# Correction HEC II 2008

## Voie scientifique

La correction comporte 21 pages.

## Préliminaire

1. (a) La **partié** de l'intégrande, nous permet d'affirmer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ converge, car les intégrales $\int_{-\infty}^{0} e^{-ax^2}dx$ et $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ sont de même nature, égales en cas de convergence.
En cas de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$$

- **Condition nécessaire.**
Supposons que $a \leq 0$ dans ce cas $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-ax^2} = +\infty$ donc il exite un réel $x_0 > 0$ tel que pour tout réel $x \geq x_0$, $e^{-ax^2} \geq 1$. Comme $\int_{x_0}^{+\infty} 1dx$ diverge, le critére de minoration appliqué aux fonctions positives nous assure que $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ diverge aussi et donc il en est de même pour $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$.
- **Condition suffisante.**
Supposons que $a > 0$. Par croissance comparée (puissance-exponentielle) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-ax^2} = 0$ et par caractérisation de la négligeabilité $e^{-ax^2} = \underset{(+\infty)}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ avec $\int_{\alpha>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$, ainsi le critère de négligeabilité nous permet d'écrire que $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ converge aussi.

En conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx \text{ converge si et seulement si } a > 0} \qquad (1)$$

Passons au calcul. Pour cela rappelons-nous le résultat de l'**intégrale de Gauss** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \sqrt{2\pi}$$

En posant alors le changement affine, donc licite, $u = \sqrt{2a}x$ $\left(du = \sqrt{2a}dx\right)$ il vient :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

(b) Avant de répondre à la question, constatons que :

$$\begin{aligned} -ax^2 + bx &= -a\left(x^2 - \frac{b}{a}x\right) \\ &= -a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

par conséquent en appliquant le changement de variable affine, donc licite $u = x - \dfrac{b}{2a}$ $(du = dx)$, le cours montre que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2 + bx\right) dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-au^2\right) e^{b^2/4a} du$ sont de même nature, égales en cas de convergence. En reprenant le résultat (1) nous savons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-au^2\right) e^{b^2/4a} du$ converge si et seulement si $a > 0$ (la constante multiplicative n'y change rien) ainsi :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2 + bx\right) dx \text{ converge si et seulement si } a > 0}$$

Passons au calcul. Pour cela rappelons-nous le résultat de l'**intégrale de Gauss** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}$$

lui même obtenu par changement de variable affine $\left(u = x/\sqrt{2}\right)$ à partir de l'intégrale bien connue $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2/2\right) dx = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent en posant dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-au^2\right) e^{b^2/4a} du$ le changement affine, donc licite, $v = \sqrt{a}u$ $(dv = \sqrt{a}du)$ il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-au^2\right) e^{b^2/4a} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-v^2\right) e^{b^2/4a} dv$$

soit donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2 + bx\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)} \qquad (2)$$

2. (a) Nous avons, par définition :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_U &= \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} e^{-x^2/2} dx \text{ converge} \right\} \\ &= \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + sx\right) dx \text{ converge} \right\} \end{aligned}$$

Or en revenant à la question précédente en posant $a = 1/2 > 0$ et $b = s$ nous pouvons affirmer que :

$$\boxed{\mathcal{D}_U = \mathbb{R}}$$

car nous avons vu que la contrainte portait uniquement sur la valeur de $a$ et non sur celle de $b$. En reprenant (2), pour $s$ appartenant à $\mathcal{D}_U$ nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi_U(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + sx\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall s \in \mathcal{D}_U, \quad \Phi_U(s) = \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)}$$

(b) Commençons par déterminer la loi de $Z = U^2$.
Tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$.
La condition $Z \leq x$ est **impossible** si $x < 0$ et :

$$\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leq x\} = \varnothing \in \mathcal{A} \qquad (3)$$

Pour tout réel positif $x$, $Z \leq x$ équivaut à $-\sqrt{x} \leq U \leq \sqrt{x}$. On en déduit que pour $x \geq 0$ :

$$\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leq x\} = \left\{\omega \in \Omega \mid -\sqrt{x} \leq U(\omega) \leq \sqrt{x}\right\} \qquad (4)$$

La condition $Z \leq x$ où $x \geq 0$ définit bien un **événement** lié à l'expérience considérée et :

$$\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

$Z$ est bien une **variable aléatoire** définie sur $\Omega$. Cherchons sa fonction de répartition notée $F_Z$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x])$$

- Si $x < 0$ :
$$F_Z(x) = 0 \text{ selon } (3)$$
- Si $x \geq 0$ :
$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}\left(\left[-\sqrt{x} \leq U \leq \sqrt{x}\right]\right) \\ &\quad \text{selon } (4) \\ &= \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{x}\right) \end{aligned}$$

où $\Phi$ est la fonction de répartition de $U$.

– $F_Z$ est clairement continue sur $\mathbb{R}_-^*$ ($F_Z$ coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$) et sur $\mathbb{R}_+$ par composition de $x \mapsto \sqrt{x}$ (respectivement $x \mapsto -\sqrt{x}$) continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (respectivement dans $\mathbb{R}_-$) et de $\Phi$ continue sur $\mathbb{R}$. Enfin :

$$\begin{aligned} \lim_{0^-} F_Z &= \lim_{0^+} F_Z \\ &= F_Z(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

– $F_Z$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (par composition) car n'oubliez pas que $x \longmapsto \pm\sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Nous pouvons donc conclure que les propriétés de $F_Z$ permettent de dire que $Z$ est une **variable à densité** dont une densité $f_Z$ sera obtenue par **dérivation** de $F_Z$ sur $\mathbb{R}^*$ et nous poserons, par exemple, que $f_Z(0) = 0$. Cela donne :

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_U(\sqrt{x}) + f_U(-\sqrt{x})\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x\pi}}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x^{-1/2}e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On dira en école, c'est hors programme en prépa, que $Z$ suit la **loi du Chi-deux à un degré de liberté** notée $\chi^2(1)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_Z &= \left\{s \in \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_Z(x)\,dx \text{ converge}\right\} \\ &= \left\{s \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{sx}x^{-1/2}e^{-\frac{x}{2}}dx \text{ converge}\right\} \\ &= \left\{s \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^{-1/2}e^{-\left(\frac{1-2s}{2}\right)x}dx \text{ converge}\right\} \\ &= \left\{s \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\left(\frac{1-2s}{2}\right)x}dx \text{ converge}\right\} \end{aligned}$$

Or notre cours nous a appris que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-\frac{x}{b}}dx$ (intégrale vue dans l'étude de la loi $\Gamma(b,t)$) convergeait si et seulement si $b>0$ et $t>0$ ce qui impose ici que $1-2s$ soit strictement positif $(b=1/2>0)$, par conséquent :

$$\boxed{\mathcal{D}_Z = ]-\infty, 1/2[}$$

Passons au calcul. Pour tout $s \in \mathcal{D}_Z$ :

$$\begin{aligned}
\Phi_Z(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\left(\frac{1-2s}{2}\right)x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1-2s}\right)\int_0^{+\infty}\left(\frac{2u}{1-2s}\right)^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{1-2s}}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du \\
&\phantom{=}\ \text{en posant le changement de variable affine, donc licite} \\
&\phantom{=}\ u=\left(\tfrac{1-2s}{2}\right)x \ \left(du=\left(\tfrac{1-2s}{2}\right)dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{1-2s}}\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{1-2s}}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall s \in \mathcal{D}_Z, \quad \Phi_Z(s) = (1-2s)^{-1/2}}$$

3. (a) L'ensemble $\mathcal{D}_{\mu X+\beta}$ est celui des réels $s$ tels que $e^{s(\mu X+\beta)}$ admet une espérance donc :

$$\mathcal{D}_{\mu X+\beta} = \left\{ s\in\mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}f_{\mu X+\beta}(x)\,dx \text{ converge}\right\}$$

- Supposons que $\mu>0$. Le cours nous informe que pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}
f_{\mu X+\beta}(x) &= \frac{1}{|\mu|}f_X\left(\frac{x-\beta}{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{\mu}f_X\left(\frac{x-\beta}{\mu}\right)
\end{aligned}$$

(densité d'une variable obtenue par **transformation affine**) ainsi nous avons l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}f_{\mu X+\beta}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\frac{1}{\mu}f_X\left(\frac{x-\beta}{\mu}\right)dx$$

Posons dans la dernière intégrale le changement affine, donc licite, $u=\dfrac{x-\beta}{\mu}$ $(\mu du = dx)$ alors les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\frac{1}{\mu}f_X\left(\frac{x-\beta}{\mu}\right)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\mu u+\beta s}f_X(u)\,du$ sont de même nature, égales en cas de convergence. Comme une constante multiplicative n'a aucune influence sur la nature d'une intégrale impropre, nous pouvons dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\frac{1}{\mu}f_X\left(\frac{x-\beta}{\mu}\right)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\mu u}f_X(u)\,du$ sont de même nature.

Autrement dit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}f_{\mu X+\beta}(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s\mu)u}f_X(u)\,du$ sont de même nature. Finalement :

$$\mathcal{D}_{\mu X+\beta} = \left\{ s\in\mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\mu x}f_X(x)\,dx \text{ converge}\right\}$$

Conclusion :

$$(s \in \mathcal{D}_{\mu X+\beta}) \Longleftrightarrow (\mu s \in \mathcal{D}_X) \tag{5}$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_{\mu X+\beta}(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\frac{1}{\mu} f_X\left(\frac{x-\beta}{\mu}\right)dx \\ &= e^{\beta s}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\mu u} f_X(u)\,du \\ &= e^{\beta s}\Phi_X(s\mu) \end{aligned}\tag{6}$$

- Si $\mu < 0$ le raisonnement ainsi que la conclusion ne changent pas (▲) après avoir remarqué que le changement de variable affine nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_{\mu X+\beta}(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\frac{1}{-\mu} f_X\left(\frac{x-\beta}{\mu}\right)dx \\ &= -e^{\beta s}\int_{+\infty}^{-\infty} e^{s\mu u} f_X(u)\,du \\ &= e^{\beta s}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\mu u} f_X(u)\,dx \\ &= e^{\beta s}\Phi_X(s\mu) \end{aligned}\tag{7}$$

- Supposons que $\mu$ soit nul. Montrons que $s \in \mathcal{D}_\beta \Longleftrightarrow 0 \in \mathcal{D}_X$. Par définition :

$$\mathcal{D}_\beta = \left\{s \in \mathbb{R} \mid e^{s\beta} \text{ admet une espérance}\right\}$$

Or pour tout réel $s$, $e^{s\beta}$ est une variable de Dirac (variable certaine) et donc admet sans la moindre hésitation une espérance (égale à $e^{s\beta}$). D'autre part $0 \in \mathcal{D}_X$ équivaut à dire que $0 \in \left\{s \in \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx \text{ converge}\right\}$ ce qui est le cas si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx$ converge, ce qui est toujours vrai bien sûr ! Ainsi :

$$s \in \mathcal{D}_\beta \Longleftrightarrow 0 \in \mathcal{D}_X \tag{8}$$

Selon (5) (▲) et (8), pour tout réel $\mu$ :

$$\boxed{(s \in \mathcal{D}_{\mu X+\beta}) \Longleftrightarrow (\mu s \in \mathcal{D}_X)}$$

Dans ce cas selon (6) et (7), pour tout $s$ de $\mathcal{D}_{\mu X+\beta}$ :

$$\boxed{\Phi_{\mu X+\beta}(s) = e^{\beta s}\Phi_X(s\mu)}$$

(b) Déterminer $\mathcal{D}_X$ lorsque $X \hookrightarrow \gamma(v)$ où $v \in \mathbb{R}_+^*$ revient à chercher les valeurs de $s$ telles que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{sx}x^{v-1}e^{-x}}{\Gamma(v)}dx$ est convergente. Or par propriété de l'exponentielle :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{sx}x^{v-1}e^{-x}}{\Gamma(v)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{v-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(v)}dx$$

- Cette intégrale est impropre en 0 mais comme :

$$\frac{x^{v-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(v)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\Gamma(v)\,x^{1-v}}$$

où l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-v}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $1 - v < 1$ puisque $v \in \mathbb{R}_+^*$. La convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{sx}x^{v-1}e^{-x}}{\Gamma(v)}dx$ est assurée par le critère d'équivalence appliqué aux fonctions positives sans imposer de conditions particulières à $s$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\upsilon-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(\upsilon)}dx$ converge si et seulement si $s-1<0$. En effet la condition est **nécessaire** car si $s-1\geq 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\upsilon-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(\upsilon)}=+\infty$ dans ce cas il exite un réel $x_0>0$ tel que pour tout réel $x\geq x_0$, $\dfrac{x^{\upsilon-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(\upsilon)}\geq 1$ avec $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty}dx$ divergente. La condition est **suffisante** car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{x^{\upsilon-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(\upsilon)}\right)=0$ dès lors $\dfrac{x^{\upsilon-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(\upsilon)}=\underset{(+\infty)}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ avec $\displaystyle\int_{\alpha>0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2>1$.
  Conclusion :
  $$\boxed{\mathcal{D}_X=]-\infty,1[} \tag{9}$$

Le calcul se fera en posant le changement affine, donc licite $u=-(s-1)x\ (du=-(s-1)dx)$, il vient alors pour tout réel $s$ de $\mathcal{D}_X$ :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(s) &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\upsilon-1}e^{(s-1)x}}{\Gamma(\upsilon)}dx\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\Gamma(\upsilon)}\left(\frac{u}{1-s}\right)^{\upsilon-1}\frac{1}{1-s}du\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}u^{\upsilon-1}}{\Gamma(\upsilon)(1-s)^{\upsilon}}du\\
&= \frac{1}{(1-s)^{\upsilon}\Gamma(\upsilon)}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{\upsilon-1}du\\
&= \frac{\Gamma(\upsilon)}{(1-s)^{\upsilon}\Gamma(\upsilon)}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall s\in\mathcal{D}_X,\quad \Phi_X(s)=\frac{1}{(1-s)^{\upsilon}}}$$

De même sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\Phi_{2X}(s) &= \mathbf{E}\left(e^{2sX}\right)\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{e^{2sx}x^{\upsilon-1}e^{-x}}{\Gamma(\upsilon)}dx\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\upsilon-1}e^{-(1-2s)x}}{\Gamma(\upsilon)}dx
\end{aligned}$$

et sans refaire l'étude précédente, on conviendra sans difficulté que $\mathcal{D}_{2X}=\{s\in\mathbb{R}\mid 1-2s>0\}$, soit donc :

$$\boxed{\mathcal{D}_{2X}=]-\infty,1/2[} \tag{10}$$

Ne changeons pas une tactique gagnante en posant un sempiternel changement affine $u=(1-2s)x\ (du=(1-2s)dx)$, alors pour tout $s$ de $\mathcal{D}_{2X}$ :

$$\begin{aligned}
\Phi_{2X}(s) &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\upsilon-1}e^{-(1-2s)x}}{\Gamma(\upsilon)}dx\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\Gamma(\upsilon)}\left(\frac{u}{1-2s}\right)^{\upsilon-1}\frac{1}{1-2s}du\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}u^{\upsilon-1}}{\Gamma(\upsilon)(1-2s)^{\upsilon}}du\\
&= \frac{1}{(1-2s)^{\upsilon}\Gamma(\upsilon)}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{\upsilon-1}du\\
&= \frac{\Gamma(\upsilon)}{(1-2s)^{\upsilon}\Gamma(\upsilon)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall s \in \mathcal{D}_{2X}, \quad \Phi_{2X}(s) = \frac{1}{(1-2s)^{\upsilon}}} \tag{11}$$

# Partie I : Loi du $\chi^2$ centré

1. Tout d'abord :

$$f_{X_4}(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x/2}}{4} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

- Comme $f_{X_4}$ coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$, nous nous intéresserons seulement à son étude sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction $f_{X_4}$ est définie et continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions avec pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}_+^*$ :

$$f'_{X_4}(x) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(x-2)$$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'_{X_4}(x) = \dfrac{1}{4}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{X_4}(x) = 0$ par croissance comparée (exponentielle-puissance)
- Le tableau de variations vient sans peine :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_{X_4}(x)$ | | $0$ | $0 \,\Vert 1/4$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'_{X_4}$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/2e$ | $\searrow$ | $0$ |

Voici la représentation graphique :

2. (a) Rappelons l'équivalence du cours : *soit $b$ et $t$ deux réels strictement positifs alors on a l'équivalence :*

$$X \hookrightarrow \gamma(t) \Longleftrightarrow Y = bX \hookrightarrow \Gamma(b, t)$$

or en y regardant de très près on voit que $X_r \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{r}{2}\right)$ ce qui équivaut à dire que :

$$\boxed{\frac{X_r}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Même si nous n'avons pas besoin du changement de variable pour en déduire l'espérance et la variance de $X_r$, jouons le jeu ... Comme d'après le cours $\mathbf{E}\left(\dfrac{X_r}{2}\right) = \dfrac{r}{2}$ il s'en suit par propriété élémentaire de l'espérance que :

$$\boxed{\mathbf{E}(X_r) = r}$$

enfin $\mathbf{V}\left(\dfrac{X_r}{2}\right) = \dfrac{r}{2}$ et :

$$\boxed{\mathbf{V}(X_r) = 2r}$$

puisque par propriété élémentaire de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X_r) &= \mathbf{V}\left(2\frac{X_r}{2}\right) \\ &= 4\mathbf{V}\left(\frac{X_r}{2}\right) \end{aligned}$$

(b) Selon (9) $\mathcal{D}_{\frac{X_r}{2}} = ]-\infty, 1[$ puisque $\dfrac{X_r}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\dfrac{r}{2}\right)$ et selon (10) :

$$\boxed{\mathcal{D}_{X_r} = ]-\infty, 1/2[}$$

et selon (11) :

$$\boxed{\forall s \in \mathcal{D}_X, \quad \Phi_{X_r}(s) = \frac{1}{(1-2s)^{\frac{r}{2}}}}$$

puisque $\upsilon = r/2$.

3. (a) Nous avons déjà vu à la question **2.b du préliminaire** que si une variable à densité suivait la loi normale centrée réduite son carré suivait la loi $\chi^2(1)$. Or $X_1$ suit la loi $\chi^2(1)$ et $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc mécaniquement, les variables $X_1$ et $U^2$ suivent la même loi, mais nous n'avons pas respecté le contexte de l'énoncé et de son résultat admis disant que si $X$ et $Y$ sont deux variables telles que $\Phi_X$ et $\Phi_Y$ coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors $X$ et $Y$ suivent la même loi. Or ici selon le **2.b et le 3.b de la partie I :**

$$\forall s \in \mathcal{D}_{X_1} = \mathcal{D}_U, \quad \Phi_{X_1}(s) = \frac{1}{(1-2s)^{\frac{1}{2}}} = \Phi_U(s)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{Les variables } X_1 \text{ et } U^2 \text{ suivent la même loi}}$$

(b) C'est une question de cours : comme chaque variable $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont indépendantes, il en est de même des variables $U_1^2, U_2^2, \ldots, U_n^2$ où chaque variable $U_k^2$ suit la loi $\chi^2(1)$, autrement dit la loi $\Gamma\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$. Par **stabilité de la loi gamma pour la somme de variables indépendantes** nous pouvons conclure que :

$$\boxed{W_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)}$$

(c) Il est inutile de tout refaire, en effet il suffit de se rappeler que pour $X_r$ suivant la loi $\Gamma\left(2, \dfrac{r}{2}\right)$ nous avions trouvé à la **question 2.b** que $\mathcal{D}_{X_r} = ]-\infty, 1/2[$ et $\forall s \in \mathcal{D}_X$, $\Phi_{X_r}(s) = \dfrac{1}{(1-2s)^{\frac{r}{2}}}$.
Ainsi en posant $r = n$ il vient que :

$$\boxed{\mathcal{D}_{W_n} = ]-\infty, 1/2[ \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathcal{D}_{W_n}, \quad \Phi_{W_n}(s) = \frac{1}{(1-2s)^{\frac{n}{2}}}}$$

et comme selon le préliminaire, pour tout $k$ de $\{1, \ldots, n\}$,

$$\forall s \in \mathcal{D}_{Z_k} = ]-\infty, 1/2[, \quad \Phi_{Z_k}(s) = \frac{1}{(1-2s)^{\frac{1}{2}}}$$

par conséquent :

$$\boxed{\forall s \in \mathcal{D}_{W_n}, \quad \Phi_{W_n}(s) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Z_k}(s)}$$

4. (a) Nous devons calculer l'espérance et la variance de $S_n$, en cas d'existence, car par définition, $S_n$ est une variable sans biais lorsque $\mathbf{E}(S_n) = \sigma^2$ et convergent lorsque la suite $(S_n)_n$ converge en probabilité vers $\sigma^2$, preuve qui nécessitera l'utilisation de la variance.

- Commençons par l'existence de l'espérance et de la variance de $S_n$.
Chaque variable $T_i^2$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ admet une **espérance** puisque chacune d'entre elles admet une **variance** en tant que variable normale centrée, de variance $\sigma^2$. Par conséquent

$S_n$ admet une **espérance** et une **variance** en tant que somme de telles variables avec par **linéarité de E** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(T_k^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{V}(T_k) + \underbrace{(\mathbf{E}(T_k))}_{=0}{}^2)\\
&\quad \text{par Huygens-Koenig inversée}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(T_k)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2\\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

et

$$\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2}$$

- Par **indépendance** des variables :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}\left(T_k^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2\sigma^4\\
&= \frac{2\sigma^4}{n}
\end{aligned}$$

Expliquons le calcul de $\mathbf{V}\left(T_k^2\right)$ pour $k \in \{1,\ldots,n\}$. Chaque variable $T_k$ suit la loi normale de paramètres 0 et $\sigma^2$ donc selon le théorème fondamental de la loi normale, $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $\dfrac{T_k}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $\dfrac{T_k^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2(1)$ soit donc la loi $\Gamma(2,1/2)$ comme nous l'a appris la question **3.a** de cette partie. Par théorème $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathbf{V}\left(\dfrac{T_k^2}{\sigma^2}\right) = 2$ et par propriété élémentaire de la variance, $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathbf{V}\left(T_k^2\right) = 2\sigma^4$.

- Pour terminer montrons que la suite $(S_n)_n$ **converge en probabilité** vers $\sigma^2$.
Selon l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}([|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \mathbf{P}\left(\left[\left|S_n - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2} = 0$ le théorème d'encadrement nous assure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left[\left|S_n - \sigma^2\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

ce qui est la définition de :

$$\boxed{\text{La suite } (S_n)_n \text{ converge en probabilité vers } \sigma^2}$$

(b) Montrer que l'intervalle $\left]0, \dfrac{nS_n}{k_\alpha}\right]$ est un intervalle de confiance de $\sigma^2$ au risque $\alpha \in ]0,1[$ revient à montrer que :

$$\mathbf{P}\left(\left[\sigma^2 \in \left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]\right]\right) \geq 1 - \alpha$$

soit donc :

$$\mathbf{P}\left(\left[0<\sigma^2\leq\frac{nS_n}{k_\alpha}\right]\right)\geq 1-\alpha$$

soit encore :

$$\mathbf{P}\left(\left[\frac{nS_n}{\sigma^2}\geq k_\alpha\right]\right)\geq 1-\alpha$$

où $k_\alpha$ est le réel strictement positif tel que $\mathbf{P}([W_n\geq k_\alpha])=1-\alpha$. Pour répondre à cette question déterminons la loi de la variable $\frac{nS_n}{\sigma^2}$ et montrons que c'est celle de $W_n$.

Rappelons que $S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i^2$ où chaque variable $T_i$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, donc pour tout $i$ de $\{1,\ldots,n\}$, $\frac{T_i}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ qui est suivie par toutes les variables $U_i$ constituant la somme définissant $W_n$. Ainsi pour tout $i$ de $\{1,\ldots,n\}$, $\left(\frac{T_i}{\sigma}\right)^2$ et $Z_i$ suivent la même loi, donc il en est de même pour $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{T_i}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}{T_i}^2$ et $W_n$ autrement dit $\frac{nS_n}{\sigma^2}$ et $W_n$ suivent la même loi et :

$$\boxed{\text{L'intervalle }\left]0,\frac{nS_n}{k_\alpha}\right]\text{ est un intervalle de confiance de }\sigma^2\text{ au risque }\alpha}$$

# Partie 2 : Loi du $\chi^2$ décentré

1. (a) Par le **théorème de transfert**, la variable $U^3$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$ converge soit si et seulement si $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^3e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$ converge. En cas de convergence, l'espérance de $U^3$ sera **nulle** toujours par **imparité de l'intégrande**. Par croissance comparée (exponentielle-puissance) :

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\times x^3e^{-x^2/2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right)^{5/2}e^{-x^2/2}=0$$

ainsi $x^3e^{-x^2/2}\underset{(+\infty)}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ vous connaissez la suite ... Ainsi :

$$\boxed{\text{La variable }U^3\text{ admet une espérance qui est nulle}}$$

Pour calculer $\mathbf{E}\left(U^4\right)$ nous pourrions passer classiquement par le calcul de l'intégrale (après avoir justifié la convergence) mais remarquons plutôt que selon la formule de Huygens-Koenig inversée :

$$\mathbf{E}\left(U^4\right)=\mathbf{V}\left(U^2\right)+\left(\mathbf{E}\left(U^2\right)\right)^2$$

avec $U^2\hookrightarrow\chi^2(1)=\Gamma\left(2,\frac{1}{2}\right)$ donc $\mathbf{V}\left(U^2\right)$ et $\mathbf{E}\left(U^2\right)$ existent et valent respectivement $4\times\frac{1}{2}=2$ et $2\times\frac{1}{2}=1$, dès lors :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(U^4\right)=3}$$

(b) Nous avons par définition $Y_1=M_1^2$ où cette dernière admet une espérance puisque la variance de $M_1$ existe en tant que variable normale. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_1)&=\mathbf{E}\left(M_1^2\right)\\&=\mathbf{V}(M_1)+(\mathbf{E}(M_1))^2\\&\quad\text{par la formule de Huygens-Koenig inversée}\\&=1+m_1^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_1)=1+\lambda_1}$$

Les lignes qui vont suivre vont montrer que la variable $Y_1$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire de telles variables avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y_1) &= \mathbf{E}\left(Y_1^2\right) - \left(\mathbf{E}(Y_1)\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(M_1^4\right) - (1+\lambda_1)^2 \\
&= \mathbf{E}\left((M_1 - m_1 + m_1)^4\right) - (1+\lambda_1)^2 \\
&= \mathbf{E}\left((M_1 - m_1)^4\right) + 4\mathbf{E}\left((M_1 - m_1)^3 m_1\right) + 6\mathbf{E}\left((M_1 - m_1)^2 m_1^2\right) \\
&\qquad + 4\mathbf{E}\left((M_1 - m_1) m_1^3\right) + m_1^4 - (1+\lambda_1)^2 \\
&\quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbf{E}\left(U^4\right) + 4m_1\mathbf{E}\left(U^3\right) + 6m_1^2\mathbf{E}\left(U^2\right) + 4m_1^3\mathbf{E}(U) + m_1^4 - (1+\lambda_1)^2 \\
&= 3 + 0 + \left(6m_1^2 \times 1\right) + m_1^4 - (1+\lambda_1)^2 \\
&\quad \text{car } \mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(M_1 - m_1) = \mathcal{N}(0,1) \\
&= 3 + 6\lambda_1 + \lambda_1^2 - (1+\lambda_1)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(Y_1) = 4\lambda_1 + 2}$$

(c) Nous avons sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned}
\Phi_{Y_1}(s) &= \mathbf{E}\left(e^{sY_1}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(e^{sM_1^2}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx^2} f_{M_1}(x)\,dx \\
&\quad \text{selon le théorème de transfert} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{sx^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-m_1)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xm_1 - \frac{1}{2}m_1^2 + sx^2 - \frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= e^{-\frac{1}{2}m_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xm_1 + sx^2 - 1/2x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= e^{-\frac{1}{2}m_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(1/2-s)x^2 + xm_1}}{\sqrt{2\pi}} dx
\end{aligned}$$

Nous savons d'après la **question 1.b du préliminaire** que l'intégrale précédente converge si et seulement si $1/2 - s > 0$ (on identifie $1/2 - s$ à $a$) ainsi :

$$\boxed{\mathcal{D}_{Y_1} = ]-\infty, 1/2[}$$

Passons au calcul maintenant. Selon (2), en posant $a = 1/2 - s$ et $b = m_1$ il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi_{Y_1}(s) &= e^{-1/2m_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{1/2 - s}} \exp\left(\frac{m_1^2}{4(1/2 - s)}\right) \\
&= \frac{e^{-1/2\lambda_1}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2 - s}} \exp\left(\frac{\lambda_1}{4(1/2 - s)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{1/2 - s}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{4(1/2 - s)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{1/2 - s}} \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1 - 2s}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall s \in \mathcal{D}_{Y_1}, \quad \Phi_{Y_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2s}} \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1 - 2s}\right)}$$

2. (a) La variable $Y_n$ admet une espérance et une variance en tant que somme de telles variables (on reprend le même raisonnement que $Y_1$). Par **linéarité** de l'espérance il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left(M_j^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{V}(M_j) + (\mathbf{E}(M_j))^2\right) \\
&\quad \text{selon la formule de Huygens-Koenig inversée} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(1 + m_j^2\right) \\
&= n + \sum_{j=1}^{n} m_j^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = n + \lambda_n}$$

D'autre part, par indépendance des variables $M_j$ donc des $M_j^2$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y_n) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{V}\left(M_j^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{E}\left(M_j^4\right) - \left(\mathbf{E}\left(M_j^2\right)\right)^2\right) \\
&\quad \text{selon la formule de Huygens-Koenig} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{E}\left((M_j - m_j + m_j)^4\right) - \left(\mathbf{V}(M_j) + (\mathbf{E}(M_j))^2\right)^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{E}\left((M_j - m_j + m_j)^4\right) - \left(1 + m_j^2\right)^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(3 + 6m_j^2 + m_j^4 - \left(1 + 2m_j^2 + m_j^4\right)\right) \\
&= \cdots \text{ en reprenant les mêmes calculs qu'au } \mathbf{1.b} \text{ de cette partie} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(4m_j^2 + 2\right) \\
&= 4\sum_{j=1}^{n} m_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(Y_n) = 2n + 4\lambda_n}$$

(b) Pour tout $s$ de $\mathcal{D}_{Y_n}$ on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{Y_n}(s) &= \mathbf{E}\left(e^{sY_n}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\exp\left(s\sum_{j=1}^{n} M_j^2\right)\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left(\exp\left(sM_j^2\right)\right) \\
&\quad \text{par indépendance des variables } M_j^2 \\
&= \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2s}}\exp\left(\frac{sm_j^2}{1-2s}\right)\right) \\
&\quad \text{en reprenant le même raisonnement} \\
&\quad \text{qu'au } \mathbf{1.c} \text{ de cette partie} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-2s}}\right)^n \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{sm_j^2}{1-2s}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall s \in \left]-\infty, 1/2\right[, \quad \Phi_{Y_n}(s) = \frac{1}{(1-2s)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(\frac{s\lambda_n}{1-2s}\right)} \tag{12}$$

## Partie 3 : Nombre aléatoire de degré de liberté

1. (a) Comme par hypothèse, $\mathbf{P}([K=k]) > 0$, la probabilité conditionnelle a bien un sens avec, par définition pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[K=k]}([X \leq x]) &= \frac{\mathbf{P}([X \leq x] \cap [K=k])}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([J_1 \leq x] \cap \ldots \cap [J_K \leq x] \cap [K=k])}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([J_1 \leq x] \cap \ldots \cap [J_k \leq x] \cap [K=k])}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([J_1 \leq x] \cap \ldots \cap [J_k \leq x])\,\mathbf{P}([K=k])}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&\quad \text{par indépendance des variables en jeu} \\
&= \mathbf{P}([J_1 \leq x] \cap \ldots \cap [J_k \leq x]) \\
&= \mathbf{P}([X_k \leq x]) \text{ par définition de } X_k = \sup(J_i)_{1 \leq i \leq k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}_{[K=k]}([X \leq x]) = \mathbf{P}([X_k \leq x])}$$

(b) La fonction de répartition de $X$ notée $F_X$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$$

Selon la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événements $([K=k])_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ il vient :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{[K=k]}([X \leq x])\,\mathbf{P}([K=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x])\,\mathbf{P}([K=k]) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([J_1 \leq x] \cap \ldots \cap [J_k \leq x])
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{P}\left([J_i \leq x]\right)\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k} x\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k & \text{si} \quad x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{n}\left(\dfrac{1-x^n}{1-x}\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

(c) C'est une histoire de classes ...

- $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $]1,+\infty[$ car $F_X$ y coïncide avec la fonction nulle ;
- $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $[0,1]$ car sur ce segment c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas ;
- $\lim\limits_{x\to 0^-} F_X(x) = 0 = F_X(0)$ et $F_X$ est continue en 0 ;
- $\lim\limits_{x\to 1^-} F_X(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{n}\left(\dfrac{1-x^n}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \dfrac{n}{n} = 1 = F_X(1)$ et $F_X$ est continue en 1.

En conclusion $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout (sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1), par conséquent :

$$\boxed{X \text{ est une variable à densité}}$$

Comme $X$ est une variable à **support borné**, $X$ admet une espérance égale à :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

Arrêtons-nous quelques instants pour obtenir une densité de $X$ noté $f_X$ obtenue par **dérivation** de $F_X$ sur $\mathbb{R}^*-\{1\}$ sans oublier de poser, **par exemple**, que $f_X(0) = \dfrac{1}{n}$ et $f_X(1) = \dfrac{n+1}{2}$ ce qui donne :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_0^1 \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} kx^k dx \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\int_0^1 x^k dx \\
&\quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}} \tag{13}$$

(d) Par le **théorme de transfert**, sous réserve d'existence :

$$\mathbf{E}(g(K)) = \sum_{k\in K(\Omega)} g(k)\,\mathbf{P}([K=k])$$

et comme $K(\Omega)$ est un **ensemble fini**, l'espérance existe et vaut :

$$\mathbf{E}(g(K)) = \sum_{k=1}^{n} g(k)\,\mathbf{P}([K=k])$$

Déterminons maintenant $g(k)$ avec :

$$g(k) = \begin{cases} \mathbf{E}_{[K=k]}(X) & \text{si} \quad k\in N_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminons la loi conditionnelle de $X$ sachant que $[K=k]$ pour déterminer l'espérance conditionnelle correspondante. Selon la **question 1.a** nous savons que pour tout réel $x$ :

$$\mathbf{P}_{[K=k]}([X\le x]) = \mathbf{P}([X_k\le x])$$

ainsi pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[K=k]}([X\le x]) &= \mathbf{P}\left(\sup_{1\le i\le k}(J_i)\le x\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k}\mathbf{P}([J_i\le x]) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x^k & \text{si} \quad x\in[0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On laissera le soin au lecteur de vérifier trivialement que la fonction obtenue est continue partout et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout afin de pouvoir affirmer que la loi conditionnelle de $X$ sachant que $[K=k]$ est une **variable à densité** dont la densité associée est obtenue par **dérivation**, ce qui donne par exemple :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ kx^{k-1} & \text{si} \quad x\in[0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}
g(k) &= \begin{cases} \mathbf{E}_{[K=k]}(X) & \text{si} \quad k \in N_K = \{1,\dots,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 x\varphi(x)\,dx & \text{si} \quad k \in \{1,\dots,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 kx^k dx & \text{si} \quad k \in \{1,\dots,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left[k\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 & \text{si} \quad k \in \{1,\dots,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{k}{k+1} & \text{si} \quad k \in \{1,\dots,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(g(K)) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\mathbf{P}([K=k]) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \qquad (14)
\end{aligned}$$

Selon (13) et (14) nous avons bien vérifié que :

$$\boxed{\mathbf{E}(g(K)) = \mathbf{E}(X)}$$

2. (a) Les causes produisent les mêmes conséquences, à savoir puisque $\mathbf{P}([K=k]) > 0$, la probabilité conditionnelle a bien un sens avec, par définition, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[K=k]}([H_n \le x]) &= \frac{\mathbf{P}([H_n \le x] \cap [K=k])}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&= \frac{\mathbf{P}\left(\left[U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2K}^2 \le x\right] \cap [K=k]\right)}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&= \frac{\mathbf{P}\left(\left[U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2k}^2 \le x\right] \cap [K=k]\right)}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&= \frac{\mathbf{P}\left(\left[U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2k}^2 \le x\right]\right)\mathbf{P}([K=k])}{\mathbf{P}([K=k])} \\
&\quad \text{par indépendance des variables en jeu} \\
&= \mathbf{P}\left(\left[U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2k}^2 \le x\right]\right) \\
&= \mathbf{P}([Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{n+2k} \le x]) \\
&= \mathbf{P}([W_{n+2k} \le x]) \ \text{ par définition de } W_{n+2k}
\end{aligned}$$

Comme les deux fonctions de répartition sont identiques sur $\mathbb{R}$ entier :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k\text{, la loi conditionnelle de } H_n \text{ sachant } [K=k] \text{ est la loi de } W_{n+2k}}$$

(b) Par définition, pour tout entier $k$ et tout réel $s$ de $]-\infty, 1/2[$ :

$$\begin{aligned}
g(k) &= \mathbf{E}_{[K=k]}(X) \\
&= \mathbf{E}_{[K=k]}\left(e^{sH_n}\right) \\
&= \mathbf{E}_{[K=k]}\left(\exp\left(s\left(U_1^2 + \cdots + U_{n+2K}^2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Or pour tout entier $k$, tout réel $s$ de $]-\infty,1/2[$ et tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[K=k]}\left(\left[\exp\left(s\left(U_1^2+\cdots+U_{n+2K}^2\right)\right)\leq x\right]\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(\left[\exp\left(s\left(U_1^2+\cdots+U_{n+2K}^2\right)\right)\leq x\right]\cap[K=k]\right)}{\mathbf{P}([K=k])}\\
&= \frac{\mathbf{P}\left(\left[\exp\left(s\left(U_1^2+\cdots+U_{n+2k}^2\right)\right)\leq x\right]\cap[K=k]\right)}{\mathbf{P}([K=k])}\\
&= \frac{\mathbf{P}\left(\left[\exp\left(s\left(U_1^2+\cdots+U_{n+2k}^2\right)\right)\leq x\right]\right)\mathbf{P}([K=k])}{\mathbf{P}([K=k])}\\
&\quad \text{par indépendance des variables en jeu}\\
&= \mathbf{P}\left(\left[\exp\left(s\left(Z_1+\cdots+Z_{n+2k}\right)\right)\leq x\right]\right)\\
&= \mathbf{P}\left(\left[\exp\left(sW_{n+2k}\right)\leq x\right]\right)
\end{aligned}$$

Comme les deux fonctions de répartition sont identiques sur $\mathbb{R}$ entier, pour tout entier $k$, la loi conditionnelle de $\exp(sW_{n+2K})$ sachant $[K=k]$ est la loi de $\exp(sW_{n+2k})$ d'où pour tout entier $k$ et tout réel $s$ de $]-\infty,1/2[$ :

$$\begin{aligned}
g(k) &= \mathbf{E}\left(\exp\left(s\left(U_1^2+\cdots+U_{n+2k}^2\right)\right)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n+2k}\mathbf{E}\left(\exp\left(sU_i^2\right)\right)\\
&\quad \text{par indépendance des variables}\\
&= \left(\mathbf{E}\left(\exp\left(sU^2\right)\right)\right)^{n+2k}\\
&\quad \text{puisque toutes les variables } U_i \text{ suivent la même loi que } U\\
&= \left(\Phi_{U^2}(s)\right)^{n+2k}
\end{aligned}$$

et selon le **2.b du préliminaire**, avec $s\in]-\infty,1/2[$ :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad g(k)=(1-2s)^{-n/2-k}}$$

(c) Par le **théorème de transfert** $g(K)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(K)\mathbf{P}([K=k])$ est convergente. En cas de convergence $\mathbf{E}(g(K))$ est le réel défini par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(g(K)) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(1-2s)^{-n/2-k}\,\mathbf{P}([K=k])\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(1-2s)^{-n/2-k}\left(\frac{e^{-\lambda/2}(\lambda/2)^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

or pour tout entier naturel $k$ :

$$(1-2s)^{-n/2-k}\left(\frac{e^{-\lambda/2}(\lambda/2)^k}{k!}\right)=(1-2s)^{-n/2}\,e^{-\lambda/2}\frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)^k}{k!}$$

nous sommes donc en présence d'un terme général de série convergente puisque proportionnel à celui d'une série exponentielle. Ainsi $\mathbf{E}(g(K))$ existe et vaut :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(g(K)) &= (1-2s)^{-n/2}\,e^{-\lambda/2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)^k}{k!}\\
&= (1-2s)^{-n/2}\,e^{-\lambda/2}\exp\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)\\
&= (1-2s)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)
\end{aligned}$$

et nous retrouvons bien ce qui était demandé, à savoir :

$$\boxed{\mathbf{E}(g(K))=(1-2s)^{-n/2}\exp\left(\frac{\lambda s}{1-2s}\right)}$$

(d) Selon l'égalité $(*)$ admise dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \mathbf{E}\left(e^{sH_n}\right)\\ &= \mathbf{E}(g(K))\\ &= (1-2s)^{-n/2}\exp\left(\frac{\lambda s}{1-2s}\right)\end{aligned}$$

et selon (12) et le résultat admis disant que si $X$ et $Y$ sont deux variables telles que $\Phi_X$ et $\Phi_Y$ coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors $X$ et $Y$ suivent la même loi, alors :

$$\boxed{H_n \hookrightarrow \chi^2(n,\lambda)}$$

(e) Selon l'égalité $(*)$ admise dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\frac{1}{H_n}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{E}\left(\frac{1}{H_n}\mid [K=k]\right)\mathbf{P}([K=k])\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)\,\mathbf{P}([K=k])\end{aligned}$$

avec pour tout entier naturel $k$ :

$$\begin{aligned}g(k) &= \mathbf{E}_{[K=k]}\left(\frac{1}{H_n}\right)\\ &= \mathbf{E}_{[K=k]}\left(\exp\left(\frac{s}{H_n}\right)\right)\\ &= \mathbf{E}_{[K=k]}\left(\exp\left(\frac{s}{U_1^2+\cdots+U_{n+2K}^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Or pour tout entier $k$, tout réel $s$ de $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ et tout réel $x$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[K=k]}\left(\left[\exp\left(\frac{s}{U_1^2+\cdots+U_{n+2K}^2}\right)\le x\right]\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(\left[\exp\left(\frac{s}{U_1^2+\cdots+U_{n+2K}^2}\right)\le x\right]\right)\cap[K=k])}{\mathbf{P}([K=k])}\\ &= \frac{\mathbf{P}\left(\left[\exp\left(\frac{s}{U_1^2+\cdots+U_{n+2K}^2}\right)\le x\right]\cap[K=k]\right)}{\mathbf{P}([K=k])}\\ &= \frac{\mathbf{P}\left(\left[\exp\left(\frac{s}{U_1^2+\cdots+U_{n+2K}^2}\right)\le x\right]\right)\mathbf{P}([K=k])}{\mathbf{P}([K=k])}\\ &\quad \text{par indépendance des variables en jeu}\\ &= \mathbf{P}\left(\left[\exp\left(\frac{s}{Z_1+\cdots+Z_{n+2k}}\right)\le x\right]\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\left[\exp\left(\frac{s}{W_{n+2k}}\right)\le x\right]\right)\end{aligned}$$

par conséquent la loi conditionnelle de $\frac{1}{H_n}$ sachant que $[K=k]$ est la **même** que que celle de $\frac{1}{W_{n+2k}}$ dès lors :

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{H_n}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{E}\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right)\mathbf{P}([K=k])$$

avec par le **théorème de transfert** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f_{W_{n+2k}}(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x} f_{W_{n+2k}}(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+k}\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} x^{\frac{n}{2}+k-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\
&\quad \text{puisque } W_{n+2k} \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n+2k}{2}\right) \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+k}\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} x^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+k-1} 2\left(\frac{n}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k-1\right)} x^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\left(\frac{n}{2}+k-1\right)} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+k-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+k-1\right)} x^{\left(\frac{n}{2}+k-1\right)-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx}_{=1 \text{ (intégrale d'une variable suivant la loi } \mathbf{\Gamma}\left(2,\frac{n}{2}+k-1\right)} \\
&\quad \text{par la relation fonctionnelle } \forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\
&= \frac{1}{n+2k-2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{H_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2k-2}\right) \mathbf{P}\left([K=k]\right)$$

et par le **théorème de transfert** dans le cas discret :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{1}{H_n}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)}$$

# Partie 4 : Estimateur de James Stein

1. Tout d'abord $B_p = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\theta_j}^2$ où pour tout entier $j$ de $\{1,\ldots,p\}$, les variables $\widehat{\theta_j}$ **indépendantes** (par **définition** d'un $p-$ échantillon) sont telles $\forall j \in \{1,\ldots,p\}$, $\widehat{\theta_j} \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta_j, 1)$, alors en reprenant la loi de $Y_n$ de la **partie 2** nous pouvons dire que $B_p \hookrightarrow \chi^2\left(p, \sum_{j=1}^{p} \theta_j^2\right)$ soit donc :

$$\boxed{B_p \hookrightarrow \chi^2(p, b_p)}$$

Toujours selon la **question 2.b de la partie 2 :**

$$\mathbf{E}(B_p) = p + b_p$$

Comme $p \neq 0$, $\mathbf{E}(B_p) \neq b_p$ et :

$$\boxed{\text{La variable } B_p \text{ constitue un estimateur biaisé de } b_p}$$

2. (a) Nous avons :

$$
\begin{aligned}
R(\theta^*,\theta) - R\left(\widehat{\theta},\theta\right) &= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\theta_j^* - \theta_j\right)^2\right) - \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\widehat{\theta_j} - \theta_j\right)^2\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{c}{B_p}\right)\widehat{\theta_j} - \theta_j\right)^2\right) - \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\widehat{\theta_j}^2 + \theta_j^2 - 2\theta_j\widehat{\theta_j}\right)^2\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{c}{B_p}\right)^2\widehat{\theta_j}^2 + \theta_j^2 - 2\left(1 - \frac{c}{B_p}\right)\widehat{\theta_j}\theta_j\right)\right) \\
&\qquad - \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\widehat{\theta_j}^2 + \theta_j^2 - 2\theta_j\widehat{\theta_j}\right)\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{c}{B_p}\right)^2\widehat{\theta_j}^2 + \theta_j^2 - 2\left(1 - \frac{c}{B_p}\right)\widehat{\theta_j}\theta_j - \widehat{\theta_j}^2 - \theta_j^2 + 2\theta_j\widehat{\theta_j}\right)\right) \\
&\quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\left(1 - \frac{c}{B_p}\right)^2\widehat{\theta_j}^2 + \frac{2c}{B_p}\widehat{\theta_j}\theta_j - \widehat{\theta_j}^2\right)\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\left(1 + \frac{c^2}{B_p^2} - \frac{2c}{B_p}\right)\widehat{\theta_j}^2 + \frac{2c}{B_p}\widehat{\theta_j}\theta_j - \widehat{\theta_j}^2\right)\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{c^2}{B_p^2}\sum_{j=1}^{p}\widehat{\theta_j}^2 - \frac{2c}{B_p}\sum_{j=1}^{p}\widehat{\theta_j}^2 + \frac{2c}{B_p}\sum_{j=1}^{p}\widehat{\theta_j}\theta_j\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{c^2}{B_p^2}B_p - \frac{2c}{B_p}B_p + \frac{2c}{B_p}\sum_{j=1}^{p}\widehat{\theta_j}\theta_j\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{c^2}{B_p} - 2c + \frac{2c}{B_p}\sum_{j=1}^{p}\widehat{\theta_j}\theta_j\right) \\
&= c^2\mathbf{E}\left(\frac{1}{B_p}\right) - 2c + 2c\mathbf{E}\left(\frac{1}{B_p}\sum_{j=1}^{p}\widehat{\theta_j}\theta_j\right) \\
&= c^2\mathbf{E}\left(\frac{1}{B_p}\right) - 2c + 2c\mathbf{E}\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) \\
&= c^2\mathbf{E}\left(\frac{1}{H_p}\right) - 2c + 2c\mathbf{E}\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) \\
&\quad \text{puisque les variables } B_p \hookrightarrow \chi^2(p,b_p) \text{ et } H_p \hookrightarrow \chi^2(p,\lambda) \\
&\quad (\text{où } \lambda = 2\mathbf{E}(K) = b_p),\ \text{suivent donc la même loi} \\
&\quad \text{donc } \mathbf{E}\left(\frac{1}{B_p}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{H_p}\right) \\
&= c^2\mathbf{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) - 2c + 2c\mathbf{E}\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{c^2 - 2c(p-2+2K) + 4cK}{p-2+2K}\right) \\
&\quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{c^2 - 2c(p-2)}{p-2+2K}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{R(\theta^*,\theta) - R\left(\widehat{\theta},\theta\right) = \left(c^2 - 2c(p-2)\right)\mathbf{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)}$$

(b) Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& R(\theta^*,\theta) - R\left(\widehat{\theta},\theta\right) < 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(c^2 - 2c(p-2)\right)\mathbf{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & c^2 - 2c(p-2) < 0 \text{ puisque } K \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \text{ et } p \geq 3 \\
\Longleftrightarrow\quad & c < 2(p-2) \ \text{ car } c > 0
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\left(R(\theta^*,\theta) - R\left(\widehat{\theta},\theta\right) < 0\right) \Longleftrightarrow (0 < c < 2(p-2))}$$

La fonction $\psi : c \longmapsto c^2 - 2c(p-2)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale avec :

$$\psi'(c) = 2c - 2(p-2)$$

ainsi :

| $c$ | $0$ | | $p-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\psi'(c)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\psi$ | | $\searrow$ | $-(p-2)^2$ | $\nearrow$ | |

Par conséquent la différence $R(\theta^*,\theta) - R\left(\widehat{\theta},\theta\right)$ est minimale lorsque $c = p-2$ et dans ce cas :

$$\theta^* = \left(1 - \frac{p-2}{B_p}\right)\widehat{\theta}$$

✠✠✠✠✠