SUJET S12

Exercice principal S12

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : donner la définition d'une fonction convexe.
2. Soit X une variable aléatoire réelle centrée telle que $|X| \leqslant 1$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in [-1,1],\ e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$
   (b) En déduire les inégalités suivantes :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$
3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|X_n| \leqslant c_n$ (où $c_n > 0$) .
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t > 0,\ \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$
   (d) Montrer alors l'inégalité suivante :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$

Solution :

1. Programme ECS 1 (page 20)
2. (a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$. Puisque la fonction exp est convexe et puisque :
   $$\frac{1-x}{2} \in [0,1],\ \frac{1+x}{2} \in [0,1] \text{ et } \frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1,$$
   il vient que :
   $$\boxed{\frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t} \geqslant \exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t\right) = e^{tx}.}$$

(b) Puisque X est une variable aléatoire bornée, elle admet une espérance. D'après la question précédente, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \leqslant \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}.$$

Par croissance de l'espérance, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N},\ (2n)! \geqslant 2^n n!$ (peut se prouver par récurrence), donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).}$$

3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées telles que $|X_n| \leqslant c_n$ (où $c_n > 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\exp\left(tS_n\right) = \exp(tX_1)\ldots\exp(tX_n)$ et puisque les variables aléatoires $\exp(tX_1),\ \ldots,\exp(tX_n)$ sont indépendantes, $\exp\left(tS_n\right)$ admet une espérance (les X_k sont bornés donc admettent une espérance, donc les $\exp(tX_k)$ aussi) et :

$$\mathbb{E}\left(\exp(tS_n)\right) = \mathbb{E}\left(\exp(tX_1)\right)\ldots\mathbb{E}\left(\exp(tX_n)\right).$$

En appliquant la formule précédente à toutes les variables aléatoires $\frac{X_k}{c_k}$ (elles sont bien centrées et bornées par 1), on trouve :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{E}\left(\exp\left(tX_k\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left((tc_k)\frac{X_k}{c_k}\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2c_k^2}{2}\right).$$

On en déduit le résultat en multipliant ces n inégalités.

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que $[S_n > \varepsilon] \subset [\exp(tS_n) \geqslant \exp(t\varepsilon)]$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité de Markov ($\exp(tS_n) \geqslant 0$) assure que :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(\exp(tS_n) \geqslant \exp\left(t\varepsilon\right)\right) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).}$$

(c) L'étude de la fonction du second degré $f : t \mapsto at^2 - \varepsilon t$ où $a = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ montre qu'elle atteint un minimum en $t = \frac{\varepsilon}{2a}$ Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(f\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4a}\right) = \boxed{\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)}.$$

(d) Puisque les $-X_k$ vérifient les mêmes propriétés que les X_k, la propriété précédente est encore vraie en remplaçant la variable aléatoire S_n par $-S_n$. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \boxed{\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)}.$$

Exercice sans préparation S12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r avec $0 \leqslant r < n$.

Déterminer le plus petit entier p tel qu'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang p telle que $A+B$ soit inversible.

Solution :

Réponse $p = n - r$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.
Il existe donc une famille libre de r colonnes de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notons-les $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}$. avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}))$$

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r})$ en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe donc des colonnes $C'_{r+1}, C'_{r+2}, \ldots, C'_n$ telles que :

$$(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}, C'_{r+1}, C'_{r+2}, \ldots, C'_n) \quad \text{soit une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

Pour obtenir une matrice B de rang $n - r$ telle que $A + B$ soit de rang n, il suffit de prendre une matrice B ayant des colonnes nulles en positions $i_1, i_2, \ldots, i_r$, et sur $n - r$ autres colonnes quelconques placer des colonnes de type $C'_k - C_k$ où C_k est la colonne k de A, et C'_k est la colonne issue de la base précédente, les $n - r$ colonnes restantes étant nulles.

La matrice $M + M'$ aura alors parmi ses colonnes exactement n colonnes qui forment une famille libre donc $A + B$ est de rang n.

• Soit B est une matrice de rang strictement inférieur à $n - r$. Si l'on note f et g les applications linéaires induites par A et B dans la base canonique

$\mathrm{Im}\ (f+g) \subset \mathrm{Im}\ (f) + \mathrm{Im}\ (g)$ (Si $y \in \mathrm{Im}\ (f+g)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}\ (f) + \mathrm{Im}\ (g)$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}\ (f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\ (f) + \mathrm{Im}\ (g)) = \dim(\mathrm{Im}\ (f)) + \dim(\mathrm{Im}\ (g)) - \dim(\mathrm{Im}\ (f) \cap \mathrm{Im}\ (g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\ (f)) + \dim(\mathrm{Im}\ (g))$

On obtient donc que $\mathrm{rg}(A+B) \leqslant \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) < n$, donc $A + B$ n'est pas inversible.

• Conclusion $\boxed{\text{Le rang minimal de } B \text{ pour que } A + B \text{ soit inversible vaut } n - r.}$