\quad \frac{a}{2-x}+\frac{b}{2+x} = \frac{1}{4-x^2} \iff \frac{a(2+x)+b(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{1}{4-x^2} \iff \frac{(2a+2b)+(a-b)x}{4-x^2} = \frac{1}{4-x^2}.$$

Par identification des coefficients au numérateur, on veut donc a et b tels que :

$$\begin{cases} a-b & =0 \\ 2a+2b & =1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=b \\ 4a=1 \end{cases} \iff a=b=\frac{1}{4}.$$

b) Du résultat précédent, on déduit :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \Big(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[-\ln(2-x)+\ln(2+x)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\big(-\ln(1)+\ln(3)+\ln(2)-\ln(2)\big)\boxed{=\frac{1}{4}\ln(3)}.$$

2. On peut directement calculer :

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\Big[\ln(4-x^2)\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}\big(\ln(3)-\ln(4)\big)\boxed{=\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(3)}.$$

3. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 \boxed{=\frac{1}{n+1}}.$$

b) La fonction Python ci-dessous calcule et renvoie la valeur de u_n, lorsque n est passé en argument :

```python
def suite(n):
    if (-1)**n==1 :   # se produit ssi n est pair!
        u = np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2): # k varie avec un pas de 2
            u = 4*u - 1/(k-1)    # car u_k = 4*u_(k-2) - 1/(k-1)
    else:
        u = np.log(2/np.sqrt(3)) # bien égal à ln(2) - 1/2*ln(3)
        for k in range(3,n+1,2):
            u = 4*u - 1/(k-1)    # meme relation de récurrence!
    return u
```

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \iff 3 \leqslant 4 - x^2 \leqslant 4 \overset{(*)}{\iff} \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{4-x^2} \geqslant \frac{1}{4} \overset{\times x^n \geqslant 0}{\iff} \frac{x^n}{3} \geqslant \frac{x^n}{4-x^2} \geqslant \frac{x^n}{4}.$$

$(*)$: par (stricte) décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions comparées sont continues sur $[0\,;1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{3}\mathrm{d}x \iff \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}.$$

b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)}$, le théorème d'encadrement assure que :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4}\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est, à un facteur constant près, la série harmonique qui diverge (série de Riemann où $\alpha = 1 \leqslant 1$).

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

5. a) Le script fournit par l'énoncé et utilisant la fonction précédemment déclarée produit un affichage graphique des termes de la suite $\left(3n \cdot u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui montre que cette suite semble converger en croissant vers 1.

On aurait donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n \cdot u_n = 1 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.

C'est en tout cas la seule proposition de l'énoncé qui soit cohérente (et qui reste à démontrer).

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans l'intégrale définissant u_n, on réalise une intégration par parties en posant :

$$u(x) = \frac{1}{4-x^2} \longrightarrow u'(x) = -\frac{-2x}{(4-x^2)^2} = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$
$$v'(x) = x^n \longrightarrow v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, donc par intégration par parties :

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, comme à la question 4.a) :

$$3 \leqslant 4-x^2 \leqslant 4 \overset{(1)}{\iff} 9 \leqslant (4-x^2)^2 \leqslant 16 \overset{(2)}{\iff} \frac{1}{9} \geqslant \frac{1}{(4-x^2)^2} \geqslant \frac{1}{16} \overset{(3)}{\iff} \frac{x^{n+2}}{9} \geqslant \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \geqslant \frac{x^{n+2}}{16},$$

(1) par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, (2) par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et (3) puisque $x^{n+2} \geqslant 0$.

Les fonctions comparées sont continues sur $[0\,;1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{x^n}{16}\mathrm{d}x \iff \frac{1}{9(n+2)} \geqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{16(n+1)}.$$

Le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{9(n+2)} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{16(n+2)}$ permet d'invoquer le théorème d'encadrement, qui assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\mathrm{d}x = 0.$$

d) Il y a plusieurs façons de conclure ici, en voici une : pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède,

$$3nu_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\mathrm{d}x,$$

d'où, d'après le résultat de la question précédente, et le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} 3nu_n = 1 - 1\times 0 = 1, \quad \text{ce qui prouve bien que } \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}}.$$

Exercice 2

1. Soit la fonction $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Pour tout $x \geqslant 0$, $e^{-x^2/2} > 0$ donc le produit de ces deux facteurs qui vaut $f(x)$, est positif. Comme la fonction f est constante nulle sur $]-\infty\,;0[$, elle est donc positive ou nulle sur tout $\mathbb{R}$.

La fonction f est par ailleurs continue sur $]-\infty\,;0[$ comme fonction constante sur cet intervalle, et continue sur $]0\,;+\infty[$, comme composée et produit de fonctions continues (en fait sur $\mathbb{R}$) : f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

Enfin, sous réserve de convergence, et puisque f est nulle sur $]-\infty\,;0[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\Big[-e^{-x^2/2}\Big]_0^A = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A^2/2}+1 = 1,$$

donc f est bien une densité de probabilité.

b) Une variable aléatoire W de loi normale centrée, réduite a pour espérance $\mathbf{E}(W) = 0$ et pour variance $\mathbf{V}(W) = 1$, donc son moment d'ordre 2 vaut 1 également d'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathbf{V}(W) = \mathbf{E}(W^2) - \big(\mathbf{E}(W)\big)^2 \iff \mathbf{E}(W^2) = \mathbf{V}(W) + \big(\mathbf{E}(W)\big)^2 = 1+0$.

c) Le résultat précédent signifie, d'après le théorème de transfert appliqué au calcul de $\mathbf{E}(Z^2)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 1 \iff 2\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \iff \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Or la variable aléatoire x admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Puisque la fonction $x \mapsto xf(x)$ est nulle sur $]-\infty\,;0[$ et positive sur $[0\,;+\infty[$, alors il suffit d'étudier la convergence simple de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{E}(X)}.$$

2. La fonction de répartition de X est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$

- Pour tout $x < 0$: $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0.$
- Pour tout $x \geqslant 0$: $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{d}t + \int_0^x te^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t^2/2}\Big]_0^x = 1 - e^{-x^2/2}.$

3. Simulation.

a) On pose $Z = X^2$: c'est une variable aléatoire à valeurs positives, donc $F_Z(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Pour tout $x \geqslant 0$:

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}(X^2 \leqslant x) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = 1 - e^{-(\sqrt{x})^2/2} - 0 = 1 - e^{-x/2}$$

car $-\sqrt{x} \leqslant 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$. On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$: c'est donc la loi suivie par Z.

b) On sait simuler en `Python` la loi exponentielle ; on sait donc simuler Z, et donc X qui est presque sûrement définie par $\sqrt{Z}$ puisque Z est à valeurs positives.

On rappelle ici que l'argument de la fonction `rd.exponential` est *l'espérance* de la loi exponentielle simulée, donc l'*inverse* du paramètre de la loi.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX():
    Z = rd.exponential(2)
    return np.sqrt(Z)
```

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n sa fonction de répartition.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, puisque $\sqrt{n} > 0$:

$$G_n(x) = \mathbf{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \mathbf{P}(X \leqslant x\sqrt{n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\sqrt{n} < 0 \\ 1 - e^{-(x\sqrt{n})^2/2} & \text{si } x\sqrt{n} \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

b) Il est clair que pour tout $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$. C'et aussi vrai pour $x = 0$ puisque $G_n(0) = 1 - e^0 = 0$.

Pour tout $x > 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} -nx^2/2 = -\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - e^{-nx^2/2} = \lim\limits_{X \to -\infty} 1 - e^X = 1$, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = G(x).$$

On reconnaît en G la fonction de répartition de la variable certaine égale à 0 : G est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors la suite $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(|Y_n| > \varepsilon\big) &= \mathbf{P}\big([Y_n < -\varepsilon] \cup [Y_n > \varepsilon]\big) = \mathbf{P}(Y_n < -\varepsilon) + \mathbf{P}(Y_n > \varepsilon) && \text{car l'union est disjointe} \\ &= \mathbf{P}(Y_n \leqslant -\varepsilon) + 1 - P(Y_n \leqslant \varepsilon) && \text{car } Y_n \text{ est à densité} \\ &= 0 + 1 - \left(1 - e^{-n\varepsilon^2/2}\right) = e^{-n\varepsilon^2/2}. \end{aligned}$$

On a encore $\lim\limits_{n \to +\infty} -n\varepsilon^2/2$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}\big(|Y_n| > \varepsilon\big)$ est bien égale à 0.

On dit que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle.

5. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

   a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(M_n > x) &= \mathbf{P}\big(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > x\big) \\
&= \mathbf{P}\big([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \cdots \cap [X_n > x]\big) \quad \text{par définition du minimum} \\
&= \mathbf{P}(X_1 > x) \times \mathbf{P}(X_2 > x) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n > x) \quad \text{par indépendance des } X_i \\
&= \big(\mathbf{P}(X > x)\big)^n \qquad \text{car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi que } X \\
&= \big(1 - F_X(x)\big)^n = \begin{cases} (1-0)^n = 1 & \text{si } x < 0 \\ \big(1 - 1 + e^{-x^2/2}\big)^2 = e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

   de sorte que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{M_n}(x) = 1 - \mathbf{P}(M_n > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$

   On a donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = G_n(x)$, donc Y_n et M_n suivent la même loi puisqu'elles ont la même fonction de répartition.

   b) La fonction suivante renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)` : on crée un échantillon de n simulation de la loi de X, et on en calcule le minimum.

```
def simulM(n) :
    X = np.array([simulX() for k in range(n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

Exercice 3

On se propos de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t)\mathrm{d}t \qquad (*)$$

1. Soit f une fonciton continue sur $\mathbb{R}$, et soit x un réel. On réalise le changement de variable $t = x - u \iff u = x - t$, licite car affine et donc de classe $\mathcal{C}^1$, qui donne :

$$\int_0^x t f(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^0 (x-u) f(u) \cdot (-\mathrm{d}u) = \int_0^x (x-u) f(u)\mathrm{d}u,$$

   donc l'égalité $(*)$ est bien équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\mathrm{d}u \qquad (**)$$

2. On suppose dans cette question q'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

   a) En reprenant la relation $(**)$ précédente, qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + x.\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x u f(u)\mathrm{d}u.$$

Or les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$ sont par définitions, respectivement les primitives des fonctions continues f et $x \mapsto xf(x)$ qui s'annulent en 0.

Par conséquent elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et f aussi comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0 + 1.\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

b) Toujours selon le principe exposé à la question précédente, f' est donc égale sur $\mathbb{R}$ à la primitive de f qui s'annule en 0, donc f est une deuxième fois dérivable, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(x).$$

c) L'équation différentielle $f'' = f$ obtenue ci-dessus est linéaire et du second ordre, d'équation caractéristique $x^2 = 1$ dont les solutions évidentes sont 1 et -1.

D'après le cours, on sait donc que les solutions de cette équations sont les combinaisons linéaires des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$, donc de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda.e^x + \mu.e^{-x} \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

d) La fonction f étant initialement solution de la relation $(*)$, elle vérifie :

$$f(0) = 1 + \int_0^0 tf(0-t)\mathrm{d}t = 1 \quad \text{ et d'après 2.a) : } f'(0) = \int_0^0 f(u)\mathrm{d}u = 0.$$

Les implications successives obtenues aux questions 2.a),b),c) montrent alors que si f est solution de $(*)$, alors f est solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0 \end{cases}$

qui d'après le théorème du cours, possède une unique solution : c'est la seule solution *possible* pour l'équation, $(*)$, elle est de la forme $f : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda.e^x + \mu.e^{-x}$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \lambda.e^x - \mu.e^{-x}$, avec :

$$\begin{cases} f(0) & = 1 \\ f'(0) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu & 1 \\ \lambda - \mu & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda = 1 \\ \lambda = \mu \end{cases} \iff \lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

Le problème posé au début de l'exercice admet bien au plus une solution, qui est la fonction $f : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3. Réciproquement, vérifions que $f : \ x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est solution du problème proposé en début d'exercice ; d'après 1., cela revient à calculer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-u)(e^u + e^{-u})\mathrm{d}u.$$

Dans l'intégrale, on réalise une intégration par parties en posant :

$$a(u) = (x-u) \quad \longrightarrow \quad a'(u) = -1$$
$$b'(u) = e^u + e^{-u} \quad \longrightarrow \quad b(u) = e^u - e^{-u}$$

Les fonctions a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par intégrations par parties : pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u &= 1 + \frac{1}{2}\Big[(x-u)(e^u - e^{-u})\Big]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x (e^u - e^{-u})\mathrm{d}u \\ &= 1 + \frac{1}{2}\big(0 - x(1-1)\big) + \frac{1}{2}\Big[e^u + e^{-u}\Big]_0^x \\ &= 1 + \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x} - 1 - 1\big) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x). \end{aligned}$$

La seule fonction f possible, est bien solution de $(*)$ qui admet donc une unique fonction solution, définie ci-dessus.

4. Dans le nouveau problème proposé, l'égalité $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$ reste équivalente à $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u$ (par le même changement de variable).
L'absence du terme additif constant 1 ne change pas le fait que si f est solution de ce problème, alors on a encore en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ et $f''(x) = f(x)$.
On aura par contre cette fois, $f(0) = 0 = f'(0)$ et la seule solution possible au problème, est alors de la forme $f:\ x \mapsto \lambda.e^x + \mu.e^{-x}$ avec :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu &= 0 \\ \lambda-\mu &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda = 0 \\ \lambda = \mu \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$$

La seule solution possible est donc la solution nulle, et réciproquement la fonction nulle est évidemment solution du problème : ce dernier admet bien une unique solution (la fonction nulle, donc).

Problème

1. a) L'urne contient initialement une boule blanche et une boule noire, donc :

$$a_0 = \mathbf{P}(X_0 = 0) = 0 = \mathbf{P}(X_0 = 2) = c_0 \text{ et } b_0 = \mathbf{P}(X_0 = 1) = 1.$$

b) Le premier tirage a 4 issues possibles, toutes équiprobables donc de probabilité $\frac{1}{4}$ chacune :

- soit on tire la boule blanche dans l'urne A (événement B_A) et la boule noire dans l'urne B (événement N_B), et alors après l'échange, l'urne A contient les deux boules noires : c'est le seul cas où $[X_1 = 0]$ est réalisé, donc par indépendance des tirages dans les deux urnes,

$$\mathbf{P}(X_1 = 0) = \mathbf{P}(B_A \cap N_B) = \mathbf{P}(B_A) \times \mathbf{P}(N_B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = a_1.$$

- soit on tire la boule noire dans l'urne A (événement N_A) et la bouel blanche dans l'urne B (événement B_B) et dans ce cas l'urne contient après échange, l'urne A contient les deux boules blanches : $[X_1 = 2]$ est réalisé et c'est la seule possibilité qu'il le soit, donc :

$$\mathbf{P}(X_1 = 2) = \mathbf{P}(N_A \cap B_B) = \mathbf{P}(N_A) \times \mathbf{P}(B_B) = \frac{1}{4} = c_1.$$

- sinon on tire la blanche dans A et la blanche dans B, ou la noire dans A et la noire dans B, et dans ce cas après échange, les deux urnes gardent la composition initiale : ces deux cas réalisent $[X_1 = 1]$ (et ce sont les seuls), donc

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}\big((B_A \cap B_B) \cup (N_A \cap N_B)\big) = \mathbf{P}(B_A) \times \mathbf{P}(B_B) + \mathbf{P}(N_A) \times \mathbf{P}(N_B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = b_1,$$

l'union étant disjointe.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le bilan des possibilités pour le premier échange se généralise assez facilement : à tout instant les deux urnes A et B contiennent chacune deux boules, et au gré des échanges l'urne A peut contenir soit 0, soit 1, soit 2 boules blanches : un des trois événements de la famille $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ est toujours réalisé, et ils sont clairement incompatibles puisqu'ils correspondent à des valeurs différentes de X_n : cette famille est un système complet d'événements.

d) On en déduit immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n + b_n + c_n = \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2) = 1,$$

les calculs de 1.a) montrant que cette relation est aussi vraie lorsque $n = 0$.

L'énoncé admettait dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont toutes non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) En reprenant les notations employées à la question 1.b) pour représenter les échanges possibles au $(n+1)$-ième échange :

- Si $[X_n = 0]$ est réalisé, alors l'urne A contient les 2 boules noires et l'urne B les deux boules blanches, avant le $(n+1)$-ième échange : on va donc forcément échanger une boule noire de A contre une boule blanche de B, et $[X_{n+1} = 1]$ est forcément réalisé, soit :

$$\mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = 1 \quad \text{ et donc } \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 2) = 0.$$

- De façon symétrique : si $[X_n = 2]$ est réalisé, alors l'urne A contient les deux boules blanches et l'une d'entre elles sera forcément échangée avec l'une des deux boules noires que contient l'urne B, au $(n+1)$-ième échange :

$$\mathbf{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) = 1 \quad \text{ et donc } \mathbf{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) = 0.$$

- Enfin si $[X_n = 1]$ est réalisé : on se retrouve dans la configuration initiale comme en 1.b), et le même raisonnement donne

$$\mathbf{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \quad \text{ et } \mathbf{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

En ne considérant dans le graphe qui représente cette chaîne de Markov, que les arêtes associées à une probabilité de transition non nulle, on obtient bien le graphe fourni par l'énoncé.

b) La matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0\,;2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = \mathbf{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$ associée est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la somme des éléments de chaque ligne est bien égale à 1.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule des probabilités totales, utilisée avec le système complet d'événements $\big([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2]\big)$ de probabilités non nulles (admis par l'énoncé), donne successivement :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) \cdot \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) \cdot \mathbf{P}(X_n = 1) \\ &\qquad + \mathbf{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) \cdot \mathbf{P}(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) \cdot \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) \cdot \mathbf{P}(X_n = 1) \\ &\qquad + \mathbf{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) \cdot \mathbf{P}(X_n = 2) \\ &= \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 2) \cdot \mathbf{P}(X_n = 0) + \mathbf{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) \cdot \mathbf{P}(X_n = 1) \\ &\qquad + \mathbf{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) \cdot \mathbf{P}(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{P}(X_n = 1)\end{aligned}$$

Soit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{4} b_n \\ b_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4} b_n \end{cases}}$.

3. Avec $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} b_0,\ b_1 = \frac{1}{2} = a_0 + \frac{1}{2} b_0 + c_0,\ c_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} b_0$: les relations précédentes sont clairement vraies aussi pour $n = 0$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: d'après 1.c), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1, 2\}$: X_{n+1} est une variable finie qui admet une espérance valant

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = 0 \cdot \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) + 1 \cdot \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(X_{n+1} = 2) \boxed{= b_{n+1} + 2c_{n+1}}.$$

b) En reprenant les relations obtenues en 2.c), on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(X_{n+1}) = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n + \frac{1}{2} b_n = a_n + b_n + c_n = 1 \qquad \to \text{cf. 1.d)}$$

c) Des deux questions précédentes, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n + 2c_n = 1.$$

On vérifie sans peine que cette relation est également vraie pour $n = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

a) Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit matriciel $U_n V$ est une matrice carrée d'ordre 1, bien assimilable à un réel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_{n+1}V = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = \frac{1}{2} b_n - a_n - \frac{1}{2} b_n - c_n + \frac{1}{2} b_n = -a_n + \frac{1}{2} b_n - c_n = -\frac{1}{2}(2a_n - b_n + 2c_n) = -\frac{1}{2}.U_n V,$$

donc la suite réelle $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) Du résultat précédent, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n V = \left(-\frac{1}{2}\right)^n .U_0 V \iff \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2a_n - b_n + 2c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n .(2a_0 - b_0 + 2c_0) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Des questions 1.d), 4.c) et 5.b) on déduit que les trois réels a_n, b_n, c_n sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ \quad\ \ b_n + 2c_n = 1 \\ 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ \quad\ \ b_n + 2c_n = 1 \\ \quad\ 3b_n = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

Par substitutions remontantes, on obtient successivement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad c_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad a_n = 1 - b_n - c_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = c_n.$$

Ces calculs donnent la loi de X_n, puisque $a_n = \mathbf{P}(X_n = 0),\ b_n = \mathbf{P}(X_n = 1),\ c_n = \mathbf{P}(X_n = 2)$.

7. Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont discrètes à valeurs dans $\{0,1,2\}$, donc leur convergence en loi s'étudie en calculant $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n=i)$ pour tout i de $\{0,1,2\}$.

   Puisque $-1<-\frac{1}{2}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n=0$, et par opérations sur les limites, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n=0)=\frac{1}{6}=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n=2)\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n=1)=\frac{2}{3}.$$

   Puisque $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1+4+1}{6}=1$, on en déduit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X de loi donnée par :

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}\quad\text{et}\quad\mathbf{P}(X=0)=\mathbf{P}(X=2)=\frac{1}{6},\ \mathbf{P}(X=1)=\frac{2}{3}.$$

8. Dans cette question, l'énoncé se proposait de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

   a) Les calculs matriciels donnent :

$$M^2=\begin{pmatrix}0+\frac{1}{4}+0 & 0+\frac{1}{2}+0 & 0+\frac{1}{4}+0\\ 0+\frac{1}{8}+0 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & 0+\frac{1}{8}+0\\ 0+\frac{1}{4}+0 & 0+\frac{1}{2}+0 & 0+\frac{1}{4}+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}&\frac{3}{4}&\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\text{ et } M^3=M^2\times M=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&\frac{3}{4}&\frac{1}{8}\\ \frac{3}{16}&\frac{5}{8}&\frac{3}{16}\\ \frac{1}{8}&\frac{3}{4}&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

   donc :

$$2M^3=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{3}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{3}{8}&\frac{5}{4}&\frac{3}{8}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M^2+M=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&1+\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}+\frac{1}{4}&\frac{3}{4}+\frac{1}{2}&\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&1+\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=2M^3.$$

   b) De ce qui précède, on déduit que $P(x)=2x^3-x^2-x$ est un polynôme annulateur de M, donc les valeurs propres de M se trouvent *parmi* les racines de P.

   Les réels 0 et 1 sont racines évidentes de P, qui se factorise sous la forme :

$$P(x)=x(2x^2-x-1)=x(x-1)(2x+1)$$

   (via une division euclidienne par exemple, ou en cherchant la factorisation du trinôme $2x^2-x-1$).

   Les racines de P sont donc $0, 1$ et $-\frac{1}{2}$: ce sont les trois seules valeurs propres *possibles* de M.
   Réciproquement :

   - La matrice $M=M-0.I_3$ est clairement non-inversible, puisque sa première et sa dernière colonne sont égales, donc 0 est bien valeur propre de M.
     Plus précisément :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_0(M)\iff MX=0\iff\begin{cases}\frac{1}{4}y=0\\ x+\frac{1}{2}y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=0\\ x=-z\end{cases},$$

     donc $E_0(M)=\left\{\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}\,\middle|\,z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$

     On a obtenu une famille génératrice constituée d'un seul vecteur non-nul, et qui est donc libre : c'est une *base* de $E_0(M)$.

- La matrice $M-I_3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ est non-inversible car la somme des éléments de chaque ligne est nulle, donc 1 est bien valeur propre de M.
  Plus précisément :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1(M)\iff (M-I_3)X=0_{3,1}\iff\begin{cases}-x+y &=0\\ x-2y+z &=0\\ y-z &=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=x\\ x-2x+x=0\\ z=x\end{cases}$$

$$\iff x=y=z,$$

  donc $E_1(M)=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Big)$.
  On a obtenu une famille génératrice constituée d'un seul vecteur non-nul, et qui est donc libre : c'est une *base* de $E_1(M)$.

- Enfin : $M+\frac{1}{2}I_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est une matrice dont la non-inversibilité n'est pas forcément évidente ; on résout donc :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-\frac{1}{2}}(M)\iff (M+\tfrac{1}{2}I_3)X=0_{3,1}\iff\begin{cases}\frac{1}{2}x+y &=0\\ \frac{1}{4}x+y+\frac{1}{4}z &=0\\ y+\frac{1}{2}z &=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+2y &=0\\ x+4y+z &=0\\ \quad 2y+z &=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y &=0\\ \quad 2y+z &=0 \quad L_2\leftarrow L_2-L_1\\ \quad 2y+z &=0\end{cases}$$

$$\iff z=-2y=x.$$

  On trouve donc une infinité de solutions, ce qui prouve bien que $-\frac{1}{2}$ est solution, avec :

$$E_{-\frac{1}{2}}(M)=\left\{\begin{pmatrix}-2y\\y\\-2y\end{pmatrix}\,\middle|\, y\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}\Big)=\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\Big),$$

  puisqu'on ne change pas le sous-espace vectoriel engendré en multipliant le vecteur qui l'engendre par un réel non nul (ici -1).
  On a ainsi obtenu une famille génératrice constituée d'un seul vecteur non-nul, et qui est donc libre : c'est une *base* de $E_{\frac{1}{2}}(M)$.

c) On pose $P=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Il est clair que les colonnes de cette matrice sont les 3 vecteurs propres trouvés précédemment, chacun associé à une valeur propre différente de celle des autres vecteurs.
On sait donc que ces trois vecteurs propres forment une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 : c'en est une base, et par conséquent le rang de P qui est aussi celui de ses colonnes est maximal égal à 3.

La matrice P est donc bien inversible, c'est en fait la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la nouvelle base de vecteurs propres.

d) On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les calculs matriciels donnent :

$$MP = \begin{pmatrix} 0-1+0 & -0+0+0 & 0+1+0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ 0-1+0 & -0+0+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est en fait aussi la valeur de PD, de sorte que puisque P est inversible, on peut écrire :

$$MP = PD \iff M = PDP^{-1}.$$

Ce résultat signifie que M est *semblable* à une matrice *diagonale* : M est donc *diagonalisable.*

e) Les relations obtenues en 2.c) s'écrivent matriciellement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}b_n & a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n & \frac{1}{4}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_n M, \quad \text{CQFD.}$$

f) Une récurrence classique et facile montre alors que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$U_n = U_0 M^n$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $U_0 M^0 = U_0 I_3 = U_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $U_{n+1} = U_0 M^{n+1}$.

On sait que : $\quad U_{n+1} = U_n M \overset{H.R.}{=} U_0 M^n \times M = U_0 M^{n+1}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

g) La loi de X_n est contenue dans la matrice ligne U_n : il suffit donc de calculer $U_0 M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On profite pour cela du fait que $M = PDP^{-1}$, qui donnera par une récurrence classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}.$$

Or D est une matrice diagonale, donc ses puissances sont immédiates : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$.

Sachant que $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule alors le produit $U_0 PD^nP^{-1}$ en commençant, par associativité du produit matriciel, par calculer les produits à gauche :

$$U_0 P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U_0 PD^n = \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il resterait donc à calculer P^{-1} pour finir de le calcul de U_n, et retrouver la loi de X_n obtenue à la question 6.

★★★ FIN DU SUJET ★★★