

EXERCICE 1.2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *2-symétrique* si la matrice A^2 est symétrique.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Caractériser à l'aide des coefficients de A le fait que A est 2-symétrique. Donner un exemple de matrice réelle carrée d'ordre 2 qui est 2-symétrique mais qui n'est pas symétrique.
2. Dans cette question, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$).
 - (a) Vérifier que si A est symétrique, alors elle est 2-symétrique.
 - (b) On suppose que A est inversible et 2-symétrique. Montrer que A^{-1} est 2-symétrique.
 - (c) On suppose maintenant que A est antisymétrique (c'est-à-dire que $-A$ est la transposée de A). Montrer que A est 2-symétrique.
3. Dans cette question, on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont 2-symétriques.
 - (a) On suppose que A et B commutent. Vérifier que le produit AB est une matrice 2-symétrique. Montrer que ce n'est plus vrai en général si l'on ne suppose plus que A et B commutent.
 - (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la somme $A+B$ soit une matrice 2-symétrique.
 - (c) Donner un exemple où A et B sont 2-symétriques et commutent, mais telles que $A+B$ ne soit pas 2-symétrique.
4. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note X la matrice colonne associée à x . On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique ($\langle x, y \rangle = {}^tXY$). On se donne une matrice 2-symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé et on désigne par $\text{Sp}(f)$ l'ensemble des ses valeurs propres (réelles).
 - (a) Justifier le fait que l'endomorphisme f^2 est symétrique.
 - (b) On note $\text{Sp}(f^2)$ sous la forme $\text{Sp}(f^2) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) avec $m \in \{1, \dots, n\}$ et on désigne par E_i le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre λ_i . Justifier le fait que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe orthogonale des sous-espaces $(E_i)_{1 \leq i \leq m}$.
 - (c) Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Montrer que le sous-espace E_i est stable par f . Vérifier que la restriction f_i de f à E_i , considérée comme endomorphisme de E_i , admet $X^2 - \lambda_i$ comme polynôme annulateur.
 - (d) On suppose maintenant que tous les λ_i sont strictement positifs et on pose $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$. Montrer que E_i est la somme directe vectorielle du noyau de $f - \alpha_i \text{Id}$ et du noyau de $f + \alpha_i \text{Id}$. En déduire que f est diagonalisable. Est-il forcément symétrique?
 - (e) On fait désormais comme hypothèses que $\text{Sp}(f^2) \subseteq \mathbb{R}_+$ et que $\text{Sp}(f) \cap \text{Sp}(-f) = \emptyset$. Montrer que dans ce cas f est un endomorphisme symétrique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.2

1. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La condition $A^2 = {}^t(A^2)$ est réalisée si et seulement si $a = -d$ ou $c = b$. Comme matrice réelle carrée d'ordre 2 qui est 2-symétrique mais qui n'est pas symétrique, on peut prendre par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Si A est symétrique, on a clairement ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = A^2$; la matrice A est donc 2-symétrique.
- (b) Si A est inversible et 2-symétrique, les règles de calcul avec la transposition entraînent que ${}^t(A^{-1})^2 = [{}^t(A^2)]^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ et par suite que A^{-1} est 2-symétrique.
- (c) Si A est antisymétrique, on a ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2$; il s'ensuit que A est 2-symétrique.
3. (a) Supposons que A et B commutent et sont 2-symétriques, alors on a ${}^t(AB)^2 = {}^t(ABAB) = {}^t(A^2B^2) = {}^t(B^2){}^t(A^2) = B^2A^2 = (AB)^2$. Par conséquent, AB est 2-symétrique. On peut prendre les deux matrices A et B données en 1. puisque la matrice

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas 2-symétrique d'après les conditions trouvées dans la première question.

- (b) La somme $A + B$ est 2-symétrique si et seulement si $A^2 + B^2 + AB + BA = (A + B)^2 = {}^t(A + B)^2 = {}^tA^2 + {}^tB^2 + {}^t(AB + BA) = A^2 + B^2 + {}^t(AB + BA)$. On voit donc qu'il est nécessaire et suffisant que la matrice $AB + BA$ soit symétrique.
- (c) D'après la question précédente, on voit qu'il suffit de trouver deux matrices A et B qui sont 2-symétriques et commutent, mais telles que le produit AB ne soit pas symétrique. Prenons une matrice A qui est 2-symétrique mais pas symétrique (qui existe d'après 1.) ; alors la matrice $B = A + I$ convient puisque $AB = A^2 + A$ ne peut pas être symétrique.
4. (a) On a $\langle f^2(x), y \rangle = {}^t(A^2X)Y = {}^tX{}^t(A^2)Y = {}^tXA^2Y = \langle x, f^2(y) \rangle$; il s'ensuit que f^2 est symétrique.
- (b) Comme f^2 est symétrique dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, ce dernier est la somme directe orthogonale des sous-espaces $(E_i)_{1 \leq i \leq m}$.
- (c) Si $x \in E_i$, il vient $f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = \lambda_i f(x)$, donc le sous-espace E_i est stable par f . Par construction, il est clair que $X^2 - \lambda_i$ est un polynôme annulateur de f_i .
- (d) Si $x \in E_i$, comme $X^2 - \lambda_i$ est un polynôme annulateur de f_i , une analyse synthèse simple montre que la décomposition $x = 1/(2\alpha_i)[(\alpha_i x - f(x)) + (f(x) + \alpha_i x)]$ où $\alpha_i x - f(x)$ (resp. $f(x) + \alpha_i x$) appartient au noyau de $f - \alpha_i Id$ (resp. au noyau de $f + \alpha_i Id$) est unique. Ceci répond à la première partie de la question. On peut donc trouver une base de E_i formée de vecteurs propres de f . Par concaténation, on construit une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f qui est donc diagonalisable. Pour répondre à la dernière question, on voit que le fait que f soit symétrique est équivalent au fait que la décomposition considérée précédemment de E_i en somme directe est forcément orthogonale. Cela paraît faux. Comme contre-exemple on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui n'est évidemment pas symétrique mais dont le carré est l'identité.

- (e) On remarque que les hypothèses impliquent que chaque λ_i est strictement positif. L'hypothèse $\text{Sp}(f) \cap \text{Sp}(-f) = \emptyset$ et la question précédente impliquent que chaque E_i est lui-même un sous-espace-propre. En effet, E_i est soit le noyau $f - \alpha_i Id$, soit le noyau de $f + \alpha_i Id$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est alors la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f . L'endomorphisme f est donc nécessairement symétrique.