SUJET S17

Exercice principal S17

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) \neq 0$ et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit $f : [\![1,n]\!] \to \mathbb{R}$ une fonction injective et soit a un réel. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_a$ des variables aléatoires de $\mathcal{E}$ telles que $\mathbb{E}(f(X)) = a$, qu'on suppose non vide.

Pour toute variable aléatoire X de $\mathcal{E}$, on note :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)\ln(\mathbb{P}(X=k)).$$

Soit U une variable aléatoire de $\mathcal{E}$ suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Question de cours : énoncer le théorème du transfert pour les variables aléatoires discrètes infinies.
2. Calculer $H(U)$.
3. Justifier que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{E}$, $H(X) \leqslant H(U)$.
5. Montrer que la fonction ci-dessous est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)\, e^{(f(k)-a)x} \end{array}$$

6. Pour tout $X \in \mathcal{E}_a$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on note $p_k = \mathbb{P}(X=k)$. En considérant H comme une fonction de $(p_1, \ldots, p_n)$, déterminer la hessienne de H.
7. En déduire que si H admet un extremum local sur $\mathcal{E}_a$, c'est en un unique point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

Solution :

1. Programme ECS 1 (page 23)
2. $H(U) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ln n \boxed{= \ln n}$.
3. Puisque ln est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'' < 0$ sur cet intervalle, $\boxed{\text{ln est concave sur cet intervalle.}}$
4. Soit X une variable aléatoire de $\mathcal{E}$. Par concavité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} H(U) - H(X) &= \ln n + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)\ln(\mathbb{P}(X=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)(\ln(\mathbb{P}(X=k)) + \ln(n)) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)\ln\left(\frac{1}{n\mathbb{P}(X=k)}\right) \\ &\geqslant -\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \times \frac{1}{n\mathbb{P}(X=k)}\right) = 0 \quad (-\ln \text{ est convexe.}) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour toute variable aléatoire } X \text{ de } \mathcal{E},\ H(U) \geqslant H(X)}$

5. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)^2 e^{(f(k)-a)x} \geqslant 0.$$

De plus :

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ f(k) = a,$$

ce qui est absurde puisque f est injective. On en déduit que $\varphi' > 0$ sur $\mathbb{R}$, et ainsi que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} \varphi, \lim\limits_{+\infty} \varphi[$.

Puisque $\mathcal{E}_a$ est non-vide, le théorème du transfert assure qu'il existe une variable aléatoire $X \in \mathcal{E}_a$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\mathbb{P}(X=k) = a, \quad \text{i.e.} \ \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)\mathbb{P}(X=k) = 0.$$

Puisque par hypothèse $\mathbb{P}(X=k) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, les $f(k)-a$ ne peuvent être tous de même signe, ni même tous nuls, par injectivité de f. On en déduit donc que :

$$\lim_{-\infty} \varphi = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} \varphi = +\infty$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ réalise une bijection strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

6. En écrivant $H : (p_1, \ldots, p_n) \mapsto -\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k)$, on trouve que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial H}{\partial p_k}(p_1, \ldots, p_n) = -\ln p_k - 1.$$

$$\boxed{\text{La hessienne de } H \text{ en un point } (p_1, \ldots, p_n) \text{ est donc la matrice diag}\left(-\frac{1}{p_1}, \ldots, -\frac{1}{p_n}\right).}$$

7. Si la fonction H admet un extremum local $p = (p_1, \ldots, p_n)$ sur l'ouvert $(]0,1[)^n$ sous les contraintes linéaires $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)p_k = a$, alors $\nabla H(p) \in \text{Vect}\left((1, \ldots, 1), (f(1), \ldots, f(n))\right)$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ -\ln(p_k) - 1 = \lambda + \mu f(k), \text{ i.e. } p_k = e^{-1-\lambda-\mu f(k)}.$$

Or :

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)p_k = e^{-1-\lambda} \sum_{k=1}^{n} (f(k)-a)e^{-\mu f(k)} = e^{-1-\lambda-a\mu}\varphi(-\mu).$$

On en déduit que $\varphi(-\mu) = 0$, i.e. $\mu = -\varphi^{-1}(0)$ par bijectivité de φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Puisque $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = e^{-1-\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-\mu f(k)} = 1$, on trouve que $\lambda = -1 + \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-\mu f(k)}\right)$. L'unicité de μ assure alors l'unicité de λ.

On en déduit donc que si H admet un extremum local sous les contraintes précédentes, $\boxed{\text{cet extremum est unique.}}$

Les valeurs propres de la hessienne de H étant toujours strictement négatives

$\boxed{\text{Si } H \text{ atteint un extremum local sous contrainte, c'est un maximum}}$

Exercice sans préparation S17

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :
- $f(0) = 0$
- $f'(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{f'(f(x))}$

Solution :

- Supposons qu'il existe une telle fonction.
Remarquons que avec la troisième hypothèse, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x)) = 1$$
D'où en primitivant :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$
Comme $f(0) = 0$, on a nécessairement $k = 0$, d'où :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x$$
Remarquons que f' ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$ pour que la troisième hypothèse ait un sens. Comme f' est continue (f est de classe $\mathscr{C}^1$), elle doit être de signe strict constant, donc strictement positive puisque $f'(0) = 1$.
Ainsi, f est nécessairement strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Enfin s'il existait x tel que $f(x) > x$, alors en appliquant f on aurait $f(f(x)) > f(x)$, donc $x > f(x)$, ce qui est absurde.
(De même, c'est absurde d'avoir $f(x) < x$ pour un réel x).
Ainsi nécessairement :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x.$$
- Réciproquement, la fonction identité $x \mapsto x$ vérifie bien les hypothèses proposées.
$\boxed{\text{La fonction identité est donc la seule fonction répondant au problème.}}$