CONCOURS APRÈS CLASSES PRÉPARATOIRES

Annales des épreuves orales de mathématiques

2018

une école de la CCI PARIS ILE-DE-FRANCE

Avant-propos

Ces annales corrigées de mathématiques des épreuves orales du concours ESCP Europe regroupent les exercices posés en 2018 ainsi que leurs corrigés dans les options scientifique et littéraire B/L.

Cet ouvrage devrait permettre aux futurs candidats une meilleure préparation à l'épreuve orale de mathématiques de ESCP Europe et fournir une aide efficace aux enseignants des classes préparatoires économiques et commerciales.

De plus, ces annales constituent également un outil pouvant faciliter la préparation aux épreuves écrites de mathématiques du concours quelle que soit leur option (scientifique, économique, littéraire B/L ou technologique) ; la plupart des thèmes abordés dans les sujets d'oral se retrouvent en effet, peu ou prou, dans les sujets de l'écrit.
Certains exercices publiés dans ces annales sont assez longs : ce sont des sujets d'étude et le jury n'en attend pas nécessairement une résolution complète.

Les énoncés et corrigés des exercices ont été regroupés en quatre rubriques : analyse, algèbre, probabilités et sujets de l'option littéraire B/L.

Depuis le concours 2002, chaque candidat doit :

– exposer en une vingtaine de minutes son sujet principal préparé en salle ;

– résoudre directement au tableau, pendant le temps restant, une courte question dont on trouvera, dans cet ouvrage, un échantillon.

On peut également trouver le contenu des annales sur le site internet de ESCP Europe,

Enfin ces annales n'auraient pu voir le jour sans la fidèle collaboration de tous les examinateurs de l'oral de mathématiques de ESCP Europe. Nous les en remercions.

Frank BOURNOIS, Directeur Général ESCP Europe.

Valérie BAJDA, Responsable des Admissions ESCP Europe.

Claude MENENDIAN, Responsable des épreuves orales de mathématiques du concours ESCP Europe.

1

ANALYSE

Exercice 1.01.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on définit la fonction f_p sur $[1, +\infty[$, par

$$f_p(t) = \frac{1}{t(t+1)\cdots(t+p)}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_p(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$I_p = \int_1^{+\infty} f_p(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, étudier la convergence de la suite $(f_p(t))_{p\geqslant 1}$.

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_p)_{p\geqslant 1}$.

4. Pour p fixé, *on admet* l'existence de nombres réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus [\![-p, 0]\!],\ f_p(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_k}{t+k}.$$

Montrer que pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, on a : $\alpha_j = \dfrac{(-1)^j}{j!(p-j)!}$.

Pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, on pourra multiplier la relation admise par $(t+j)$ et choisir une valeur particulière de t.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k$ et en déduire une expression de I_p, sans intégrale, sous la forme d'une somme.

Solution :

1. La fonction f_p est continue sur $[1,+\infty[$, donc la convergence ne pose problème qu'en $+\infty$. En $+\infty$, on a : $0 \leqslant f_p(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{p+1}}$. D'où la convergence par comparaison avec l'intégrale convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{p+1}}$ (puisque $p+1 \geqslant 2 > 1$).

2. Pour tout $t \geqslant 1$ et tout $i \in [\![0,p]\!]$, on a $t+i \geqslant i+1$, donc $0 \leqslant f_p(t) \leqslant \dfrac{1}{(p+1)!}$. Donc, par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim\limits_{p\to+\infty} f_p(t) = 0$.

3. De même que précédemment, en mettant à part les deux premiers facteurs, on a :

$$0 \leqslant f_p(t) \leqslant \frac{1}{t(t+1)\times 3\times\cdots\times(p+1)} = \frac{1}{t(t+1)} \times \frac{2}{(p+1)!} \leqslant \frac{1}{t^2} \times \frac{2}{(p+1)!}.$$

Par croissance de l'intégration, comme les deux intégrales convergent, on en déduit :

$$0 \leqslant I_p \leqslant \frac{2}{(p+1)!}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$.

4. Pour tout $j \in [\![0,p]\!]$, en multipliant la relation admise par $t+j$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus[\![-p,0]\!],\ \frac{1}{t(t+1)\cdots(t+j-1)(t+j+1)\cdots(t+p)} = \alpha_j + \sum_{k=0,k\neq j}^{p} \frac{\alpha_k(t+j)}{t+k}.$$

En faisant tendre t vers $-j$ (puisque les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t+k}$ sont continues sur $\mathbb{R}\setminus[\![-p,0]\!]$), on obtient :

$$\alpha_j = \frac{1}{(-j)(-j+1)\cdots(-1)(1)\cdots(p-j)} = \frac{(-1)^j}{j!(p-j)!}.$$

5. D'après la formule du binôme, on a :

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k = \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k = \frac{(1-1)^p}{p!} = 0$$

On peut également écrire $tf_p(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{t\alpha_k}{t+k}$, puis faire tendre t vers $+\infty$.

On ne peut pas écrire $I_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+k}$ car ces intégrales divergent toutes. Donc, plus prudemment, pour tout $X > 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^X f_p(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{p}\alpha_k\int_1^X\frac{\mathrm{d}t}{t+k}\\ &=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\ln\left(\frac{X+k}{1+k}\right)=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\left(\ln X+\ln\left(1+\frac{k}{X}\right)-\ln(1+k)\right)\\ &=\ln X\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\right)}_{=0}+\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\left(\ln\left(1+\frac{k}{X}\right)-\ln(1+k)\right)\\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}-\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\ln(1+k)=I_k.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 1.02.}}$

Soit un entier $n \geqslant 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne $||\ ||$ associée.
On dit qu'une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) si son spectre $\mathrm{Sp}(A)$ est contenu dans $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).

On admet qu'une matrice A est positive (resp. définie positive) si et seulement si le produit scalaire $\langle Ax, x\rangle$ est positif pour tout x de $\mathbb{R}^n$ (resp. strictement positif pour tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

On admet également que si A est une matrice positive, alors $\langle Ax, x\rangle = 0$ si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(A)$.

1. Soit $u = (u_1, u_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On définit la fonction f_u sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ f_u(x_1,x_2)=\|x-u\|=\sqrt{(x_1-u_1)^2+(x_2-u_2)^2}.$$

a) On note O_u l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{u\}$. Justifier que f_u est de classe C^2 sur O_u.
b) Déterminer le gradient de f_u en tout point $x = (x_1, x_2) \in O_u$.
c) Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2(f_u)(x)$ en tout point x de O_u.
Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ n'est pas inversible. Déterminer $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f_u)(x)\right)$.
d) Soit $x \in O_u$. Montrer que $\nabla^2(f_u)(x)$ est positive et que $h = (h_1, h_2)$ appartient au noyau de $\nabla^2(f_u)(x)$ si et seulement si h appartient à la droite d'équation $(x_2 - u_2)y_1 = (x_1 - u_1)y_2$.

2. Soit a, b, c trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$. On note O l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = f_a(x) + f_b(x) + f_c(x)$.
On admet que f admet un minimum global et on suppose dans toute la suite que ce minimum global n'est pas atteint en l'un des points a, b et c.

a) Montrer que si $m = (m_1, m_2)$ est un point où ce minimum global est atteint, alors on a :

$$\frac{1}{f_a(m)}(m-a)+\frac{1}{f_b(m)}(m-b)+\frac{1}{f_c(m)}(m-c)=0_{\mathbb{R}^2}.$$

b) Prouver que la hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est définie positive en tout point x de O.

c) Supposons que x et y sont deux points distincts où le minimum global est atteint.

Pour $t \in [0,1]$, on pose $g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x))$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme, montrer que g est constante. Vérifier que le segment de droite $[x,y] = \{(1-t)x + ty\,;\, t \in [0,1]\}$ est contenu dans O. Trouver alors une contradiction. Conclure.

Solution :

1. a) La fonction $t \longrightarrow \sqrt{t}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction $(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Par composition, on voit que la fonction f_u est de classe C^∞ sur O_u.

b) On trouve : $\nabla(f_u)(x) = \dfrac{1}{f_u(x)}(x_1 - u_1, x_2 - u_2)$.

c) On obtient :

$$\nabla^2(f_u)(x) = \frac{1}{f_u(x)^3}\begin{pmatrix} (x_2-u_2)^2 & -(x_1-u_1)(x_2-u_2) \\ -(x_1-u_1)(x_2-u_2) & (x_1-u_1)^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de f_u est clairement nul, par conséquent la matrice $\nabla^2(f_u)(x)$ n'est pas inversible.

On vient de voir que $0 \in \mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f_u)(x)\right)$; on trouve la deuxième valeur propre de cette matrice symétrique réelle en calculant sa trace. D'où :

$$\mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f_u)(x)\right) = \left(0, \frac{1}{f_u(x)}\right)$$

d) Soit $x \in O_u$. La matrice $\nabla^2(f_u)(x)$ est positive car son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Le système $\nabla^2(f_u)(x)(h) = 0$ est clairement équivalent ($x \in O_u$) à $(x_2 - u_2)h_1 - (x_1 - u_1)h_2 = 0$, c'est-à-dire que h appartient à la droite d'équation $(x_2 - u_2)y_1 = (x_1 - u_1)y_2$.

2. Montrons l'existence du minimum global de f. On voit que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Il existe donc un boule fermée B centrée en 0 en dehors de laquelle $f(x) > f(0)$. La fonction f étant positive, on en déduit alors que :

$$0 \leqslant \inf\left\{f(x); x \in \mathbb{R}^2\right\} = \inf\left\{f(x); x \in B\right\}$$

qui est atteint en un point de B puisque f est continue.

a) Un point $m = (m_1, m_2)$ où le minimum global est atteint appartient nécessairement à O d'après l'hypothèse. Alors on doit avoir : $0 = \nabla(f)(m) = \nabla(f_a)(m) + \nabla(f_b)(m) + \nabla(f_c)(m)$, ce qui donne bien la relation voulue.

b) Comme

$$\left\langle \nabla^2(f)(m)h, h\right\rangle = \left\langle \nabla^2(f_a)(m)h, h\right\rangle + \left\langle \nabla^2(f_b)(m)h, h\right\rangle + \left\langle \nabla^2(f_c)(m)h, h\right\rangle,$$

on voit avec la question 1. c) et la première propriété admise au début de l'énoncé que la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est positive en tout point x de O.

c) Maintenant, comme la somme ci-dessus est un somme de termes positifs, elle est nulle si et seulement si chacun des termes est nul. Ce qui revient à dire, d'après la deuxième propriété admise au début de l'énoncé et la question 1. d), que h appartient au noyau de $\nabla^2(f)(m)$ si et seulement si :

$$(m_2 - a_2)h_1 = (m_1 - a_1)h_2,\ (m_2 - b_2)h_1 = (m_1 - b_1)h_2 \ \text{ et }\ (m_2 - c_2)h_1 = (m_1 - c_1)h_2$$

Si on suppose $h \neq 0$, alors, a, b et c appartiennent à la droite d'équation $(m_2 - y_2)h_1 = (m_1 - y_1)h_2$, ce qui est contradictoire. La hessienne $\nabla^2(f)(x)$ est donc définie positive. Avec l'inégalité triangulaire vérifiée par la norme, on voit que l'on doit avoir

$$f(x) = f(y) \leqslant g(t) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y) = f(x)$$

La fonction g est donc constante sur $[0,1]$.

Comme le minimum global n'est pas atteint en l'un des points a, b et c, on a nécessairement $[x,y] \subseteq O$.

Le cours nous dit alors que $g''(t) = \big\langle \nabla^2(f)(x + t(y-x))(y-x), y-x \big\rangle > 0$ car $x \neq y$; on aboutit donc à une contradiction. Il y a donc un unique point où le minimum global est atteint.

Exercice 1.03.

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\,dt$$

2. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge absolument.

a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

3.a) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, établir l'égalité :

$$\int_1^n \frac{\cos(\sqrt{x})}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\cos(u)}{u}\,du$$

b) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

4. Montrer l'existence d'un réel ℓ qui vérifie la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$.

Solution :

1. Puisque f est de classe C^1, sur $[1,+\infty[$, elle admet une primitive F qui est de classe C^2. On peut ainsi appliquer à F la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = F(n+1)-F(n) = F'(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)F''(t)\,dt = f(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt$$

2. a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)$. En utilisant la question précédente, on a

$$|v_n| \leqslant \int_n^{n+1}|n+1-t||f'(t)|\,dt \leqslant \int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt$$

Ainsi, soit $N\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}|v_k| \leqslant \int_1^{N+1}|f'(t)|\,dt \leqslant \int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$. Par la convergence absolue de l'intégrale, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument.

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{k=1}^{n} f(k)$. De plus, puisque $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} v_k$ converge, on en déduit l'équivalence entre la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ et celle de la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x}$. La fonction f est bien C^1 sur $[1,+\infty[$, de dérivée sur $[1,+\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}) - \frac{1}{x^2}\cos(\sqrt{x})$$

Or $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $\dfrac{1}{x^2}\cos(\sqrt{x}) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

On en déduit, en utilisant les règles de comparaison de Riemann, que $\displaystyle\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ converge absolument.

En appliquant la question 2, on en déduit qu'il suffit de montrer la convergence de la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ pour conclure. Or à l'aide d'un changement de variable, $u(x)=\sqrt{x}$, fonction de classe C^1, bijective, strictement croissante, de $[1,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$, il vient $\displaystyle\int_1^n \frac{\cos(\sqrt{x})}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{n}}\frac{\cos(u)}{u}\,du$.

Effectuons une intégration par parties aux fonctions $u\mapsto \sin(u)$ et $u\mapsto \dfrac{1}{u}$, toutes deux C^1 sur $[1,+\infty[$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}}\frac{\cos(u)}{u}\,du = \left[\frac{\sin(u)}{u}\right]_1^{\sqrt{n}} + \int_1^{\sqrt{n}}\frac{\sin(u)}{u^2}\,du$.

Or $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin(u)}{u^2}\,du$ converge, de même que le crochet, donc la suite $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ converge. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ converge.

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, vérifie bien les hypothèses. En effet, elle est C^1 sur $[1,+\infty[$, de dérivée, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Comme précédemment, puisque $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, on en déduit par théorème de comparaison et par les intégrales de Riemann, que $\displaystyle\int_1^n |f'(t)|\,dt$ converge. Ainsi, en revenant à la démonstration du 2.b) et aux notations de la question 2.a), on a montré que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} v_k$ converge, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{n} v_k \underset{+\infty}{=} \ell + o(1)$. Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \int_1^{n+1} f(t)dt + \ell + o(1) = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$.

Exercice 1.04.

Soit A et λ deux réels strictement positifs. Soit $I = [0, A]$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n(t))_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, e^{n\lambda t}$$

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(t)$ est convergente et calculer sa somme $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$.

2. On pose $R_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)$. Soit f une fonction continue sur I à valeurs réelles.

a) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $t \in I$, on a :

$$|f(t)R_n(t)| \leqslant \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!}$$

b) En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)dt = \int_0^A \left(1 - \exp(-e^{\lambda t})\right) f(t)dt$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \left(1 - \exp(-e^{\lambda t})\right)$.

4. En découpant l'intervalle $[0, A]$ en deux intervalles $[0, \delta]$ et $[\delta, A]$, avec $\delta > 0$ judicieusement choisi, montrer

que l'on a :

$$\int_0^A f(t)dt = \lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^A e^{k\lambda t} f(t)dt$$

Solution :

1. On reconnaît une série exponentielle. Ainsi :

$$S(t) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = 1 - \exp(-e^{\lambda t})$$

2. a) La fonction f est continue donc bornée par M sur le segment $[0, A]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(t)R_n(t)| &\leqslant M \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{k\lambda t}}{k!} \\ &\leqslant \frac{M}{n!} e^{n\lambda A} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{e^{q\lambda A}}{q!} \\ &= C_\lambda \times \frac{Me^{n\lambda A}}{n!} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ indépendamment de t.
b) On écrit : (S_{n-1} représente la somme partielle d'ordre $n-1$ de la série S)

$$\int_0^A f(t)S(t)dt = \int_0^A f(t)S_{n-1}(t)dt + \int_0^A f(t)R_n(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^A u_k(t)f(t)dt + \int_0^A f(t)R_n(t)dt$$

et

$$\left| \int_0^A f(t)R_n(t)dt \right| \leqslant A \times C_\lambda \times \frac{Me^{n\lambda A}}{n!}$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$.

3. On a

$$\lim_{\lambda\to+\infty} 1 - \exp(-e^{\lambda t}) = \begin{cases} 1 - e^{-1} & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons évaluer la différence

$$\int_0^A f(t)dt - \int_0^A (1 - \exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt$$

Pour $\delta > 0$:

$$\left| \int_0^\delta (\exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt \right| \leqslant M(e^{-1})\delta < M\delta$$

On choisit alors $0 < \delta < \varepsilon/(2M)$.

De plus
$$\left|\int_\delta^A (\exp(-e^{\lambda t}))f(t)dt\right| \leqslant (\exp(-e^{\lambda\delta}))AM$$
Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Il existe Λ tel que si $\lambda > \Lambda$, cette quantité est inférieure à $\varepsilon/2$.

Il reste à regrouper les deux sommes pour conclure.

Exercice 1.05.

On pose pour tout n entier naturel : $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1.a) Montrer que la suite (a_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.

b) À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, calculer a_0.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

b) Soit (w_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$.
Montrer que la suite (w_n) est constante et calculer cette constante.

c) Montrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_{n+1}$.

d) Établir l'existence d'un réel $K > 0$ que l'on calculera, tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^{3/2}}$.

e) En déduire la nature de la série de terme général $b_n = (-1)^n a_n$.

3.a) Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n b_k = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$.

b) En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$.
Quelle est la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$?

Solution :

1. On remarque que ces intégrales ne sont pas généralisées, mais intégrales de fonctions continues sur un segment.

La suite (a_n) est décroissante car pour $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^{n+1} \leqslant t^n$ (puis on utilise la positivité de l'intégrale) et $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (a_n) converge.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Effectuons une intégration par parties dans a_{n+2}. Les fonctions en jeu étant de classe C^1 sur $[0,1]$, il vient :
$$a_{n+2} = \left[-t^{n+1}\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{(n+1)}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt \Rightarrow a_{n+2} = \frac{n+1}{3}(a_n - a_{n+2})$$

soit : $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

b) Calculons $w_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}a_n = (n+2)(n+3)a_{n+1}(n+4)a_{n+2} = w_{n+2}$, d'après la question précédente et la définition de la suite w. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_{n+2} = w_1 = 6a_1 a_0$.

Or :

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2u)+1)\, du = \frac{\pi}{4}, \text{en posant } t = \sin u$$

Et

$$a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\, dt = -\frac{1}{3}\left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{\pi}{2}$.

c) D'après les deux premières questions, on a pour tout entier naturel n :

$$0 < a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n < a_{n+1} < a_n$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

d) En combinant les résultats des deux dernières questions, on obtient $n^3 a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

Rappelons aussi que $a_n > 0$. Ainsi : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\; n^{-3/2}$.

e) Par le critère des séries de Riemann, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont donc absolument convergentes.

3. a) Il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\sqrt{1-t^2}dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt + (-1)^n \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

La fonction $t \to \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}dt$ est continue sur $[0,1]$ donc majorée par une constante M. Ainsi :

$$0 \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt \leqslant \frac{M}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

b) Effectuons le changement de variable C^1 (et bijectif) sur $[0,x]$ pour $0 < x < 1$, $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, $u^2 = \dfrac{1-t}{1+t}$, $t(u^2+1) = 1-u^2$ donc $t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} = -1 + \dfrac{2}{1+u^2}$ et $dt = \dfrac{-4u}{(1+u^2)^2}du$. Ainsi :

$$B_x = \int_0^x \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \int_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{-4u^2}{(1+u^2)^2}du$$

Effectuons une intégration par parties. On a :

$$B_x = \left[2u\frac{1}{1+u^2}\right]_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} - 2\left[\arctan(u)\right]_1^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -1+\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exercice 1.06.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Soit D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

1. Justifier que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. a) Justifier que f est de classe C^2 sur D et déterminer son gradient en tout point de D.
b) Expliciter le développement limité à l'ordre 1 de f au point $a=(1,1)$.

3. Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur D, s'il y en a.

4. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{C}=\big\{(x,y)\in D\,,x^2+y^2=2\big\}$.

5. La fonction f admet elle des extrema sur l'ensemble $\mathcal{B}=\big\{(x,y)\in D\,,x^2+y^2\leqslant 2\big\}$?

6. Vérifier à l'aide du développement limité de f à l'ordre 1 que le point $a=(1,1)$ n'est pas un maximum local de f sur D.

Solution :

1. On a $0\leqslant |f(x,y)|\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}\right)\to 0$ lorsque $||(x,y)||\to 0$. Donc f est bien continue en $(0,0)$.

2.a) La fonction $f\in C^2(D,\mathbb{R})$ comme fraction rationnelle, et

$$\forall (x,y)\in D,\quad \nabla(f)(x,y)=\left(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\,,\,\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

b) Le DL_1 en a est :

$$f\big(1+u,1+v\big)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,u+\frac{1}{2}\,v+o\big(||(u,v)||\big)$$

3. Les points critiques de f sont obtenus pour $(0,y)$ ou $(x,0)$; comme f est positive sur D, ce sont des minima globaux.

D'autre part, $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2} \to \infty$ lorsque $x \to \infty$; donc f n'est pas majorée.

4. On a :

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \Rightarrow \nabla(g)(x,y) = (2x, 2y) \neq 0 \text{ sur } D$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \right) = \lambda\,(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,(y^4 - 4\lambda) = 0 \\ y\,(x^4 - 4\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

D'où les points critiques :

- $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ et $\lambda = 0$, d'où $A : (0, -\sqrt{2})$ et $A' : (0, \sqrt{2})$;
- $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ et $\lambda = 0$, d'où $B : (-\sqrt{2}, 0)$ et $B' : (\sqrt{2}, 0)$;
- $xy \neq 0 \Rightarrow x^4 = 4\lambda = y^4 \Rightarrow x = \pm y$ puis $x^2 = 1$ et $\lambda = 1/4$ d'où $F : (1,1)$, $F' : (-1,-1)$ et $G : (1,-1)$, $G' : (-1,1)$.

La fonction f est continue sur $\mathcal{C}$ fermé borné, donc admet des extrema globaux atteints sur $\mathcal{C}$, qui sont :

$$f(A) = f(A') = f(B) = f(B') = 0 \quad \text{et} \quad f(F) = f(F') = f(G) = f(G') = \frac{1}{2}$$

5. Sur l'ouvert $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{C} = \Big\{(x,y) \in D,\ x^2 + y^2 < 2\Big\}$, f n'a pas de maximum local mais des minima globaux (nuls) aux points tels que $x = 0$ ou $y = 0$.

Donc f a des maxima globaux sur $\mathcal{B}$ en F, F', G, G' de valeur $\dfrac{1}{2}$ et des minima globaux nuls aux points tels que $x = 0$ ou $y = 0$.

6. On a :

$$f\big(1+u, 1+0\big) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,u + o\big(||(u,v)||$$

qui change de signe comme u au voisinage de 0.

Exercice 1.07.

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes pour lesquelles il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall\, k \geqslant N, u_k \neq \lim u_n$$

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E , de limite égale à ℓ, on associe la suite $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par :

$$u_n^* = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

On note E^* l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E pour lesquels la suite (u_n^*) est convergente.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E^* et ℓ^* la limite de $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. On admet que $\ell^* \in [0,1]$.

- si $\ell^* = 1$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est lente ;
- si $\ell^* \in]0,1[$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rapport ℓ^* ;
- si $\ell^* = 0$, on dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

1. a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n!}\right) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

i) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $v_n = e - \dfrac{e}{2^{n+1}} + o\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$.

ii) Montrer que la suite $(v_n) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

2. Soit $\alpha > 1$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et a pour somme le réel ℓ.

On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n) \in E^*$ et donner sa vitesse de convergence.

3. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et α un réel strictement positif.
On dit que X admet un *moment exponentiel d'ordre* α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer les réels $\alpha > 0$ pour lesquels X admet un moment exponentiel d'ordre α et calculer ce moment
dans ce cas.

b) On suppose que $X(\Omega) = \{(x_p)_{p\in\mathbb{N}}\}$. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X. Pour tout entier $n > 0$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
Soit $\alpha > 0$. On suppose que X admet un moment exponentiel d'ordre α.

i) Montrer que pour tout réel u, on a : $e^u \geqslant 1 + u \geqslant u$.

ii) Montrer que X admet une espérance finie notée m et une variance notée σ^2.

iii) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$ est majorée par une suite à convergence lente.

Solution :

1. a) La suite (u_n) a pour limite 0 et $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{1}{n+1} \to 0$. Donc $\ell^* = 0$. On a convergence rapide.

b) i) On écrit $v_n = \exp\left(2^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)\right)$. Un DL2 du logarithme donne le résultat.

ii) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e$ et pour n assez grand $v_n \neq e$. De plus :

$$\left|\frac{v_{n+1}-e}{v_n-e}\right| = \left|\frac{\dfrac{-e}{2^{n+2}} + o(\dfrac{1}{2^{n+1}})}{\dfrac{-e}{2^{n+1}} + o(\dfrac{1}{2^n})}\right| = \left|\frac{1}{2} \times \frac{1+o(1)}{1+o(1)}\right| \to \frac{1}{2}$$

Donc (v_n) a une vitesse de convergence géométrique de rapport $\dfrac{1}{2}$.

2. a) Soit $\alpha > 1$. $\ell - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

soit $\ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_{n-1}$, et $\dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) Donc par le théorème d'encadrement des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$. D'après ce qui précède :

$$(\alpha-1)n^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{\ell - S_n} \leqslant (\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}$$

et

$$\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n+2)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_{n+1} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient : $\dfrac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n} \leqslant 1$.

Donc $\ell^* = 1$ et la convergence est lente.

3. a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Et $e^{\alpha|X|}$ admet une espérance si et seulement si $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ converge absolument.
Ce qui est le cas pour tout α réel et on trouve $E(e^{\alpha|X|}) = e^{\lambda(e^\alpha - 1)}$.
b)i) La fonction exponentielle est convexe.
ii) On a $\alpha \mid x_k \mid \leqslant e^{\alpha|x_k|} \Longrightarrow 0 \leqslant\mid x_k \mid P(X = x_k) \leqslant e^{\alpha|x_k|} P(X = x_k)$. Et $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} e^{\alpha|x_k|} P(X = x_k)$ converge.
iii) On sait que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2 e^{-\alpha|x|} = 0$. Il existe donc $a > 0$ tel que $\forall x, \mid x \mid \geqslant a \Rightarrow x^2 \leqslant e^{\alpha|x|}$.

D'autre part $|x| \leqslant a \Rightarrow x^2 \leqslant a^2$. Donc pour tout x réel, $x^2 \leqslant a^2 + e^{\alpha|x|}$. Ainsi,
$$0 \leqslant x_p^2 P(X = x_p) \leqslant (a^2 + e^{\alpha|x_p|})P(X = x_p) \leqslant a^2 P(X = x_p) + e^{\alpha|x_p|}P(X = x_p)$$
Or $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} a^2 P(X = x_p) = a^2$ et $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} e^{\alpha|x_p|}P(X = x_p) = E(e^{\alpha X}) \Longrightarrow$ la série $\sum\limits_p x_p^2 P(X = x_p)$ converge.
Les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont de même loi, possèdent toutes un moment d'ordre 2 et sont mutuellement indépendantes ; donc $\dfrac{S_n}{n}$ admet une espérance et une variance. De plus
$$E(\frac{S_n}{n}) = m \text{ et } V(\frac{S_n}{n}) = \frac{\sigma^2}{n}$$
D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff, $\forall \varepsilon > 0, P(|\ \dfrac{S_n}{n} - m\ | \geqslant \epsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. En posant $u_n = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, la suite (u_n) convient.

Exercice 1.08.

1. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, comparer $\ln(1 + x)$ et x.

2. Soit $a_0 > 0$. Soit (a_n) la suite de premier terme a_0 et définie par récurrence par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n).$$
a) Montrer que la suite (a_n) est bien définie et à termes positifs.
b) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.
c) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.

3. *On admet* que si (x_n) est une suite réelle qui converge vers ℓ, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ converge aussi vers ℓ.
Déterminer un équivalent de a_n de la forme $\dfrac{\lambda}{n}$, quand n tend vers $+\infty$, où λ est un réel à préciser.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction g définie par $g(t) = -\ln(1 - t)$ entre les points 0 et $x > 0$. En déduire que l'on a :
$$\forall x \in]0, 1[\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = g(x).$$

5. Pour tout $x \in]0, 1[$, établir la convergence de la série $\sum a_n x^n$.

6. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall x \in]0, 1[,\ \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n - \frac{2}{n}\right)x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| - \frac{\varepsilon}{2}\ln(1 - x).$$

En déduire un équivalent de $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Solution :

1. Par concavité stricte de $x\mapsto \ln(1+x)$, on a : $\forall x>-1,\ \ln(1+x)\leqslant x$, avec égalité si et seulement si $x=0$.

2. a) On montre par récurrence évidente sur $n\in\mathbb{N}$ la relation « a_n est défini et strictement positif ».

b) D'après la première question, $a_{n+1}=\ln(1+a_n)\leqslant a_n$. Ainsi la suite (a_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite ℓ telle que $\ln(1+\ell)=\ell$ (par continuité), soit $\ell=0$ (d'après la question 1).

c) Comme (a_n) tend vers 0, on a $\ln(1+a_n)\underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ et $a_n-\ln(1+a_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{a_n^2}{2}$ (avec un DL d'ordre 2).

Donc : $u_n=\dfrac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n\ln(1+a_n)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\frac{a_n^2}{2}}{a_n^2}=\dfrac{1}{2}$. Ainsi $\lim(u_n)=\dfrac{1}{2}$.

3. On a : $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_0}=(n+1)\underbrace{\left(\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k\right)}_{\longrightarrow\frac{1}{2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n}{2}$, d'où $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n}$.

4. Comme $g(0)=0$ et $g^{(k)}(t)=\dfrac{(k-1)!}{(1-t)^k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ (par récurrence évidente), la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\frac{n!}{(1-t)^{n+1}}\ \mathrm{d}t.$$

L'étude de la fonction $t\mapsto\dfrac{x-t}{1-t}$ montre qu'elle est décroissante sur $[0,x]\subset[0,1[$ donc majorée par sa valeur x en $t=0$, d'où la preuve du résultat pour tout $x\in[0,1[$. En effet

$$\int_0^x\left|\frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\right|\ \mathrm{d}t\leqslant x^n\int_0^x\frac{dt}{1-t}=x^n|\ln(1-x)|$$

5. Par théorème de comparaison pour les séries, on a :

$$0\leqslant a_nx^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n}x^n\ \text{ et la série }\ \sum\frac{2}{n}x^n\ \text{ converge si }\ x\in]0,1[.$$

6. Comme $a_n=\dfrac{2}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n>N,\ \left|a_n-\dfrac{2}{n}\right|\leqslant\dfrac{\epsilon}{2n}$.

Par théorème de comparaison avec la série de la question 5, on déduit la convergence de la série $\sum \left|a_n - \frac{2}{n}\right| x^n$. On peut donc écrire l'inégalité triangulaire suivante :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n - \frac{2}{n}\right)x^n\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| x^n = \sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| x^n \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\epsilon}{2n}x^n \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| - \frac{\epsilon}{2}\ln(1-x).\end{aligned}$$

Par suite, $|f(x) - 2g(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}g(x)$. Soit : $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 2\right| \leqslant \frac{1}{g(x)}\sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| + \frac{\epsilon}{2}$.

Comme $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)} = 0$ et $\sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right|$ constant, on a : $\exists N', \forall n > N',\ \frac{1}{g(x)}\sum_{n=1}^{N}\left|a_n - \frac{2}{n}\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

Exercice 1.09.

Soit f une fonction continue et positive sur $I = [0,1]$ telle que $\gamma = \int_0^1 f(t)dt < 1$.

On considère une fonction u_0 continue sur I qui vérifie :

$$\forall\, x \in I,\ u_0(x) \leqslant 1 + \int_0^x u_0(t)f(t)dt$$

On définit par récurrence la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant pour tout n entier naturel :

$$\forall\, x \in I,\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t)f(t)dt$$

1. Soit $x \in I$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante.

2. a) Justifier pour tout $n \geqslant 0$, que la fonction $x \longmapsto u_n(x)$ est continue sur I.
En déduire, que pour tout entier naturel n, le nombre réel $M_n = \max\{|u_n(x)|; x \in I\}$ est bien défini.
b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $M_{n+1} \leqslant 1 + \gamma M_n$.
Pour $n \geqslant 1$, majorer M_n en fonction de M_0 et de γ. En déduire que la suite (M_n) est bornée.
c) Justifier que pour tout $x \in I$, la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est convergente. On note $u(x)$ sa limite.

3. a) Soit x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Montrer qu'il existe une constante M telle que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ |u_n(y) - u_n(x)| \leqslant M \int_x^y f(t)dt$$

En déduire que la fonction u est continue sur I.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer que la fonction $x \to v_n(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est dérivable et croissante sur I.

c) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \gamma\,(u_n(x) - u_{n-1}(x))$$

En déduire pour tout $x \in I$ et tout entier $p \geqslant 1$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_{n+p}(x) - u_n(x) \leqslant \gamma^n (1-\gamma)^{-1}\,(u_1(x) - u_0(x))$$

d) Soit $x \in I$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x u_n(t)f(t)dt$ converge vers $\displaystyle\int_0^x u(t)f(t)dt$.

En déduire que la fonction u est de classe C^1 sur I.

Solution :

1. Soit $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse de récurrence : « $u_n(s) \leqslant u_{n+1}(s)$ pour tout $s \in [0,1]$ ». On voit que $\mathcal{P}_0$ est vraie par hypothèse. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x [u_{n+1}(t) - u_n(t)]\, f(t)dt \geqslant 0$$

puisque l'intégrande est positive.

Donc, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante pour tout $x \in [0,1]$.

2. a) La fonction u_0 est continue sur I et par une récurrence immédiate, on voit que la fonction u_{n+1} est continue comme primitive de la fonction continue u_n. Le réel M_n est bien défini puisque la fonction u_n est continue sur le segment I, elle donc bornée et atteint ses bornes.

b) On voit que

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant 1 + \int_0^x |u_n(t)|f(t)dt \leqslant 1 + \int_0^1 |u_n(t)|f(t)dt \leqslant 1 + M_n \int_0^1 f(t)dt = 1 + \gamma M_n$$

D'où $M_n \leqslant \big(1 + \gamma + \cdots + \gamma^{n-1}\big) + \gamma^n M_0 \leqslant \dfrac{1}{1-\gamma} + M_0 = C$. La suite (M_n) est donc bornée.

c) La suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante d'après a) et bornée d'après b), elle est donc convergente.

3. a) Il vient :

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leqslant \int_x^y |u_{n-1}(t)|f(t)dt \leqslant C \int_x^y f(t)dt.$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient

$$|u(y) - u(x)| \leqslant C \int_x^y f(t)dt.$$

Il reste à faire tendre y vers x puis à échanger les rôles de y et x pour obtenir que la fonction u est donc continue sur I.

b) Pour $n \geqslant 1$, on a : $v_n(x) = \displaystyle\int_0^x [u_n(t) - u_{n-1}(t)]\, f(t)dt$.

L'intégrande est une fonction continue. Par suite, v_n est dérivable et, d'après la question 1 :

$$v_n'(x) = [u_n(x) - u_{n-1}(x)]\, f(x) \geqslant 0$$

La fonction v_n est donc croissante sur I.

c) Soit $n \geqslant 1$. L'inégalité de gauche est évidente d'après 1. De plus, avec la croissance de la fonction v_n, il vient
pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) - u_n(x) &= \int_0^x [u_n(t) - u_{n-1}(t)]\, f(t)dt \leqslant [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \int_0^x f(t)dt \\ &= \gamma\, (u_n(x) - u_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

En utilisant ce qui précède et en écrivant $u_{n+p}(x) - u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} [u_{n+k+1}(x) - u_{n+k}(x)]$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant u_{n+p}(x) - u_n(x) \leqslant \left(1 + \cdots + \gamma^{p-1}\right) (u_{n+1}(x) - u_n(x)) \\ &\leqslant (1-\gamma)^{-1}\gamma^n\, (u_1(x) - u_0(x))\,. \end{aligned}$$

d) En faisant tendre p vers l'infini, il vient :

$$0 \leqslant u(x) - u_n(x) \leqslant (1-\gamma)^{-1}\gamma^n\, (u_1(x) - u_0(x))$$

D'où $\left| \displaystyle\int_0^x u(t)f(t)dt - \int_0^x u_n(t)f(t)dt \right| \leqslant (1-\gamma)^{-1}\gamma^{n+1}(M_0+M_1) \to 0($ quand n tend vers $+\infty)$.

On peut alors passer à la limite dans l'égalité définissant u_{n+1} et on obtient

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)f(t)dt$$

On en déduit facilement que u est de classe C^1 sur I. En dérivant l'égalité précédente, il vient $u'(x) = f(x)u(x)$.

En posant $N'' = \max(N, N')$, on a prouvé que : $\forall \epsilon > 0, \exists N'',\ \forall n > N'', \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 2\right| \leqslant \epsilon$, soit $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} 2g(x)$.

Exercice 1.10.

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose que $u_0 > 0$.

On pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien définie.

2.a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. On pose $\sigma = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$. Étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

4. On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Solution :

1. On montre par récurrence, que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

2.a) À l'aide des croissances comparées, on remarque que $\dfrac{\ln(k)}{2^k} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. On conclut en utilisant les théorèmes de comparaisons des séries à termes positifs, et la convergence de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$.

b) La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence, pour tout $k \geqslant 1$, $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$. On en déduit par télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = v_n - v_0 = v_n - \ln(u_0)$$

Ainsi, $v_n = \ln(u_0) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Comme somme de suites qui convergent, on en déduit à l'aide des précédentes notations, que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge, vers $\ell = \ln(u_0) + \sigma$.

3. • Supposons que $u_0 > e^{-\sigma}$. On a alors $\ell > 0$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} 2^n v_n = +\infty$. Ainsi, par composition des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Supposons que $u_0 < e^{-\sigma}$. On a alors $\ell < 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n v_n = -\infty$. Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. a) On reprend l'expression donnée, en 3., en remplaçant $\ln(u_0) = -\sigma$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = \ln(u_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = -\sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

b) Puisque $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} 2^{n-k} \ln(k) > 0$, on en déduit de la question précédente que $2^n v_n > \dfrac{\ln(n+1)}{2}$, ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n v_n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1.11.

1. Montrer que pour tout x réel, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$ convergent.

On pose alors pour tout x réel : $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$.

2. a) Montrer que les deux fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tous réels u et h, on a :

$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leqslant \frac{h^2}{2}$$

c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout x réel, $S'(x)$.

3. Déterminer pour tout x réel, une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.

4. a) Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $g : x \to e^{x^2/4}f(x)$.

En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.

b) On suppose qu'on peut écrire pour tout x réel, $S(x) = A(x)e^{-x^2/4}$ avec A de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Établir la relation : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ S(x) = \dfrac{e^{-x^2/4}}{2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2/4}dt$.

5. Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.

Solution :

1. Pour tout x réel, $t \to \sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $|\sin(xt)e^{-t^2}| \leqslant e^{-t^2}$ dont l'intégrale converge.

La démonstration est identique pour $t \to \cos(xt)e^{-t^2}$.

2. a) L'inégalité des accroissements finis donne, pour tout réels x et x' :

$$|\sin(x) - \sin(x')| \leqslant |x - x'|$$

Ainsi :

$$|S(x) - S(x')| \leqslant \int_0^{+\infty} |\sin(xt) - \sin(x't)|e^{-t^2}dt \leqslant |x - x'| \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt \leqslant \frac{1}{2}|x - x'|$$

La fonction f est lipchitzienne donc continue sur $\mathbb{R}$.

b) On utilise une inégalité de Taylor. On a :

$$|\sin(u + h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leqslant \frac{h^2}{2} \sup_{t\in[u,u+h]} |\sin(t)| \leqslant \frac{h^2}{2}$$

c) On étudie la limite du candidat proposé à être la dérivée de $S(x)$ avec u remplacé par xt et h par ht. Il vient :

$$\left| \int_0^{+\infty} (\sin((x + h)t) - \sin(xt) - ht\cos(xt))e^{-t^2}dt \right| \leqslant \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}dt = \frac{Ch^2}{2}$$

Ainsi :

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x + h) - S(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \cos(xt)te^{-t^2}dt$$

3. On utilise une intégration par parties, les fonctions en jeu étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A \cos(xt)te^{-t^2}dt = \left[-\cos(xt)\frac{e^{-t2}}{2} \right]_0^A - \frac{x}{2} \int_0^A \sin(xt)e^{-t^2}dt$$

En prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$, il vient :

$$S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$$

4. a) La dérivée se calcule aisément. On obtient $g'(x) = e^{x^2/4}(f'(x) + \frac{x}{2}f(x))$.

Si la fonction f vérifie $2f'(x) + xf(x) = 0$, alors $g'(x) = 0$ et $g(x) = C$. Donc, on a :

$$f(x) = Ce^{-x^2/4}$$

On peut écrire $S(x) = A(x)e^{-x^2/4}$ avec S vérifiant l'équation $S'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$. En dérivant, il vient :

$$A'(x)e^{\frac{-x^2}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{t^2/4}dt + C$$

Comme $S(0) = 0$, on obtient :

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x^2}{4}} \int_0^x e^{t^2/4}dt$$

5. La fonction S est impaire : on étudie la limite en $+\infty$.

On fait deux intégrations par parties sur le segment $[1, x]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2/4}dt$ est une constante :

$$\int_1^x e^{t^2/4}dt = \int_1^x \frac{t/2e^{t^2/4}}{t/2}dt = \frac{2e^{x^2/4}}{x} - C + 2\int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^2}dt$$
$$= \frac{2e^{x^2/4}}{x} - C + 4\int_1^x \frac{t/2e^{t^2/4}}{t^3}dt = \frac{2e^{x^2/4}}{x} + 4\frac{e^{x^2/4}}{x^3} + K - 12\int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^4}dt$$

Donc

$$S(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3} + Me^{-x^2/4} + 12e^{-x^2/4}\int_1^x \frac{e^{t^2/4}}{t^4}dt = \frac{2}{x} + o\left(\frac{2}{x}\right)$$

Exercice 1.12.

1. Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$. Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On suppose de plus que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) \geqslant 0$.

a) Justifier l'existence de deux réels α et β appartenant à l'intervalle $[a, b]$ tels que $m = f(\alpha)$, $M = f(\beta)$ et pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

b) En déduire qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

2. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire et de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

a) On suppose que f' est strictement monotone. Montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ telle que pour tout réel x, on a $f(x) = xf'\Big(x\theta(x)\Big)$.

b) Soit $x > 0$. Prouver qu'il existe un réel $d_x \in [0, x]$ tel que $f(x) = xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(d_x)$.

c) Soit $x > 0$. Prouver qu'il existe un réel $h_x \in]0, x[$ tel que $f(x) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x)$.

d) On suppose que $f''(0) \neq 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \theta(x)$

3. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Arctan}(x)$.

a) Expliciter la fonction θ sur $\mathbb{R}^*$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \theta(x)$. Obtient-on une contradiction du résultat de la question 2 ?

Solution :

1. a) Comme la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

b) Par positivité de la fonction g, croissance de l'intégrale et en posant $A = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ et $B = \displaystyle\int_a^b g(x)dx$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \Rightarrow \quad mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \quad \Rightarrow \quad mB \leqslant A \leqslant MB\,.$$

Si $B = 0$, l'inégalité précédente implique $A = 0$ et tout choix de c convient.

Sinon, en divisant par $B > 0$, on obtient : $f(\alpha) = m \leqslant \dfrac{A}{B} \leqslant M = f(\beta)$.
Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \dfrac{A}{B}$.

2. a) Comme f est impaire, $f(0) = 0$. Considérons $x \geqslant 0$. On applique la question précédente avec les fonctions f' et $t \to 1$ continues sur $[0, x]$. Il existe alors un réel $c_x \in [0, x]$ tel que :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x 1 \times f'(t)dt = f'(c_x)\int_0^x 1dt = f'(c_x)x.$$

Comme $c_x \in [0, x]$, il existe $\theta(x) \in [0, 1]$ tel que $c_x = x\theta(x)$. On a alors $f(x) = xf'\Big(x\theta(x)\Big)$.

b) Soit $x > 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = \Big[(x-t)f'(t)\Big]_0^x + \int_0^x f'(t)dt = -xf'(0) + f(x)$$

Ainsi, $f(x) = xf'(0) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)dt$.
Par la question 1 appliquée aux fonctions f'' et $t \to x - t$ sur $[0, x]$, il existe un réel $d_x \in [0, x]$ tel que :

$$\int_0^x (x-t)f''(t)dt = f''(d_x)\int_0^x (x-t)dt = \frac{x^2}{2}f''(d_x).$$

Ainsi, il existe un réel $d_x \in [0, x]$ tel que $f(x) = xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(d_x)$.

c) On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f' entre les points $x\theta(x)$ et 0. Il existe alors $h_x \in]0, x\theta(x)[\subset]0, x[$ tel que :
$f'(x\theta(x)) = f'(0) + x\theta(x)f''(h_x)$, d'où $f(x) = xf'(x\theta(x)) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x)$.

d) Par suite, $\forall\, x > 0,\ xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(d_x) = xf'(0) + x^2\theta(x)f''(h_x)$, d'où, $\dfrac{1}{2}f''(d_x) = \theta(x)f''(h_x)$.

On fait tendre x vers 0^+. Les réels h_x et d_x tendent alors vers 0 . Comme la fonction f'' est continue, il vient $\dfrac{1}{2}f''(0) = \theta(0)\,f''(0)$. Comme $f''(0) \neq 0$, on conclut que $\theta(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. a) Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = xf'\Big(x\theta(x)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Arctan}(x) = \frac{x}{1+x^2\theta^2(x)} \quad \Rightarrow \quad \theta^2(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{Arctan}(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\theta(x) \geqslant 0$, on obtient : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \theta(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x\operatorname{Arctan}(x)} - \dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2\operatorname{Arctan}(x)}}$.

b) Le DL3 de la fonction Arctan au voisinage de 0 est $\operatorname{Arctan}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Par suite,

$$\frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2\operatorname{Arctan}(x)} = \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \underset{0}{\sim} \frac{x^3/3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{\frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2\operatorname{Arctan}(x)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il n'y a pas de contradiction avec la question 3 car nous ne sommes plus sous les mêmes hypothèses. Ici, $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, d'où $f''(0) = 0$.

Exercice 1.13.

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

2. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) admet une limite et la déterminer.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

4. Montrer que la suite $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Soit (a_n) et (b_n) des suites de réels strictement positifs tels que $a_n \sim b_n$ et $\displaystyle\sum_n a_n$ diverge.

On admet le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n^2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et en déduire un équivalent de (x_n).

b) Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$.

c) En déduire que $x_n = \sqrt{2n}\left(1 + \dfrac{1}{8}\dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$.

Solution :

1. Comme $x_0 > 0$, on montre que (x_n) est à valeurs strictement positives et que $x_{n+1} > x_n$. Ainsi, la suite (x_n) est strictement croissante.

2. D'après le théorème de la limite monotone, (x_n) tend vers un réel $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si ℓ est fini, alors $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$, ce qui est impossible. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3. Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k} = x_{k+1} - x_0$, alors la série $\displaystyle\sum \frac{1}{x_n}$ diverge.

4. D'après la définition, $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$. Ainsi, comme (x_n) tend vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}^2 - x_n^2) = 2$.

5.a) Comme $x_{n+1}^2 - x_n^2 \sim 2$ et $\sum 2$ diverge, d'après la question précédente, $x_n^2 - x_0^2 \sim 2n$. Ainsi, $x_n^2 \sim 2n$ et $x_n \sim \sqrt{2n}$.

b) D'après la question précédente, $\dfrac{1}{x_n^2} \sim \dfrac{1}{2n}$. Or, $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2} \sim \frac{1}{2} H_n \sim \frac{\ln(n)}{2}$.

c) Comme $\displaystyle x_{n+1}^2 = x_0^2 + 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$, d'après la question précédente,

$$x_n^2 = 2n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n)).$$

En utilisant le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 0,

$$x_n = \sqrt{2n}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right).$$

Exercice 1.14.

1. Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ $(a < b)$. On considère la fonction h définie sur $[a, b]$ par :

$$h(x) = f(b)g(x) - f(x)g(b) - f(a)g(x) + g(a)f(x).$$

a) Calculer $h(a)$ et $h(b)$. Que remarque-t-on ?

b) En déduire qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ pour lequel on a :

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = f'(c)\,(g(b) - g(a))$$

2. Soit u et v deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que v ne s'annule pas sur $]a, b[$.
On considère les fonctions f et g définies sur $[a, b]$ par :

$$\forall\, x \in [a, b],\ f(x) = \int_a^x u(t)v(t)dt \text{ et } g(x) = \int_a^x v(t)dt.$$

a) Justifier la continuité de f et g sur $[a, b]$ et leur dérivabilité sur $]a, b[$.
b) En déduire l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ qui vérifie la relation :

$$\int_a^b u(t)v(t)dt = u(c) \int_a^b v(t)dt.$$

c) Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\varphi + \psi$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et telles que :

$$\int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^2 dt = \int_0^1 \big(\psi(t)\big)^2 dt$$

En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe un réel $s \in]0, 1[$ tel que $\varphi(s) = \psi(s)$.
Quel résultat obtient-on dans le cas où $\psi(x) = x$?

Solution :

1. a) On trouve $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$.
b) Les règles usuelles impliquent que h est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
De plus, on a $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$. Comme $h(a) = h(b)$, le théorème de Rolle nous assure l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ pour lequel on a :

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = f'(c)\, (g(b) - g(a))\, .$$

2. a) Les fonctions f et g sont deux primitives de fonctions continues, elles sont donc continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.
b) Comme $f'(x) = u(x)v(x)$ et $g'(x) = v(x)$ et en utilisant 1. b), il existe un réel $c \in]a, b[$ qui vérifie :

$$v(c) \int_a^b u(t)v(t)dt = u(c)v(c) \int_a^b v(t)dt.$$

Or la fonction v ne s'annulant pas sur $]a, b[$, on peut simplifier par $v(c)$.
c) On prend pour u et v les deux fonctions définies par $u = \varphi - \psi$ et $v = \varphi + \psi$. Elles vérifient les hypothèses de la question précédente. Il existe donc $s \in]0, 1[$ tel que : $0 = [\varphi(s) - \psi(s)] \int_0^1 v(t)dt$.
Puisque v est une fonction continue sur $[0, 1]$ qui ne s'annule pas sur $]0, 1[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que v est soit strictement positive sur $]0, 1[$ soit strictement négative. Un raisonnement classique sur les primitives nous assure que $\displaystyle\int_0^1 v(t)dt \neq 0$ et par conséquent on a $\varphi(s) = \psi(s)$.

Lorsque l'on prend pour ψ la fonction identité et si φ est une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $\varphi(x)+x\neq 0$ pour tout x de $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)^2dt=\frac{1}{3}$, alors la fonction φ admet un point fixe appartenant à $]0,1[$.

Exercice 1.15.

1. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}dx$. On pose :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}dx$$

b) Trouver pour tout $n\geqslant 2$, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer I_{2n} et I_{2n+1}.

2. Montrer que l'on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x^{n+1}\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx=\int_0^{+\infty} x^{n-1}\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx.$$

3. a) Établir la relation :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1}-n^{-\frac{n+1}{2}}I_n=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^n\Big(x+\frac{1}{x}-2\Big)\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx.$$

b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ 0<\sqrt{n}\,I_n<I_{n+1}.$$

4. Établir les inégalités :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{1-\frac{1}{2n}}<4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\pi n}<1.$$

En déduire un équivalent de $\displaystyle\binom{2n}{n}$.

Solution :

1. a) La fonction $x\to x^n e^{-x^2/2}$ est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est négligeable devant $1/x^2$ en $+\infty$, on en déduit que l'intégrale I_n est convergente.

b) Pour $n\geqslant 2$, on effectue une intégration par parties en posant $u(x)=x^{n-1}$ et $v(x)=-e^{-x^2/2}$ d'où

$$\int_0^A x^n e^{-x^2/2}dx=[uv(x)]_0^A+\int_0^A (n-1)x^{n-2}e^{-x^2/2}dx.$$

On fait tendre A vers $+\infty$ donc

$$I_n=(n-1)I_{n-2}.$$

On a $I_0 = \sqrt{2\pi}/2$ et $I_1 = 1$. On montre par récurrence que
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\pi/2},$$
et
$$I_{2n+1} = 2^n (n!).$$

2. a) On utilise une intégration par parties en posant $u(x) = x^n$ et $v(x) = -1/ne^{-nx^2/2}$, on en déduit l'égalité pour tout entier $n \geqslant 1$
$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-nx^2/2}dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-nx^2/2}dx.$$

3.a) On remarque que
$$\int_0^{+\infty} x^n\Big(x+\frac{1}{x}-2\Big)\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}\Big(x^2-2x+1\Big)\exp\Big(-\frac{nx^2}{2}\Big)dx$$
On effectue le changement de variable affine $u = \sqrt{n}x$, et on obtient :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}(x+\frac{1}{x}-2)dx &= 2\left(\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-nx^2/2}dx - \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}dx\right)\\ &= 2(n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}}I_n)\end{aligned}$$
Par conséquent, on a pour tout entier n :
$$n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}}I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}(x+\frac{1}{x}-2)dx.$$
b) Le membre de droite est positif d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 < \sqrt{n}I_n < I_{n+1}$.

4. On a pour tout entier $n > 0$: $\sqrt{2n}I_{2n} < I_{2n+1}$. Soit
$$\sqrt{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\pi/2} < 2^n n!$$
On en déduit $4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\pi n} < 1$, puis $\sqrt{2n-1}I_{2n-1} < \dfrac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\pi/2}$. Donc
$$\sqrt{1-\frac{1}{2n}} < 4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\pi n}.$$

Par conséquent, un équivalent de $\binom{2n}{n}$ est $\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Exercice 1.16.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a) Déterminer l'espace propre de φ associé à la valeur propre 3.

b) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall\, u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

Soit S une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Q la forme quadratique associée à S définie pour tout X
de $\mathbb{R}^n$ par : $Q(X) = {}^tXSX$.

On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $Q(X) \geqslant 0$ et que $Q(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$.

a) Justifier que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.

b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les extrema de f sous la contrainte $Q(u) = 1$.

c) Appliquer à la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x, y, z) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 2yz$$

Solution :

1. a) On résoud le système $AX = 3\,X = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + y - z = 0$, équation du plan $E_3 = \ker(\varphi - 3Id)$.

Ainsi le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de dimension 2.

b) La matrice A est symétrique réelle. Elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

La trace donne l'autre valeur propre, soit 9, d'où :

$$\ker(\varphi - 9Id) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. a) Si $SX = \lambda\, X$, alors $0 < {}^tXSX = \lambda\, ||X||_2^2 \Rightarrow \lambda > 0$ car $X \neq 0$.

b) Soit $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (endomorphisme symétrique) associé à S. Alors :

$$g(u) = Q(u) - 1 = \langle \psi(u), u \rangle - 1$$

$$g(u+h) = \langle \psi(u+h), u+h \rangle - 1 = g(u) + 2\langle \psi(u), h \rangle + \langle \psi(h), h \rangle$$

avec, par inégalité de Cauchy-Schwarz et linéarité de ψ : $|\langle \psi(h), h \rangle| \leqslant ||\psi(h)_2||\, ||h||_2 = o\big(||h||_2\big)$.
Par unicité du développement limité à l'ordre 1, $\nabla(g)(u) = 2\,\psi(u)$. De même, $\nabla(f)(u) = 2\,u$.

Remarque : On peut aussi calculer les dérivées partielles de $g(u) = {}^tXSX - 1$ et $f(u) = {}^tXX$.

Par le cours, les conditions nécessaires d'extremum sous contrainte sont : $\exists\lambda \in \mathbb{R}\,, \psi(u) = \lambda\, u$.
En u_0 vecteur propre de ψ pour $\lambda_0 > 0$ tel que $g(u_0) = g(u_0 + h) = 0$, on a :

$$g(u_0 + h) = g(u_0) + 2\langle \psi(u_0), h \rangle + Q(h) \Rightarrow \langle u_0, h \rangle = -\frac{Q(h)}{2\,\lambda_0}$$

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + 2\langle u_0, h \rangle + ||h||_2^2 = f(u_0) + ||h||_2^2 - \frac{Q(h)}{\lambda_0}$$

Mais on sait que :

$$\mu\, ||h||_2^2 \leqslant Q(h) \leqslant \mu'\, ||h||_2^2 \quad \text{où} \quad \mu = \min\big(\mathrm{Sp}(S)\big) \quad \text{et} \quad \mu' = \max\big(\mathrm{Sp}(S)\big)$$

D'où $f(u_0 + h) \leqslant f(u_0)$ si $\lambda_0 = \mu$, et on a un minimum en u_0 associé à la plus petite valeur propre ; c'est analogue pour le maximum et μ'.

c) Applications.
- Pour $\mu = 3$,

$$1 = Q(x, y, 2x+y) = 15\,x^2 + 6\,y^2 + 12\,x\,y \Rightarrow f(x, y, 2x+y) = \sqrt{5\,x^2 + 2\,y^2 + 4\,x\,y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Pour $\mu = 9$,

$$1 = Q(2t, t, -t) = 54t^2 \Rightarrow f(2t, t, -t) = \sqrt{4t^2 + t^2 + t^2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 1.17.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln n$ et $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2. Montrer que la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$ converge, puis en déduire que la suite (a_n) converge.

3. Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\lambda}$.

a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont monotones.

b) En déduire que la suite (S_n) converge.

4. Montrer que $\ln(u_n\sqrt{n}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\,a_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$, où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la nature de la suite (u_n).

5. Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right)$.

Montrer que la suite (v_n) converge. Montrer que sa limite est nulle si et seulement si $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Solution :

1. On voit que u_n est le produit de facteurs strictement positifs car $1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ reste positif pour tout $k \geqslant 1$.

2. On a : $a_{n+1} - a_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Un simple développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 donne

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, on a : $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

Comme la série de Riemannn $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum a_n - a_{n+1}$ converge. Par télescopage, la suite (a_n) admet une limite.

3. Posons $b_n = \dfrac{1}{n^\lambda}$.

a) La suite (S_{2n}) décroît car $S_{2(n+1)} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0$ car (b_n) décroissante.

La suite (S_{2n+1}) croît car $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geqslant 0$ car (b_n) décroissante.

b) On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -b_{2n+1} \to 0$, car $\lim(b_n) = 0$.

D'après la question précédente les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes ; donc elles convergent vers la même limite ℓ.

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers ℓ, il en est de même de (S_n).

4. On peut écrire

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{n}u_n\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}a_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}\right)}_{=w_k}.\end{aligned}$$

D'après le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, on a $w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^{3/2}}$.
Comme la série de Riemannn $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ converge.
Ainsi, d'après les deux questions précédentes, la suite de terme général $\ln\left(\sqrt{n}u_n\right)$ converge, donc, par continuité de l'exponentielle, la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge, donc, en la multipliant par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0, on a $\lim(u_n) = 0$.

5. En s'inspirant du cas $\lambda = \frac{1}{2}$ traité précédemment, on a $v_n > 0$ et :

$$\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} + \sum_{k=1} w'_k \text{ avec } w'_k = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\right) - \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^{2\lambda}}.$$

Comme la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}$ converge pour toute valeur de λ, par comparaison de $\sum w'_k$ avec une série de Riemann, la suite de terme général $\ln(v_n)$ converge si et seulement si $2\lambda > 1$, et sinon sa somme partielle tend vers $-\infty$. Dans le premier cas, la suite (v_n) converge vers une limite strictement positive ; dans le second cas elle tend vers 0.

Exercice 1.18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^n$, $||\ ||$ la norme euclidienne associée et $E = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On définit une application F sur E par :

$$\forall x \in E, \quad F(x) = \frac{\langle\varphi(x), x\rangle}{||x||^2}$$

1. a) Justifier que F est de classe C^2 sur E et montrer que son gradient en tout point $x \in E$ s'écrit :

$$\nabla(F)(x) = \frac{2\,\varphi(x)}{||x||^2} - \langle\varphi(x), x\rangle\,\frac{2\,x}{||x||^4}.$$

b) Déterminer l'ensemble des points critiques de F.

2. Justifier l'existence de $m = \inf\limits_{x\in E} F(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in E} F(x)$, puis les déterminer.

On remarquera que $F(x) = \Big\langle \dfrac{\varphi(x)}{||x||}, \dfrac{x}{||x||}\Big\rangle$.

3. a) Soit u un point critique de F, soit h un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$g : t \mapsto F(u + t\,h)$$

Expliciter le développement limité à l'ordre 2 de g en 0, et en déduire que la matrice hessienne de F au point u est :

$$\nabla^2(F)(u) = \frac{2}{||u||^2}\Big(A - F(u)\,I_n\Big)$$

où I_n représente la matrice identité d'ordre n.

b) En déduire la nature de tous les points critiques de F.

Solution :

1. a) On a $F(x) = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$, donc $F \in C^2(E,\mathbb{R})$ comme quotient de fonctions polynomiales de dénominateur ne s'annulant pas sur E.

Par DL_1 de $g : x \mapsto \langle \varphi(x), x\rangle$, de $h : x \mapsto ||x||^2 = \langle x, x\rangle$ et identification, on obtient :

$$\nabla(g)(x) = 2\,\varphi(x) \quad \text{et} \quad \nabla(h)(x) = 2\,x$$

d'où :

$$\nabla(F)(x) = \frac{2\,\varphi(x)}{||x||^2} - \langle \varphi(x), x\rangle\,\frac{2\,x}{||x||^4}$$

b) Donc $\nabla(F)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = F(x)\,x$. D'où $x \neq 0$ est un vecteur propre de φ.

Or A est symétrique réelle, donc diagonalisable, et x vecteur propre associé à λ vérifie $\varphi(x) = \lambda\,x$, donc $F(x) = \lambda$.

2. Si S est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$F(x) = \Big\langle \frac{\varphi(x)}{||x||}, \frac{x}{||x||}\Big\rangle \quad \text{donc} \quad m = \inf_{y\in S}\langle\varphi(y), y\rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{y\in S}\langle\varphi(y), y\rangle$$

existent car $y \mapsto \langle \varphi(y), y\rangle$ est continue sur S fermée bornée.

Les extrema de F sur E ouvert sont parmi les points critiques, c'est-à-dire les vecteurs propres de φ, pour lesquels $F(x) = \lambda$ valeur propre associée ; d'où le min (resp. max) est atteint aux vecteurs propres associés à la valeur propre λ_1 minimale (resp. λ_n maximale.)

3. a) On a :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\langle \varphi(u), u\rangle + 2\,t\,\langle \varphi(u), v\rangle + t^2\,\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2\,\left[\,1 + \dfrac{2\,t}{||u||^2}\,\langle u, v\rangle + \dfrac{t^2}{||u||^2}\,||v||^2\,\right]} \\
&= \frac{\langle \varphi(u), u\rangle + 2\,t\,\langle \varphi(u), v\rangle + t^2\,\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\,\left[1 - \frac{2\,t}{||u||^2}\,\langle u, v\rangle - \frac{t^2}{||u||^2}\,||v||^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{4\,t^2}{||u||^4}\,(\langle u, v\rangle)^2 + o(t^2)\right] \\
&= F(u) + 2\,t\,\left[\frac{\langle \varphi(u), v\rangle}{||u||^2} - \frac{F(u)}{||u||^2}\,\langle u, v\rangle\right] + \\
&\quad + t^2\,\left[F(u)\,\frac{4\,(\langle u, v\rangle)^2}{||u||^4} - F(u)\,\frac{||v||^2}{||u||^2} - \frac{4\,\langle \varphi(u), v\rangle\,\langle u, v\rangle}{||u||^4} + \frac{\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\right] + o(t^2)
\end{aligned}
$$

d'où par unicité du DL_2,

$$
\langle \nabla^2(F)(u)(v), v\rangle = 2\,\left[F(u)\,\frac{4\,(\langle u, v\rangle)^2}{||u||^4} - F(u)\,\frac{||v||^2}{||u||^2} - \frac{4\,\langle \varphi(u), v\rangle\,\langle u, v\rangle}{||u||^4} + \frac{\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\right]
$$

avec $F(u) = \lambda$ si u est un vecteur propre associé à λ, donc :

$$
\langle \nabla^2(F)(u)(v), v\rangle = 2\,\left[-\frac{F(u)}{||u||^2}\,\langle v, v\rangle + \frac{\langle \varphi(v), v\rangle}{||u||^2}\right] \quad \text{d'où} \quad \nabla^2(F)(u) = \frac{2}{||u||^2}\,\Big(A - F(u)\,I_n\Big)
$$

b) Pour u (resp. v) vecteur propre normé associé à λ (resp. λ'), on a :

$$
\langle \nabla^2(F)(u)(v), v\rangle = 2\,(\lambda' - \lambda)
$$

qui change de signe (en choisissant λ' de part et d'autre de λ) si λ n'est pas l'une des valeurs extrêmes λ_1 ou λ_n.

Exercice 1.19.

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $\forall\, x \in\,]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

1. a) Étudier les variations et le comportement aux bornes du domaine de définition de la fonction f.

b) Représenter le graphe de la fonction f.

2. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

b) En utilisant les changements de variable $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ puis $u \mapsto \cos(u)$ que l'on justifiera, établir la relation :

$$
\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}
$$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, le réel S_n est bien défini.

b) Établir pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$nS_n - \frac{1}{n}f((n+1)/n) \leqslant \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leqslant nS_n$$

c) En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. a) La fonction f est décroissante (comme produit de fonctions positives décroissantes), à valeurs positives.

On a $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De plus, f est continue et dérivable.

b) Laissé au lecteur possédant un outil graphique sous la main.

2. a) La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ et à valeurs positives. De plus $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ dont l'intégrale est convergente sur $[2, +\infty[$ d'après les intégrales de Riemann.

Également, $f(x) \underset{V_1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ dont l'intégrale converge qui sur $]1, 2]$ d'après les intégrales de Riemann.

b) Comme $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est C^1 et strictement décroissante sur $]0, 1[$ et $u \mapsto \cos(u)$ est C^1 et strictement décroissante sur $]0, \pi/2[$, l'intégrabilité précédente est préservée et on a :

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\dfrac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}} \sim \dfrac{1}{k^2}$ lorsque $k \to +\infty$, alors $\sum \dfrac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}}$ converge et S_n est bien défini.

b) D'après la définition de f, on a :

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k/n).$$

Comme f est décroissante, pour tout $t \in [k/n, (k+1)/n]$, on a :

$$f((k+1)/n) \leqslant f(t) \leqslant f(k/n)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n+2}^{N+1} f(k/n) \leqslant \int_{1+1/n}^{N/n+1/n} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{N} f(k/n).$$

Comme $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, la suite $(S_{n,N})_N$ est croissante et majorée par $\displaystyle\int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt$ qui est convergente.
Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$nS_n - \frac{1}{n}f((n+1)/n) \leqslant \int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leqslant nS_n$$
$$\frac{1}{n}\int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\int_{1+1/n}^{+\infty} f(t)dt + \frac{1}{n^2}f((n+1)/n).$$

c) Comme f admet une intégrale convergente sur $]1,+\infty[$ et $f((n+1)/n) \sim \sqrt{\dfrac{n}{2}}$, alors (S_n) converge vers 0 et $S_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$.

Exercice 1.20.

Soit une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^2 et telle que :

$$f' \geqslant 0,\ f'' \geqslant 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) < 1,\ f''(1) > 0$$

On note m le réel $f'(1)$ et on note $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner un exemple de fonction f satisfaisant aux diverses contraintes.

2. a) Montrer que 1 est l'unique antécédent de 1 par f.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \neq 1$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers un réel noté ℓ.

4. Montrer que l'ensemble $J = \{x \in [0,1], f(x) = x\}$ admet une borne inférieure α puis que $f(\alpha) = \alpha$.

5. Montrer que $\ell = \alpha$.

On suppose désormais que $0 < m < 1$.

6. Montrer que $\alpha = 1$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
On suppose établie la convergence absolue de la série de terme général v_n.

a) Établir la convergence de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}v_{n+1}}{m^{-n}v_n}\right)$$

b) En déduire l'existence d'une constante $K > 0$ telle que $v_n \sim K \times m^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Par exemple : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$.

2. a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\beta \in [0, 1[$ tel que $f(\beta) = 1$. La croissance de f ($f' \geqslant 0$) entraîne que f est constante sur $[\beta, 1]$ d'où $f' = f'' = 0$ sur $[\beta, 1]$ ce qui est en contradiction avec la donnée $f''(1) > 0$. Donc $f^{-1}(1) = \{1\}$.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: on a $u_0 = 0 \neq 1$, si on suppose $u_n \neq 1$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = 1$ est absurde car $u_n \neq 1$ serait un antécédent de 1.

3. On établit par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
On a $u_0 = 0 \Rightarrow 0 = u_0 \leqslant u_1 = f(u_0) \leqslant 1$ car f est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$. De même : si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ et $[f(u_n), f(u_{n+1})] \subset [0, 1]$.
La suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante et majorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$

4. L'ensemble J est non vide ($f(1) = 1$) et minoré (par 0, car $J \subset [0, 1]$) donc il admet une borne inférieure α.
Soit $(\alpha_n) \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$. Alors, par continuité de f, $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$.

5. On a bien $u_0 = 0 \leqslant \alpha$ et si $u_n \leqslant \alpha$ alors la croissance de f entraîne que $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(\alpha) = \alpha$. On a donc montré par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \alpha$, d'où, par passage à la limite : $\ell \leqslant \alpha$. Par ailleurs, $f(\ell) = \ell$ (car f est continue) donc nécessairement : $\ell = \alpha$ (unique point fixe de $J \cap [0, \alpha]$).

6. Ici $m < 1$. On pose $g = f - Id$, alors : $g'(x) = f'(x) - 1$ et $g''(x) = f''(x) \geqslant 0$. Donc g' est croissante et majorée par $g'(1) = m - 1 < 0$ donc $g' < 0$ sur $[0, 1]$.
On a $g(\alpha) = g(1) = 0$, si $\alpha < 1$, on peut appliquer le théorème de Rolle à g sur $[\alpha, 1]$: il existe $\beta \in [0, 1], g'(\beta) = 0$ incompatible avec $g' < 0$ sur $[0, 1]$. Donc $\alpha = 1$.

7. a) Il vient $u_{n+1} = f(u_n) = f(1 - v_n) = f(1) - v_n f'(1) + \dfrac{v_n^2}{2} f''(1) + o(v_n^2)$ par application de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point 1.
D'où $1 - v_{n+1} = 1 - m v_n + \dfrac{v_n^2}{2} f''(1) + o(v_n^2)$, et $\dfrac{v_{n+1}}{m v_n} = 1 - \dfrac{v_n}{2m} f''(1) + o(v_n)$ entraîne

$$\ln\left(\frac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n}\right) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{m v_n}\right) \sim \frac{f''(1)}{2m} v_n$$

qui est le terme général d'une série convergente, d'où la convergence de la série
$\sum \ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)} v_{n+1}}{m^{-n} v_n}\right)$ vers un réel S

b) On a

$$\sum_{k=0}^{N-1} \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}v_{n+1}}{m^{-n}v_n}\right) = \ln\prod_{k=0}^{N-1}\frac{m^{-(n+1)}v_{n+1}}{m^{-n}v_n} = \ln(v_N) - \ln(v_0) - N\ln(m) = \ln\left(\frac{v_N}{v_0.m^N}\right)$$

On a $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln\left(\dfrac{v_N}{v_0.m^N}\right) = S \Rightarrow \lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{v_N}{v_0.m^N} = e^S \Rightarrow v_N \sim e^S m^N.$

2

ALGÈBRE

Exercice 2.01.

Soit E un espace vectoriel euclidien. On note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire.

1. Pour tout $u \in E$, on note ϕ_u l'application qui à tout vecteur x de E associe $\phi_u(x) = \langle u, x\rangle$.

a) Montrer que ϕ_u est une forme linéaire.

b) Montrer que l'application Ψ qui, à tout vecteur u de E, associe l'application ϕ_u est injective.

c) En déduire que, pour toute forme linéaire ϕ, il existe un unique vecteur u de E tel que $\phi = \phi_u$.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la trace de A est notée $\mathrm{tr}(A)$.

On admet que l'application g définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $g(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$, est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, H désigne un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$M \in H \Leftrightarrow \mathrm{tr}(AM) = 0.$$

3. Soit $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$B = E_{1,n} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i-1}$$

Montrer que la matrice B est inversible.

4. On note f l'application linéaire canoniquement associé à A et on pose pour tout entier $r \in [\![1, n]\!]$:

$$J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$$

a) Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ et un entier $r > 0$ tels que la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = J_r$.

b) En déduire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ$.

5. Montrer que H contient une matrice inversible.

Solution :

1.a) Le produit scalaire est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est bilinéaire. Ainsi, $\phi_u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

b) Comme le produit scalaire est linéaire à gauche, l'application Ψ est linéaire. Soit $u \in \operatorname{Ker} \Psi$, alors $\phi_u = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.

En particulier, $\phi_u(u) = \langle u, u\rangle = 0$, soit $u = 0_E$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \Psi = \{0_E\}$ et Ψ est injective.

c) Comme Ψ est injective et $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, alors Ψ est bijective.

2. Comme H est un hyperplan, il existe ϕ forme linéaire non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} \phi$. D'après le résultat

précédent, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\phi = \phi_U$. Alors, $M \in H$ si et seulement si $\phi(M) = 0$ si et

seulement si $\operatorname{tr}({}^tUM) = 0$. Il suffit donc de poser $A = {}^tU$.

3. La matrice B est une matrice de changement de base, donc est inversible. En effet, la matrice B est associée à l'application $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \to (e_2, e_3, \ldots, e_n, e_1)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de E.

4.a) Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. On considère une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ adaptée à la

décomposition $E = G \oplus \operatorname{Ker} f$. D'après le théorème du rang, G est de même dimension que $\operatorname{Im} \phi$ et $r = \operatorname{rg}(f)$.

Ainsi, en notant $f_i = f(e_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, alors $(f_1, \ldots, f_r)$ est une famille libre de E qui peut être complétée

en une base $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ de E. Alors, $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = J_r$.

b) Il s'agit des formules de changement de bases.

5. On écrit $A = PJ_rQ$ puis $\operatorname{tr}(AQ^{-1}BP^{-1}) = \operatorname{tr}(PJ_rQQ^{-1}BP^{-1}) = \operatorname{tr}(J_rB) = 0$. Ainsi, $Q^{-1}BP^{-1}$ est inversible et appartient à H.

Exercice 2.02.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite *positive* (respectivement *strictement positive*), si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls (respectivement *strictement positifs*).

On note dans ce cas $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$).

Si M et N sont deux matrices, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *productive* si M est positive et s'il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est positive si et seulement si pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $MX \geqslant 0$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$.

a) Montrer que $P > 0$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On pose $c = \min\limits_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\dfrac{x_i}{p_i}\right) = \dfrac{x_k}{p_k}$ avec $k \in [\![1,n]\!]$.

Montrer que l'on a :

$$c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j \right) \geqslant 0$$

En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.

c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AX$. Montrer que $X = 0$.

En déduire que la matrice $(I_n - A)$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que la matrice $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

3. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_n - B)$ est inversible et $(I_n - B)^{-1} \geqslant 0$.

Soit U l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et $V = (I_n - B)^{-1}U$.

Montrer que $V - BV > 0$.

Solution :

1. Supposons que $M \geqslant 0$. Tous ses coefficients sont positifs ou nuls. Comme $X \geqslant 0$, ses coefficients sont positifs ou nuls et par produit matriciel, les coefficients de MX sont positifs.

Réciproquement, les coefficients de la matrice colonne e_i représentant la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant positifs ou nuls, les colonnes de la matrice M étant formées des coefficients de Me_i, on a $Me_i \geqslant 0$ et donc $M \geqslant 0$.

2. a) On écrit $P = (P - AP) + AP$. Or $P - AP > 0$ et $AP \geqslant 0$. Donc $P > 0$.

b) Par définition de c, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $c \leqslant \dfrac{x_j}{p_j}$. Comme $p_j > 0$, il vient $x_j \geqslant c\,p_j$. Donc :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \geqslant c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$$

Or $X \geqslant AX$ entraîne que $x_k \geqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \geqslant c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$.

Comme $x_k = c\,p_k$, on obtient :

$$c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) \geqslant 0$$

Comme $p_k \geqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j$ est le k-ième élément de la matrice colonne $P - AP > 0$, on a $c \geqslant 0$ et comme $x_j \geqslant c\,p_j$ avec $p_j > 0$, il vient $X \geqslant 0$.

c) Supposons $X = AX$. Alors $-X = A(-X)$; donc $X \geqslant AX$ et $-X \geqslant A(-X)$.

Ainsi $X \geqslant 0$ et $-X \geqslant 0$ et $X = 0$.

De plus, cela signifie que $\ker(I_n - A) = \{0\}$ donc que $I_n - A$ est inversible.

d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant 0$. Posons $Y = (I_n - A)^{-1}X$. On a :

$$Y - AY = (I_n - A)Y = X \geqslant 0 \Rightarrow Y \geqslant AY \Rightarrow Y \geqslant 0$$

Donc $(I_n - A)^{-1}X \geqslant 0$ entraîne que $(I_n - A)^{-1} \geqslant 0$.

3. On sait que $(I_n - B)^{-1} \geqslant 0$. Or $U > 0$, donc $V = (I_n - B)^{-1}U \geqslant 0$.

De plus, comme dans la question précédente $V - BV = U > 0$, donc $V - BV > 0$.

Finalement $B \geqslant 0, V \geqslant 0$ entraînent que $V - BV > 0$: ainsi B est productive.

Exercice 2.03.

Soit A et B deux matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels. On note $D_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ (resp. $D_2 = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2)$) une matrice diagonale semblable à A (resp. à B) avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \geqslant \mu_2$).

1. Justifier que $A + B$ est diagonalisable. On note $D = \operatorname{diag}(\nu_1, \nu_2)$ une matrice diagonale semblable à $A + B$, avec $\nu_1 \geqslant \nu_2$.

2.a) Montrer que la trace d'une matrice symétrique d'ordre 2 est la somme de ses valeurs propres.

b) En déduire l'égalité :

$$\nu_1 + \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2,$$

3.a) Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a :

$$\lambda_2 ||x||^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_1 ||x||^2.$$

b) En déduire l'inégalité :

$$\nu_1 - \nu_2 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2.$$

4. Établir l'inégalité :

$$|\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2| \leqslant \nu_1 - \nu_2,$$

5. Montrer que l'ensemble des couples possibles (ν_1, ν_2) est inclus dans un segment $[a, b]$ dont on déterminera les extrémités.

Solution :

1. La matrice $A + B$ est diagonalisable car elle est symétrique à coefficients réels.

On note $\nu_1 \geqslant \nu_2$ les valeurs propres de $A + B$.

2.a) La matrice A symétrique réelle est ortho-diagonalisable. Deux matrices semblables ont même trace car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Ainsi la trace de A est la somme de ses valeurs propres.

3. La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres de A que l'on note (u_1, u_2) donc soit x un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on a

$$x = \langle x, u_1\rangle u_1 + \langle x, u_2\rangle u_2 \Rightarrow Ax = \lambda_1\langle x, u_1\rangle u_1 + \lambda_2\langle x, u_2\rangle u_2 \Rightarrow \langle Ax, x\rangle = \lambda_1\langle x, u_1\rangle^2 + \lambda_2\langle x, u_2\rangle^2$$

Comme $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, on obtient, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$

$$\lambda_2(\langle x, u_1\rangle^2 + \langle x, u_2\rangle^2) \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_1(\langle x, u_1\rangle^2 + \langle x, u_2\rangle^2) \Rightarrow \lambda_2||x||^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant \lambda_1||x||^2$$

On a pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$ de norme 1

$$\langle (A+B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \leqslant \lambda_1 + \mu_1 \Rightarrow \nu_1 \leqslant \lambda_1 + \mu_1$$

De même $\lambda_2 + \mu_2 \leqslant \nu_2$. On en déduit $\nu_1 - \nu_2 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2$.

4. Soit u un vecteur unitaire de $E_{\mu_1}(B)$, on a

$$\nu_2 \leqslant \langle Au, u\rangle + \mu_1 \leqslant \nu_1 \Rightarrow \lambda_2 + \mu_1 \leqslant \nu_1.$$

De même u un vecteur unitaire de $E_{\mu_2}(B)$, on a

$$\nu_2 \leqslant \langle Au, u\rangle + \mu_2 \leqslant \nu_1 \Rightarrow \nu_2 \leqslant \lambda_1 + \mu_2.$$

Ainsi $\lambda_2 + \mu_1 - \lambda_1 - \mu_2 \leqslant \nu_1 - \nu_2$.

De même avec un vecteur unitaire de $E_{\lambda_1}(A)$, puis de $E_{\lambda_2}(A)$, on obtient

$$|\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2| \leqslant \nu_1 - \nu_2.$$

5. On a $|\lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2| \leqslant \nu_1 - \nu_2 \leqslant \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2$, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2$. Par somme

$$\lambda_1+\mu_2 \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_1+\mu_2,$$

Il existe donc un réel $t \in [0,1]$ tel que $\nu_1 = \lambda_1+\mu_2+t(\mu_1-\mu_2)$. On en déduit que

$$\nu_2 = \lambda_2+\mu_1 - t(\mu_1-\mu_2)$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_2\\ \lambda_2+\mu_1\end{pmatrix} + t((\mu_1-\mu_2)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

L'ensemble des valeurs propres possibles est donc un segment dont les extrémités sont les points obtenus pour $t=0$ et $t=1$:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_1\\ \lambda_2+\mu_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda_1+\mu_2\\ \lambda_2+\mu_1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.04.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note I_n la matrice identité d'ordre n, J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ exclusivement composée de 1 et X_0 la matrice colonne $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désigne par :

• $\mathcal{U}_n$ la famille (finie) des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituées exclusivement de 0 et de 1 et contenant **exactement** deux valeurs 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. On note $u_n = \text{Card}(\mathcal{U}_n)$.

• $\mathcal{H}_n(i,j)$ le sous-ensemble de $\mathcal{U}_n$ formé des matrices dont le coefficient de la ligne i et colonne j vaut 1.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $S_{i,j}$ la matrice obtenue en permutant la i-ème colonne et la j-ème colonne de I_n.

1. a) Calculer $S_{i,j}^2$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$; décrire les matrices $MS_{i,j}$ et $S_{i,j}M$.

b) Soit $A \in \mathcal{U}_n$. Montrer que X_0 est un vecteur propre de J et de A ; préciser les valeurs propres associées.

c) Montrer que J ne peut pas s'écrire sous la forme $A-B$ avec A et B dans $\mathcal{U}_n$,

2. a) Calculer u_2 et u_3.

b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathcal{U}_n$ par $\phi(A) = S_{1,i}AS_{1,j}$ est une application à valeurs dans $\mathcal{U}_n$.

Calculer $\phi\circ\phi$ et déterminer $\phi(\mathcal{H}_n(i,j))$. En déduire que les ensembles $\mathcal{H}_n(i,j)$ ont tous le même cardinal, noté h_n, et que l'on a :

$$\sum_{A\in\mathcal{U}_n} A = h_n \times J$$

c) En remarquant que $\Big(\sum\limits_{A\in\mathcal{U}_n} A\Big)X_0 = \sum\limits_{A\in\mathcal{U}_n}(AX_0)$, établir une relation entre u_n et h_n.

Solution :

1. a) On a $S_{i,j}^2 = Id$. La matrice $S_{i,j}M$ est la matrice obtenue en permutant les lignes i et j de M. De même $MS_{i,j}$ est la matrice obtenue en permutant les colonnes i et j de M.

b) On a : $AX_0 = 2X_0$ et $JX_0 = nX_0$.

c) Supposons que $J = A - B$. Alors on aurait : $nX_0 = JX_0 = (A-B)X_0 = 2X_0 - 2X_0 = 0$, ce qui est absurde.

2. a) On a $\mathcal{U}_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$, et $u_2 = 1$.

De même $\mathcal{U}_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, et $u_3 = 6$.

b) Le produit de matrices carrées étant bien défini, il suffit de montrer que $\phi(A) \in \mathcal{U}_n$: permuter deux lignes ne modifie pas le contenu global dans les colonnes (conservation du nombre de 1), puis permuter deux colonnes ne modifie pas le contenu global dans les lignes (conservation du nombre de 1) donc on reste dans $\mathcal{U}_n$.
• $(\phi \circ \phi)(A) = S_{1,i}S_{1,i}AS_{1,j}S_{1,j} = I\ A\ I = A$, donc ϕ est bijective.
• on a $a_{i,j} = 1$ d'où, en permutant successivement les lignes 1 et i puis les colonnes 1 et j, la valeur se retrouve en ligne 1 et colonne 1 d'où $\phi(\mathcal{H}_n(i,j)) \subset \mathcal{H}_n(1,1)$.
De la même manière,$\phi(\mathcal{H}_n(1,1)) \subset \mathcal{H}_n(i,j) \Rightarrow \mathcal{H}_n(1,1) = (\phi\circ\phi)(\mathcal{H}_n(1,1)) \subset \phi(\mathcal{H}_n(i,j))$. Donc $\mathcal{H}_n(1,1) = \phi(\mathcal{H}_n(i,j))$.
• l'application ϕ étant bijective : $\mathrm{Card}(\mathcal{H}_n(i,j)) = \mathrm{Card}(\mathcal{H}_n(1,1))$ est indépendant de i,j.
• ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le nombre d'éléments de $\mathcal{U}_n$ prenant la valeur 1 à la ligne i et colonne j est h_n et les autres éléments de $\mathcal{U}_n$ prenant la valeur 0, d'où :$\sum_{A\in\mathcal{U}_n} A = h_n.J$

c) On obtient

$$\Big(\sum_{A\in\mathcal{U}_n} A\Big)X_0 = (h_n.J)X_0 = h_n n X_0 = \sum_{A\in\mathcal{U}_n} (AX_0) = \sum_{A\in\mathcal{U}_n} 2X_0 = 2u_nX_0$$

d'où : $u_n = \dfrac{n.h_n}{2}$

Exercice 2.05.

Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. a) Rappeler la formule de Moivre.

b) En déduire l'existence d'un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

2. Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, on a :

$$T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

3. a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k}$ où $\lfloor n/2\rfloor$ désigne la partie entière de $\dfrac{n}{2}$.

b) Montrer que le polynôme T_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Déterminer son degré et son coefficient dominant.

4. On considère le nombre complexe $z = \dfrac{3+4i}{5}$.

a) Déterminer son module. Soit θ un argument de z. Préciser $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

b) En utilisant le polynôme T_n, montrer qu'il n'existe aucun entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$.

Solution :

1. a) La formule de Moivre dit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, on a $e^{inx} = (e^{ix})^n$, d'où :

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i\sin x)^n.$$

b) Ainsi, avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin x)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\sin x)^k(\cos x)^{n-k}\right).$$

En ne gardant que les termes d'indice pair et en notant $\lfloor n/2\rfloor$ la partie entière de $\dfrac{n}{2}$, on a :

$$\cos(nx) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}(i\sin x)^{2j}(\cos x)^{n-2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}(\cos^2 x - 1)^j(\cos x)^{n-2j}$$

On a donc :

$$T_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}(X^2-1)^j X^{n-2j}.$$

Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il existe un second polynôme R_n vérifiant la même relation.

Posons $Q_n = T_n - R_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_n(\cos x) = 0$, donc Q_n a une infinité de racines. C'est donc le

polynôme nul, ce qui prouve que $T_n = R_n$.

2. Comme z est un nombre complexe de module 1, on peut l'écrire $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Dès lors,

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos(\theta)$$

et

$$\frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \cos(n\theta)$$

On obtient la formule demandée grâce à la relation vérifiée par T_n.

3. a) Par la formule du binôme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$. En sommant ces deux formules, les termes d'indice impair disparaissent et l'on obtient deux fois les termes d'indice pair.

D'où, $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 2\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j} = 2^{n-1}$.

b) Comme $T_n(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j}(X^2-1)^j X^{n-2j}$, on voit déjà que T_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Pour tout $j \in [\![0, \lfloor n/2\rfloor]\!]$, le polynôme $(X^2-1)^j X^{n-2j}$ est de degré n. Par somme, le polynôme T_n est de degré inférieur ou égal à n. Le coefficient de X^n dans T_n est $\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2j} = 2^{n-1}$. Ceci prouve que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

4. a) Le nombre complexe z est de module 1. Soit θ un argument de z : $\cos(\theta) = \dfrac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{4}{5}$.

b) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $1 = z^n$. Par identification de la partie réelle, cela donne :

$$1 = \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta) = 2^{n-1}(\cos\theta)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\cos\theta)^k = 2^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(\frac{3}{5}\right)^k$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$. En multipliant cette égalité par 5^n, on obtient :

$$5^n = 2^{n-1}3^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k 3^k 5^{n-k}.$$

Ceci implique que 5 divise $2^{n-1}3^n$, ce qui constitue une contradiction.

Exercice 2.06.

Dans cet exercice on confondra polynôme et fonction polynomiale.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente.

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

2. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. a) À l'aide du changement de variable $\phi(u) = \cos(u)$ sur un intervalle à préciser, déterminer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

On note T_0 le polynôme constant égal à 1.

4.a) Déterminer un réel α pour lequel le polynôme $T_1 = X - \alpha T_0$ vérifie les relations :

$$\langle T_1, T_0 \rangle = 0 \text{ et } \mathrm{Vect}(T_1, T_0) = \mathbb{R}_1[X].$$

Préciser les racines de T_1.

b) Déterminer deux réels λ et μ pour lesquels le polynôme $T_2 = X^2 - \lambda T_1 - \mu T_0$ vérifie les relations :

$$\langle T_2, T_0 \rangle = \langle T_2, T_1 \rangle = 0 \text{ et } \mathrm{Vect}(T_2, T_1, T_0) = \mathbb{R}_2[X].$$

Préciser les racines de T_2.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P change de signe sur $\mathbb{R}$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$) les racines de P telles que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le polynôme P change de signe au voisinage de α_i.

Déterminer le signe du polynôme $P(X) \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)$.

6. Soit $(T_0, \ldots, T_n)$ une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire défini à la question 1, telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme T_k soit de degré k.

Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le polynôme T_k possède k racines simples et que ces racines appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{V_1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$. Ainsi, si PQ possède

une racine en 1, alors l'intégrande est prolongeable par continuité. Sinon, elle est équivalente, à une constante multiplicative près, à $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ dont l'intégrale converge. Le raisonnement en -1 est identique.

2. La symétrie, la linéarité et la positivité proviennent des propriétés des intégrales généralisées. De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$, les fonctions étant continues sur $]-1,1[$, le polynôme P est nul sur $]-1,1[$, donc il possède une infinité de racines, soit $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi, on a bien défini un produit scalaire.

3. a) La fonction $\cos :]0,\pi/2[\to]0,1[$ est de classe C^1 et strictement décroissante. Ainsi, d'après la parité et la formule de changement de variable, l'intégrale étant convergente,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{\sin(u)}du = \pi.$$

b) On pose $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]-1,1[$ et en prenant bien soin de travailler sur un segment puis de passer à la limite,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx.$$

On effectue le même changement de variable que précédemment. Or, comme $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$, alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx$ et la somme des deux intégrales vaut $\pi/2$. On obtient ainsi le résultat attendu.

4.a) Cherchons un tel α. Comme $\langle T_1, T_0\rangle = 0$, alors

$$\alpha = \frac{\langle X, T_0\rangle}{\langle T_0, T_0\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0,$$

par parité. Ainsi, $T_1 = X$ convient. L'unique racine de T_1 est 0.

b) On reprend les calculs comme précédemment.

$$\lambda = \frac{\langle X^2, T_0\rangle}{\langle T_0, T_0\rangle} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}$$

$$\mu = \frac{\langle X^2, T_1\rangle}{\langle T_1, T_1\rangle} = \frac{1}{\langle T_1, T_1\rangle}\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0.$$

Ainsi, $T_2 = X^2 - \dfrac{1}{2} = \left(X - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. En notant $Q=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)$, le polynôme Q change de signe en même temps que P. Ainsi, le produit PQ est de signe constant. Il est positif si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ et négatif sinon.

6. On suppose par l'absurde que T_k possède des racines hors de l'intervalle $[-1,1]$ ou des racines doubles.

On note $-1\leqslant \alpha_1<\cdots<\alpha_r\leqslant 1$ les racines de T_k comprises dans l'intervalle $[-1,1]$ en lesquelles T_k change de signe. Alors, $r<k$. On pose alors $Q_k=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)$. (Si T_k ne possède pas de telles racines, on pose $Q_k=1$).

Alors, $Q_k=\displaystyle\sum_{i=0}^{r} q_iT_i$ et comme la base est orthogonale et $r<k$, alors $\langle Q_k,T_k\rangle=0$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{Q_k(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$.

Comme Q_kT_k garde un signe constant, il s'agit du polynôme nul, ce qui est impossible. Ainsi, $r=k$ et T_k possède k racines dans $[-1,1]$ en lesquelles il change de signe, donc ces racines sont simples et sont les seules racines de T_k.

Exercice 2.07.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que $X\geqslant 0$ (resp. $X>0$) si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $x_i\geqslant 0$ (resp. $x_i>0$).

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A\geqslant 0$ (resp. $A>0$) si pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\geqslant 0$ (resp. $a_{i,j}>0$).

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices défini par : $\mathcal{E}=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,/\,A \text{ inversible et } A^{-1}\geqslant 0\}$.

1. On suppose que $A\in\mathcal{E}$. Montrer que $\{X\in\mathbb{R}^n/AX\geqslant 0\}\subseteq\{X\in\mathbb{R}^n/X\geqslant 0\}$.

2. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\{X\in\mathbb{R}^n/AX\geqslant 0\}\subseteq\{X\in\mathbb{R}^n/X\geqslant 0\}$.

a) On suppose que $AX=0$. Montrer que $X=0$. En déduire que A est inversible.

b) En utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, montrer que $A^{-1}\geqslant 0$.

3. Soit B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\1&0&1&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\dots&1&0\end{pmatrix}$$

et $A = 2I_n - B$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = AX$. En posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, montrer que si $Y \geqslant 0$, alors $X \geqslant 0$.

(on pourra considérer $a = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n+1} x_i$ et montrer que $a = 0$).

b) En déduire que la matrice A appartient à $\mathcal{E}$.

Solution :

1. Si $Y = AX \geqslant 0$, comme $A^{-1} \geqslant 0$, on a $X = A^{-1}(AX) \geqslant 0$.

2. a) Supposons $AX = 0$; donc $AX \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$. Mais $A(-X) = 0$ entraîne que $-X \geqslant 0$. Donc $X = 0$.
On en déduit que $\ker A = \{0\}$ et que A est inversible.
b) Soit e_i le i -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $A(A^{-1}e_i) = e_i \geqslant 0$. Donc $A^{-1}e_i \geqslant 0$. Ceci représente la i-ième colonne de A^{-1} qui est donc positive. Ainsi $A^{-1} \geqslant 0$.

3. a) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $AX = Y$ est équivalent au système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{2n-1} - x_n = y_{n-1} \\ 2x_n - x_{n-1} = y_n \end{cases}$$

On introduit deux variables $x_0 = x_{n+1} = 0$ de façon à ce que le système précédent devienne

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!],\ 2x_k - (x_{k-1} + x_{k+1}) = y_k$$

Supposons $Y = AX \geqslant 0$. Soit $a = \inf\limits_{i \in [\![0,n+1]\!]} x_i$. Montrons que $a = 0$.

- si $a = x_0$ ou $a = x_{n+1}$, on a $a = 0$
- si $a = x_k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $2a \geqslant x_{k-1} + x_{k+1}$. Or $x_{k-1} \geqslant a$ et $x_{k+1} \geqslant a$. Donc $2a \geqslant x_{k-1} + x_{k+1} \geqslant 2a$. On a donc égalité et $x_{k-1} = x_k = x_{k+1} = a$.

On remonte et on redescend ainsi les équations pour obtenir $a = x_j\ \forall j \in [\![0, n+1]\!]$, soit $a = 0$.

b) On conclut cet exercice en utilisant les questions précédentes.

Exercice 2.08.

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes d'ordre $n \geqslant 2$ et

$$\mathcal{C} = \left\{\ \Phi \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall M \in E, \quad \Phi({}^tM) = {}^t[\Phi(M)]\ \right\}$$

Si P est une matrice fixée de E, on note Φ_P l'application définie sur E par :

$$\forall\, M \in E,\ \Phi_P(M) = {}^tPMP + {}^tP{}^tMP$$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de E.

1. Soit M une matrice inversible de E. Justifier que ${}^tM$ est inversible et exprimer $\left({}^tM\right)^{-1}$ en fonction de M^{-1}.

2.a) Montrer que $\Phi_P \in \mathcal{C}$.

b) On suppose que P est inversible. Déterminer $\ker(\Phi_P)$.

3. a) Montrer que E est la somme directe de l'espace $\mathcal{S}_n$ et de l'espace $\mathcal{A}_n$.
b) Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que Φ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\Phi(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n$ et $\Phi(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n$.

4. Dans cette question, on a $n = 2$, P non nulle et non inversible. Montrer que $\text{tr}(\Phi_P) = 2(\text{tr}(P))^2$.

Solution :

1. C'est du cours : $MM^{-1} = I$ et en transposant ${}^t\left(M^{-1}\right){}^tM = I$ d'où ${}^tM$ est inversible à gauche donc à droite et $\left({}^tM\right)^{-1} = {}^t\left(M^{-1}\right)$.

2.a) Pour montrer que $\Phi_P \in \mathcal{C}$ il faut démonter que Φ_P est un endomorphisme de E vérifiant $\forall M \in E$, ${}^t\Phi_P(M) = \Phi_P({}^tM)$.
Le côté linéaire de Φ_P vient de la linéarité des pré et post multiplications par une matrice fixe, et de la linéarité de la transposition.
Le fait que Φ_P soit une application de E dans E vient de ce que le produit de deux matrices carrées de taille $n \times n$ est une matrice carrée de taille $n \times n$, et aussi du fait que la transposition est une application de E dans E.
Ensuite, $\forall M \in E, {}^t(\Phi_P(M)) = {}^t({}^tPMP + {}^tP{}^tMP) = {}^tP{}^tMP + {}^tPMP = \Phi_P({}^tM)$, en utilisant les propriétés de linéarité de la transposition et la formule de transposée d'un produit, généralisée à un produit de trois matrices carrées de même taille $n \times n$: ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$

b) On suppose ici P est inversible. On a $\ker(\Phi_P) = \{M \in E, {}^tP(M + {}^tM)P = 0\} = \{M \in E, (M + {}^tM) = 0\}$, grâce à la multiplication à droite et à gauche par des matrices inversibles et par leurs inverses.
Ainsi, si P est inversible, alors $\ker(\Phi_P) = \mathcal{A}_n$.

3. a) Même sur le corps des complexes, toute matrice M de E se décompose de manière unique en $M = A + S$ avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$ et de plus :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2}, \qquad A = \frac{M - {}^tM}{2}$$

b) i) Supposons que Φ est dans $\mathcal{L}(E)$, et que $\Phi(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n$ et $\Phi(\mathcal{S}_n) \subset \mathcal{S}_n$. Soit donc une matrice M quelconque de E que l'on décompose comme à la question précédente en $M = A + S$ avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$.

Alors, $\Phi(M) = \Phi(A) + \Phi(S)$ par linéarité. Or d'après l'hypothèse, $\Phi(A) \in \mathcal{A}_n$ et $\Phi(S) \in \mathcal{S}_n$, donc ${}^t(\Phi(M)) = -\Phi(A) + \Phi(S)$.

Et par linéarité comme ${}^tM = S - A$, $\Phi({}^tM) = -\Phi(A) + \Phi(S) = {}^t(\Phi(M))$.

ii) Soit Φ un endomorphisme de E appartenant à $\mathcal{C}$. Soient A et S deux matrices, la première dans $\mathcal{A}_n$ et la seconde dans $\mathcal{S}_n$.
Comme S est symétrique, elle est égale à sa transposée. Ainsi, $\Phi({}^tS) = \Phi(S) = {}^t\Phi(S)$ puisque $\Phi \in \mathcal{C}$, et de même $\Phi({}^tA) = -\Phi(A) = {}^t\Phi(A)$.

Ainsi, on a bien prouvé que $\Phi(S) \in \mathcal{S}_n$ et $\Phi(A) \in \mathcal{A}_n$.

4. Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est non inversible, alors ses colonnes sont proportionelles et $ad - bc = 0$.

Déterminons les images par Φ_P de la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$. Il vient :

$$\Phi_P(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ab & 2b^2 \end{pmatrix}, \Phi_P(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 2ac & 2cd \\ 2bc & 2d^2 \end{pmatrix}$$
$$\Phi_P(E_{1,2}) = \Phi_P(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2ac & ad + cb \\ ad + cb & 2bd \end{pmatrix}$$

Comme P est non inversible, $ad = bc$, ainsi :

$$\mathrm{tr}(\Phi_p) = 2a^2 + 2d^2 + 2(ad + cb) = 2a^2 + 2d^2 + 4ad = 2(a + d)^2 = 2(\mathrm{tr}(P))^2$$

Exercice 2.09.

Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose : $\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^kM = A^{k-1}M\}$.

Montrer que l'ensemble Γ_k est un espace vectoriel.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

3. Dans cette question *uniquement*, on prend $n = 3$ et on choisit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer Γ_1, Γ_2, et Γ_3.

4. On revient au cas général où $n \geqslant 2$.

a) Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.
b) Étudier la réciproque.
On pourra s'intéresser à une matrice M dont toutes les colonnes valent $X \in \ker A$.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \dim \Gamma_k$. Montrer que la suite (u_k) est croissante et qu'il existe un unique entier p tel que :

$$\forall\, k < p,\ u_k < u_{k+1} \ \text{ et } \ \forall\, k \geqslant p,\ u_k = u_p.$$

6. Montrer que si A est diagonalisable et admet 0 pour valeur propre, alors $p = 2$.

Solution :

1. Γ_k est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto A^k M - A^{k-1}M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est bien linéaire par bilinéarité du produit de matrices).

2. Pour tout $M \in \Gamma_k$, on a $A^k M = A^{k-1}M$, d'où, en multipliant à gauche par A, on obtient : $A^{k+1}M = A^k M$, ce qui montre que $M \in \Gamma_{k+1}$.

3. Le calcul donne :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} M = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0 \Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = 0 \Leftrightarrow \exists x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. a) On sait déjà que $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Réciproquement, si $M \in \Gamma_2$, alors $A^2M = AM$; en multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient $AM = M$, ce qui montre que $M \in \Gamma_1$. Ainsi on a montré que si A est inversible, alors $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ d'où l'égalité $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Cette égalité se prolonge avec la même démonstration à $\Gamma_3, \ldots, \Gamma_n, \ldots$

b) Réciproquement, supposons que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^2M = AM \implies AM = M$. Prenons $X \in \ker A$ et la matrice $M = (X|\cdots|X)$, on a $A^2M = 0 = AM$, donc $AM = M$, soit $AX = X$; ainsi $0 = AX = X$.

On a donc montré que $\ker A = \{0\}$, donc A est inversible.

5. D'après la question 2, par croissance de la dimension, la suite (u_k) est une suite croissante. Comme elle est formée d'entiers naturels inférieurs ou égaux à $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$, elle ne peut être strictement croissante.

Soit p le plus petit entier tel que $u_p = u_{p+1}$. Ainsi on a $u_k < u_{k+1}$ pour tout $k < p$ et d'autre part on a $\Gamma_{p+1} = \Gamma_p$, soit :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^{p+1}M = A^pM \Leftrightarrow A^pM = A^{p-1}M$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, en remplaçant M par A^jM, on a donc :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^{p+j+1}M = A^{p+j}M \Leftrightarrow A^{p+j}M = A^{p+j-1}M,$$

ce qui signifie aussi que : $M \in \Gamma_{p+j+1} \Leftrightarrow M \in \Gamma_{p+j}$, soit $\Gamma_{p+j} = \Gamma_{p+j+1}$, d'où $u_{p+j+1} = u_{p+j}$. Ainsi on a montré que $u_k = u_p$ pour tout $k \geqslant p$.

6. Cela revient à prouver que :

• Γ_1 est strictement inclus dans Γ_2, c'est-à-dire qu'il existe une matrice M telle que $A^2M = AM$ et $AM \neq M$;
• $\Gamma_2 = \Gamma_3$, c'est-à-dire que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^3M = A^2M \Longrightarrow A^2M = AM$.
Si A est de rang r, diagonalisons A sous la forme : $A = P\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-r)})P^{-1}$, avec des λ_i tous non nuls. On remarque alors que :
• si $M = P\text{diag}(0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{(n-r)})P^{-1}$ alors $AM = 0 \neq M$ mais $A^2M = AM = 0$.
• la relation $A^3M = A^2M$ entraîne que $A^2M = AM$, en multipliant à gauche par la matrice

$$P\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_r}, 0, \ldots, 0\right) P^{-1}$$

Exercice 2.10.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On identifie un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ à sa matrice M dans la base canonique et on note donc, par abus de notation, $\ker(M)$ au lieu de $\ker(f)$.
La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et on considère le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, A + {}^tA = J - I\}$$

1. Déterminer le spectre de J.

2. Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{F}$. On suppose que le rang de A est inférieur ou égal à $n-2$.

a) Montrer que $\ker(J) \cap \ker(A) \neq \{0\}$.
b) Soit X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ appartenant à $\ker(J) \cap \ker(A)$.
Évaluer de deux manières différentes ${}^tX(A + {}^tA)X$ et en déduire une contradiction.
c) Quelles sont les valeurs possibles pour le rang de A ?

3. a) Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à M avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

Établir pour toute matrice colonne X non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'encadrement suivant :

$$\lambda_1 \leqslant \frac{{}^tXMX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_n$$

b) En déduire que pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{F}$, les valeurs propres réelles de A sont incluses dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right]$.

Solution :

1. On a $J^2 = nJ$ donc le polynôme $X^2 - nX$ est annulateur de J. On en déduit que $\mathrm{Sp}(J) \subset \{0, n\}$.

Comme la matrice J est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle a donc au moins une valeur propre réelle.
Elle ne peut pas en posséder une seule car sinon, elle serait semblable à une matrice scalaire et donc elle-même scalaire. En conclusion $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$.

2. a) Si on avait $\ker(J) \cap \ker(A) = \{0\}$, la somme $\ker(J) \oplus \ker(A)$ serait directe. Or $\dim \ker(J) = n - 1$ et si le rang de A était inférieur ou égal à $n - 2$, le noyau de A serait de dimension supérieur ou égal à 2.

On aurait donc : $\dim(\ker(J) \oplus \ker(A)) \geqslant n + 1$. Cette dernière inégalité est impossible.

En conclusion si $rg(A) \leq n - 2$, alors $\ker(J) \cap \ker(A) \neq \{0\}$.

b) On évalue ${}^tX(A + {}^tA)X$ de deux manières différentes :

• En distribuant : ${}^tX(A + {}^tA)X = {}^tXAX + {}^tX{}^tAX$. Comme $X \in \ker(A)$, $AX = 0$ et ${}^tX{}^tA = {}^t(AX) = 0$.

Ainsi : ${}^tX(A + {}^tA)X = 0$.

• En remplaçant $A + {}^tA$ par $J - I$, on a : ${}^tX(A + {}^tA)X = {}^tXJX - {}^tXX$. Comme X est dans $\ker(J)$, il
reste : ${}^tX(A + {}^tA)X = -{}^tXX$.

En identifiant les deux égalités obtenues, on a donc : $\|X\|^2 = 0$. Cela entraîne $X = 0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

c) L'hypothèse $\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 2$ est donc impossible. Ainsi $\mathrm{rg}(A) = n - 1$ ou $\mathrm{rg}(A) = n$.

3. a) La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Soit $(U_1, \dots U_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de M, associés aux valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Un vecteur X non nul, s'écrit donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k$. Et comme le base est orthonormale, on a : ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$.

Finalement, en notant m la plus petite des valeurs propres et M la plus grande :

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \leqslant M$$

b) Soit λ une valeur propre de A. En reprenant l'égalité obtenue précédemment :

$${}^tXAX + {}^tX{}^tAX = {}^tXJX - {}^tXX$$

Or ${}^tXAX = \lambda{}^tXX$ et ${}^tX{}^tA = {}^t(AX) = \lambda{}^tX$. D'où ${}^tX{}^tAX = \lambda{}^tXX$. Ainsi : $2\lambda{}^tXX = {}^tXJX - {}^tXX$.

Comme X est non nul, on a : $2\lambda + 1 = \dfrac{{}^tXJX}{{}^tXX}$.

On a vu que les valeurs propres de J étaient 0 et n. En utilisant l'encadrement précédent et en arrangeant, on trouve bien :
$$-\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Exercice 2.11.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E.

On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, où 0 désigne l'endomorphisme nul.

Un tel endomorphisme u est dit *nilpotent*.

1. a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $u\big(\text{Ker}(u^k)\big) \subset \text{Ker}(u^{k-1})$.

b) Montrer que l'on a :
$$\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \ldots \subset \text{Ker}(u^p) = E.$$

Prouver que toutes ces inclusions sont strictes.

c) Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Ker}(u)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(u^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$ une base $\mathcal{B}_k$ de $\text{Ker}(u^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\text{Ker}(u^{k+1})$.

On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \mathcal{B}_p$, où $\mathcal{B}_p$ est une base de E.

Écrire la matrice représentative M de u dans la base $\mathcal{B}_p$. Préciser sa diagonale.

2. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 2$. On note tr l'application trace.

a) L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un espace vectoriel ?

b) Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\text{Ker}\,(\text{tr})$.

c) Montrer que :
$$\text{Vect}(\mathcal{N}) \subset \text{Ker}\,(\text{tr})\,.$$

3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non nul vaut 1 et se situe à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose :
$$N_k = E_{1,1} - E_{1,k} + E_{k,1} - E_{k,k}.$$

a) Montrer que la famille $\{(N_k)_{2 \leqslant k \leqslant n}, (E_{i,j})_{i \neq j}\}$ est une famille libre.

b) En déduire l'égalité : $\text{Vect}(\mathcal{N}) = \text{Ker}\,(\text{tr})$.

Solution :

1. a) Soit $k \geqslant 2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$. Alors, $u^{k-1}(u(x)) = u^k(x) = 0$, donc $u(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(u^{k-1})$.
b) On voit facilement que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. De plus, $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(0) = E$.

Il reste à montrer que les inclusions sont strictes. Pour cela, on trouve un vecteur qui est dans $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$ sans être dans $\mathrm{Ker}(u^k)$. Comme $u^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Mais alors, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, le vecteur $y_k = u^{p-1-k}(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$ sans être dans $\mathrm{Ker}(u^k)$.

c) Par définition de $\mathcal{B}_1$, on a $u(\mathcal{B}_1) = \{0\}$. Par la question 1(a), $u(\mathcal{B}_2) \in \mathrm{Ker}(u)$.

De même, pour tout entier $k \in [\![2, p]\!]$, $u(\mathcal{B}_k) \in \mathrm{Ker}(u^{k-1})$.

La matrice représentative M de u dans la base $\mathcal{B}_p$ est donc triangulaire supérieure, formée de blocs non nuls se situant strictement au-dessus de la diagonale. Sa diagonale est nulle.

2. a) L'ensemble $\mathcal{N}$ n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par addition. En effet, la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente. Prenons par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices M et N sont nilpotentes car $M^2 = N^2 = 0$ (la matrice nulle).

Mais, $M + N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente (calculer son carré).

b) L'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application tr est surjective, donc $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

Par la formule du rang, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est de dimension $n^2 - 1$.

c) Soit N une matrice nilpotente. La question 1.c) montre que l'on peut construire une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice représentative de tout endormorphisme nilpotent est une matrice de diagonale nulle. Cela signifie qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = PN'P^{-1}$, où N' est une matrice de la forme de celle trouvée à la question 1.c). Deux matrices semblables ayant la même trace, $\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(N') = 0$.

On conclut que toute matrice nilpotente est de trace nulle.

Soit $M \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$: M s'écrit comme une combinaison linéaire de matrices nilpotentes. Comme l'application trace est linéaire, on en déduit que $\mathrm{tr}(M) = 0$, d'où l'inclusion demandée.

3. a) On considère des réels $(a_k)_{2 \leqslant k \leqslant n}$ et des réels $(\alpha_{i,j})_{i \neq j}$ tels que

$$\sum_{k=2}^{n} a_k N_k + \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} a_k \left(E_{1,1} - E_{1,k} + E_{k,1} - E_{k,k}\right) + \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0$$

d'où

$$0 = \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right) E_{1,1} + \sum_{k=2}^{n} a_k E_{1,k} + \sum_{k=2}^{n} a_k E_{k,1} + \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j}$$

Par liberté de la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, on conclut que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $a_k = 0$ et pour tout $i \neq j$, $\alpha_{i,j} = 0$.

Ceci prouve la liberté de la famille considérée.

b) Pour tout $i \neq j$, la matrice $E_{i,j}$ est nilpotente. On vérifie d'autre part que, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, la matrice N_k est nilpotente. On a ainsi trouvé une famille libre de $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ qui contient $n^2 - 1$ vecteurs.

Ainsi, $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ est un espace vectoriel de dimension supérieur ou égal à $n^2 - 1$. Or $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr})$ qui est de dimension n^2-1. Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ est un espace vectoriel de dimension exactement égal à $n^2 - 1$ et qu'on a l'égalité des deux espaces vectoriels.

Exercice 2.12.

Partie A.

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit u un endomorphisme de E.

On note M la matrice représentative de u dans une base fixée de E.

On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On appelle déterminant de M, noté $\det(M)$, la quantité $ad - bc$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de M de degré 2 dont on exprimera les coefficients en fonction de la trace de M, notée $\mathrm{tr}(M)$ et de son déterminant $\det(M)$.

2. On suppose que M est semblable à $-M$ et que $\det(M) \neq 0$.

a) Calculer la trace de M.

b) Montrer que M est diagonalisable. Donner une relation entre les valeurs propres et le déterminant de M.

c) Déterminer deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, notés D et D', de dimension 1 chacun, et tels que $u(D) = D'$ et $u(D') = D$.

Partie B.

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $u^2 + Id = 0$.

1. Déterminer les valeurs propres de u.

2. a) Montrer que pour tout vecteur $x \neq 0$, la famille $(x, u(x))$ est libre.

b) On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que la matrice associée à u dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

3. Déterminer deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^{2n}$ qui vérifient les deux propriétés :

i) $\mathbb{R}^{2n} = F \oplus G$;

ii) $u(F) \subseteq G,\ u(G) \subseteq F$.

Solution :

Partie A

1. On trouve $M^2 = (a+d)M + (bc-ad)I_2 = \text{tr}(M)M - \det(M)I_2$. On peut donc prendre comme polynôme annulateur de M le polynôme $P(X) = X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)$.

2. a) Comme deux matrices semblables ont la même trace, $\text{tr}(M) = \text{tr}(-M) = -\text{tr}(M)$. Donc, $\text{tr}(M) = 0$.

b) Notons $\delta = -\det(M) \in \mathbb{C}^*$. Notons α et β les deux racines distinctes (réelles ou complexes) de P.

Donc, $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$. D'après la question 1, on a : $0 = P(M) = (M-\alpha I_2)(M-\beta I_2)$.

Si $M - \alpha I_2$ était inversible, on en déduirait que $M = \beta I_2$, mais alors $\text{tr}(M) = 2\beta \neq 0$ (car $\delta \neq 0$).

Il s'ensuit que $M - \alpha I_2$ n'est pas inversible, donc que α est valeur propre de M. On montre de même que β est valeur propre de M. Ainsi, M a deux valeurs propres distinctes : α et β. On conclut que M est diagonalisable.

c) Comme M a deux valeurs propres distinctes, chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

On note $E_\alpha = \text{Vect}(e_1)$ et $E_\beta = \text{Vect}(e_2)$. On pose alors $D = \text{Vect}(x)$, où $x = e_1 + e_2$.

Le vecteur x n'est pas nul du fait que la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre. On pose $D' = u(D)$.

On va montrer que D et D' sont solutions du problème.

- D est un espace vectoriel de dimension 1. Comme 0 n'est pas valeur propre de M, u est bijectif.

Ainsi, $D' = u(D)$ est également un sous-espace vectoriel de dimension 1. On a $\dim(D) + \dim(D') = 2 = \dim(E)$.

- Soit $z \in D \cap D'$. Le vecteur z s'écrit à la fois $z = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z = u(z')$ où $z' = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{C}$.

On obtient ainsi : $\lambda e_1 + \lambda e_2 = \lambda\, x = z = u(\mu e_1 + \mu e_2) = \mu u(e_1) + \mu u(e_2) = \mu\alpha e_1 + \mu\beta e_2$.

Comme $\{e_1, e_2\}$ est une base de E (base de vecteurs propres), il s'ensuit que $\lambda = \mu\alpha = \mu\beta$.

Si $\mu \neq 0$, cela donnerait $\alpha = \beta$, ce qui est exclu. Donc $\mu = 0$, d'où $z = 0$. Ainsi, $D \cap D' = \{0\}$ et $D \oplus D' = E$.

- $D' = u(D)$ par construction de D'.
- On remarque que $M^2 = \delta I_2$, donc $u^2 = \delta\, id_E$. Ainsi,

$$u(D') = u^2(D) = \delta\, id_E(D) = D\,.$$

Partie B

1. Si λ est valeur prope de u, alors $\lambda^2+1=0$ et $\lambda \in \{\pm i\}$. L'endomorphisme u n'a pas de valeur propre réelle.

2. a) Pour tout x non nul, la famille $(x, u(x))$ est libre ; sinon u posséderait une valeur propre réelle.

b) On choisit $e_1 \neq 0$ et $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, u(e_1))$ qui est de dimension 2. Soit G_1 tel que $F_1 \oplus G_1 = \mathbb{R}^{2n}$. Soit $e_2 \in G_1$.

Montrons que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2))$ est libre.

Par contraposée, supposons que $u(e_2) = \alpha e_2 + x$ avec $x \in F_1$. En composant par u, il vient :

$$\begin{cases} u(e_2) = \alpha e_2 + x \\ -e_2 = \alpha u(e_2) + u(x) \end{cases}$$

Donc $e_2 = -\alpha^2 - \alpha x + u(x) \Rightarrow (1+\alpha^2)e_2 \in F_1$ ce qui est contradictoire avec le choix de e_2.

On pose $F_2 = \mathrm{Vect}(e_2, u(e_2))$. En continuant ce processus, on construit une base de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_n, u(e_n))$$

La base demandée est $(e_1, \ldots, e_n, u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

3. De manière immédiate $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Exercice 2.13.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique associée au produit scalaire donné par $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ où $x = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ et $\|.\|$ la norme associée.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le spectre de A est noté $\mathrm{Sp}(A)$. On dit que A est une *contraction* (resp. une contraction stricte) si on a :

$\|Ax\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\|Ax\| < \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

Dans toute la suite, on note P (resp. Q) une matrice associée, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, à un projecteur orthogonal p (resp. q).

1. Dans cette question, on suppose que les matrices P et Q commutent.

a) On pose $T = P - Q$. Justifier que T est une matrice symétrique.

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que si $Px = 0$, alors $\lambda \in \{-1, 0\}$. Prouver que si $Px \neq 0$, alors Px est un vecteur propre de Q. En déduire que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \{-1, 0, 1\}$.

c) Montrer que T est une contraction.

d) Prouver que si T est une contraction stricte, alors on a nécessairement $P = Q$.

2. Dans cette question, on ne suppose plus que P et Q commutent.

L'objectif de cette question est de montrer que $T = P - Q$ est encore une contraction.

a) Établir la relation :

$$\|Tx\|^2 = \langle (I-Q)x, Px\rangle + \langle (I-P)x, Qx\rangle .$$

b) Montrer que T est une contraction. En déduire que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [-1,1]$.

Solution :

1. a) Comme P et Q sont des matrices de projecteurs orthogonaux, elles sont symétriques.

La matrice T est donc symétrique puisqu'associé à un endomorphisme symétrique dans une base orthonormée.

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ et x un vecteur propre associé à λ. On a donc $\lambda x = Px - Qx$.

Si $Px = 0$, alors $-\lambda \in \mathrm{Sp}(Q) = \{0,1\}$ d'où la propriété demandée.

Si $Px \neq 0$, alors $\ker(Q - (1-\lambda)I) \neq 0$ et par conséquent $1 - \lambda \in \{0,1\}$.

Finalement, on a bien $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \{-1,0,1\}$.

c) Comme T est symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe une base orthonormée $u_1, \cdots, u_n$ de vecteur propres pour T. Si $x \in \mathbb{R}^n$, notons $(x_1, \cdots, x_n)$ les coordonnées de x dans cette base.

On a donc $Tx = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k u_k$ avec $\lambda_k \in \{-1,0,1\}$. D'où $\|Tx\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2$.

Donc T est une contraction.

d) Si T est une contraction stricte et x un vecteur propre associé à une valeur propre λ, alors on a :

$$|\lambda|\|x\| = \|Tx\| < \|x\|, \text{ d'où } |\lambda| < 1$$

Comme $\lambda \in \{-1,0,1\}$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Ainsi $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$ et comme T est diagonalisable, on a nécessairement $T = 0$ et donc $P = Q$.

2. a) Comme P et Q sont symétriques, il vient :

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \langle (P-Q)x, (P-Q)x\rangle = \big\langle (P-Q)^2 x, x\big\rangle = \langle [(P+Q-PQ-QP)]\,x, x\rangle \\ &= \langle [(P(I-Q) + Q(I-P))]\,x, x\rangle = \langle (I-Q)x, Px\rangle + \langle (I-P)x, Qx\rangle .\end{aligned}$$

b) On voit que :

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &\leqslant \|(I-Q)x\|\|Px\| + \|Qx\|\|(I-P)x\| \\ &\leqslant \sqrt{\|(I-Q)x\|^2 + \|Qx\|^2}\sqrt{\|(I-P)x\|^2 + \|Px\|^2} = \|x\|^2.\end{aligned}$$

Il en résulte que T est bien une contraction. La propriété $\mathrm{Sp}(T) \subseteq [-1,1]$ s'obtient avec un raisonnement analogue à celui qui a été utilisé dans la première partie de 1. d), (mais cette fois les inégalités sont prises au sens large).

Exercice 2.14.

Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $||\ ||$. On identifie tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de A associés respectivement à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

On suppose désormais : $\lambda_1 > 0$

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_1 ||u||^2$.

4. En déduire que l'application $\phi : (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle Au, v\rangle$ est un produit scalaire.

5. Soit b un vecteur non nul fixé dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f : u \mapsto \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle$$

a) Montrer que :

$$f(u) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1 ||u||^2 - ||b|| \cdot ||u||$$

En déduire que la fonction f est minorée. Est-elle majorée ?

b) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ admet une borne inférieure négative ou nulle.

c) Montrer que, si $||u|| > \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$ alors $f(u) \geqslant 0$.

En déduire que :

$$\inf\{f(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{f(B_r)\}$$

où B_r est la boule fermée centrée en 0 et de rayon $r = \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$

d) Montrer que la fonction f admet un minimum global.

Solution :

1. Par application du théorème spectral, on obtient une base orthonormée formée de vecteurs propres.

2. Le réel 0 n'est pas valeur propre donc A est inversible.

3. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Ce vecteur se décompose dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sous la forme $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Ceci entraîne que

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i e_i \Rightarrow \langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \lambda_1.||u||^2$$

4. On montre successivement que ϕ est :
- symétrique : $\phi(v,u) = \langle Av, u\rangle = {}^t(Av)u = {}^tv{}^tAu = {}^tvAu = \langle v, Au\rangle = \langle Au, v\rangle = \phi(u,v)$.
- linéaire à gauche : $\phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1\phi(u_1, v) + \alpha_2\phi(u_2, v)$
- définie positive : $\phi(u,u) \geqslant \lambda_1||u||^2 \geqslant 0$ et $\phi(u,u) = 0 \Rightarrow \lambda_1||u||^2 = 0 \Rightarrow ||u||^2 = 0 \Rightarrow u = 0$

5. a) En utilisant le résultat de la question 2 : $\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_1||u||^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$f(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1||u||^2 - ||b||\ ||u||$$

La fonction f est minorée car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\lambda_1 t^2 - ||b||t$ est négative sur $\left[0, \dfrac{b}{\lambda_1}\right]$ et admet un minimum pour $t = \dfrac{||b||}{\lambda_1}$ d'où :

$$f(u) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1\frac{||b||^2}{\lambda_1^2} - ||b||\frac{||b||}{\lambda_1} = -\frac{||b||^2}{2\lambda_1}$$

La fonction f n'est pas majorée : pour $u = (x, 0, \ldots, 0)$, on a $||u||^2 = x^2$ d'où : $f(u) \geqslant \dfrac{1}{2}\lambda_1 x^2 - ||b||\ |x|$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(u) = +\infty$

b) L'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$ est minorée et admet donc une borne inférieure. Comme $f(0) = 0$ cette borne inférieure est négative ou nulle.

c) si $||u|| > \dfrac{2||b||}{\lambda_1}$ alors

$$\frac{1}{2}\lambda_1||u|| - ||b|| > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda_1||u||^2 - ||b||||u|| > 0 \Rightarrow f(u) \geqslant 0$$

On vient d'établir que $\inf(f(\mathbb{R}^n\backslash B_r)) \geqslant 0$ et on a vu dans la question 4.a) que $\inf(f(B_r)) \leqslant 0$. D'où : $\inf(f(B_r)) \leqslant \inf(f(\mathbb{R}^n\backslash B_r)) \Rightarrow \inf\{f(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{f(B_r)\}$.

d) La fonction f est continue sur le fermé borné B_r donc f est bornée sur B_r et atteint son minimum en un vecteur $u_0 \in B_r$.
Donc : $\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) \geqslant f(u_0)$. Ainsi f admet un minimum global en u_0.

Exercice 2.15.

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique associée au produit scalaire donné par $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ où $x = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$; on note $\|.\|$ la norme associée.

Dans tout l'exercice, P et Q sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associées à des projecteurs et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner un polynôme annulateur de degré 2 pour les matrices P et Q.

2. On pose : $T = P - Q$. Vérifier que $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) \subseteq \mathrm{Ker}(T - I)$ et que $\mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Ker}(P) \subseteq \mathrm{Ker}(T + I)$.

3. Dans cette question, on suppose que P (resp. Q) est la matrice d'un projecteur orthogonal p (resp. q).
a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|QPx\|^2 = \langle PQPx|x\rangle$.
b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - I)$, montrer $PQx = PQPx = 0$.
c) Prouver que $\mathrm{Ker}(T - I) = \mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q)$ et que $\mathrm{Ker}(T + I) = \mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Ker}(P)$.

4. On revient au cas général où P et Q sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associées à des projecteurs et on suppose que pour tout x non nul de $\mathbb{R}^n$, on a $\|Tx\| < \|x\|$.
a) Montrer que $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Ker}(P) = \{0\}$.
b) En déduire que le rang de P est égal au rang de Q.

5. Dans cette question, on prend pour P et Q les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les inclusions données dans la question 2. peuvent être strictes.

Solution :

1. Le cours nous dit que $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de degré 2 pour les matrices P et Q.

2. La vérification est immédiate.

3. a) Dans ce cas, les matrices P et Q sont symétriques. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\|QPx\|^2 = \langle QPx|QPx\rangle = \left\langle PQ^2Px|x\right\rangle = \langle PQPx|x\rangle$$

b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - I)$, on a donc $x = Px - Qx$ et par suite $Px = Px - PQx$, d'où $PQx = 0$. Il s'ensuit que $0 = PQx = PQPx - PQx = PQPx$.

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T-I)$. D'après les deux questions précédentes on a $\|QPx\|^2 = \langle PQPx|x\rangle = 0$, d'où $QPx = 0$. Comme $x = Px - Qx$, on en déduit que $Qx = QPx - Qx = -Qx$, d'où $Qx = 0$ et par suite $Px = x$.
Dans ce cas, on a donc l'inclusion inverse $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) \supseteq \mathrm{Ker}(T-I)$ et par suite l'égalité. On échange les rôles de P et Q pour obtenir la deuxième égalité.

4. a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T-I)$. Supposons x non nul, alors on doit avoir $\|x\| = \|Tx\| < \|x\|$ ce qui est absurde. Il en résulte que $\mathrm{Ker}(T-I) = \{0\}$ et avec la question 2, on a nécessairement $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \{0\}$. Un raisonnement analogue prouve la deuxième égalité.

b) Les sous espaces $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Ker}(Q)$ sont donc en somme directe. En utilisant le théorème du rang, il vient alors $n \geqslant \dim(\mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(Q)) = \dim(\mathrm{Im}(P)) + \dim(\mathrm{Ker}(Q)) = \mathrm{rg}(P) + n - \mathrm{rg}(Q)$. D'où $\mathrm{rg}(P) \leqslant \mathrm{rg}(Q)$. En utilisant le fait que $\mathrm{Im}(Q)$ et $\mathrm{Ker}(P)$ sont aussi en somme directe, on trouve que $\mathrm{rg}(P) \geqslant \mathrm{rg}(Q)$ et donc l'égalité souhaitée.

5. On a $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$, on peut donc affirmer avec le cours que P et Q sont bien les matrices de deux projecteurs. On voit que $\ker(P) = \mathrm{Vect}\{(0,1)\}$, $\ker(Q) = \mathrm{Vect}\{(1,-1)\}$, $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$ et $\mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Vect}\{(0,1)\}$.

On a $T = \mathrm{diag}(1,-1)$, par conséquent $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q) = \{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(T-I) = \mathrm{Vect}\{(1,0)\}$. Il suffit ensuite d'échanger les rôles de P et Q pour montrer que la deuxième inclusion de la question 2 peut être stricte.

Exercice 2.16.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si L_1 et L_2 sont deux parties de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on appelle *somme de* L_1 *et* L_2, *notée* $L_1 + L_2$, la partie de $\mathbb{C}$ définie par $L_1 + L_2 = \{s + t; s \in L_1 \text{ et } t \in L_2\}$.

1. On considère les matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les spectres $\mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Sp}(B)$ et $\mathrm{Sp}(A+B)$ et en déduire qu'en général le spectre de la somme de deux matrices n'est pas contenu dans la somme des spectres de ces matrices.

2. On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui leur sont canoniquement associés. On pose : $w = u + v$.

a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A+B) = \mathrm{Sp}(w)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(w - \lambda Id_{\mathbb{C}^n})$ est un sous-espace stable par u et par v.

b) On note u_1 (resp. v_1) la restriction de u (resp. de v) au sous-espace E. On a donc u_1 et $v_1 \in \mathcal{L}(E)$.

Quelle relation a-t-on entre les endomorphismes u_1, v_1 et Id_E ?

c) Comme $E \neq \{0\}$, on choisit un vecteur non nul x dans E.

Établir l'existence d'un polynôme non nul p, de degré minimal, tel que $p(u_1)(x) = 0$.

d) Justifier l'existence d'un nombre complexe α pour lequel on a $p(X) = (X - \alpha)q(X)$, où q est un polynôme.

e) Montrer que $\alpha \in \mathrm{Sp}(u_1)$ et que $(\lambda - \alpha) \in \mathrm{Sp}(v_1)$. En conclure que $\mathrm{Sp}(A+B) \subseteq \mathrm{Sp}(A)+\mathrm{Sp}(B)$.

3. On considère une famille finie $\{P_1, \cdots, P_n\}$ $(n \geqslant 2)$ de matrices de projections qui commutent entre elles.

On pose $T = P_1 + \cdots + P_n$. Déterminer un sous-ensemble fini F sur lequel on peut se restreindre pour chercher les valeurs propres de T.

Solution :

1. Il est clair que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$. Comme $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice $A + B$ est symétrique. Sa trace est nulle et son déterminant vaut -1, on a donc $\mathrm{Sp}(A + B) = \{-1, 1\}$. Il est clair que $\mathrm{Sp}(A + B) \nsubseteq \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$.

2. a) Soit $x \in E$, on a donc $\lambda x = u(x) + v(x)$. On voit que

$$\lambda u(x) = u^2(x) + u \circ v(x) = u^2(x) + v \circ u(x) = w(u(x))$$

d'où $u(x) \in E$. Le sous espace E est donc stable par u. De la même manière, on montre qu'il est stable par v.

b) Si $x \in E$, on a $\lambda x = u(x) + v(x) = u_1(x) + v_1(x)$. On a donc $u_1 + v_1 = \lambda Id_E$.

c) Soit m le plus petit entier pour lequel la famille

$$\{x, u_1(x), \cdots, u_1^m(x)\}$$

est liée (qui existe puisque l'on est en dimension finie).

Comme $x \neq 0$, on a $m \geqslant 1$, de plus il existe $(a_0, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ tels que

$$a_m u_1^m(x) + \cdots + a_1 u_1(x) + a_0 x = 0$$

Le polynôme $p_1 = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$ convient.

d) Comme le degré de p est supérieur où égal à 1, le théorème de d'Alembert-Gauss nous dit qu'il admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. On peut donc l'écrire sous la forme $p(X) = (X - \alpha)q(X)$.

e) On a donc $0 = p(u_1(x)) = (u_1 - \alpha Id)(q(u_1)(x))$, de plus $q(u_1)(x) \neq 0$ car $q \neq 0$ et $d^\circ(q) < d^\circ(p)$. C'est donc un vecteur propre de u_1 associé à α.

On a bien $\alpha \in \mathrm{Sp}(u_1)$. D'après la question 2. b, on a $v_1 - (\lambda - \alpha)Id_E = \alpha Id_E - u_1$, il en découle que $\lambda - \alpha \in \mathrm{Sp}(v_1)$. D'où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$. L'inclusion souhaitée est prouvée.

3. la matrice P_k étant la matrice d'une projection, on a $Sp(P_k) \subset \{0, 1\}$. Comme la famille $\{P_1, \cdots, P_n\}$ $(n \geqslant 2)$ est commutative, une récurrence finie utilisant la question 2, nous donne

$$\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathrm{Sp}(P_1) + \cdots + \mathrm{Sp}(P_n) = \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Exercice 2.17.

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme non nul

de E. On note $M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la trace de la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Dans la suite, on note $\operatorname{tr}(f)$ ce réel.

2. Montrer que si $\operatorname{tr}(f) = 0$ alors f n'est pas une homothétie.

3. On suppose dans cette question que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x\, x$.

Soit un vecteur $x_0 \in E$ fixé ; on note $\lambda = \lambda_{x_0}$. Montrer que pour tout $y \in E$, on a : $\lambda_y = \lambda$ (*on pourra étudier les cas où x_0 et y sont deux vecteurs libres ou liés*).

Que peut-on en déduire pour f ?

4. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non

nulle de trace nulle. On note $\operatorname{rg}(A)$ le rang de la matrice A.

Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients de la diagonale principale sont tous nuls en distinguant les deux situations :

- si $\operatorname{rg}(A) = 1$, justifier que A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- si $\operatorname{rg}(A) = 2$, justifier que A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ où $\beta \in \mathbb{R}^*$.

5. Dans cette question, $\dim(E) = n + 1$. On note $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$. On suppose que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

a) Établir l'existence de $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, f(e_1))$ soit libre.

On note alors $e_2 = f(e_1)$ et D la droite vectorielle engendrée par e_1.

b) Montrer l'existence d'une famille finie de $n - 1$ vecteurs $e_3, \cdots, e_{n+1}$ tels que l'hyperplan H engendré

par $\{e_2, e_3, \cdots, e_{n+1}\}$ soit un supplémentaire de D.

c) On note p la projection sur H parallèlement à D. On pose pour tout $y \in H, g(y) = p(f(y))$.

Montrer que g ainsi défini est un endomorphisme de H de trace nulle.

d) Montrer par récurrence sur n, que si $\operatorname{tr}(f) = 0$, alors il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base a tous ses coefficients de la diagonale principale nuls.

Solution :

1. Soit $\mathcal{B}_1$ une autre base de E. On note $B = M_{\mathcal{B}_1}(f)$. Alors $A = PBP^{-1} \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = tr(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$ est indépendante de la base choisie.

2. Si f (non nulle) est une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{tr}(f) = n\lambda \neq 0$.

3. a) Si y et x_0 sont liés : $y = \mu x_0 \Rightarrow \lambda_y y = \mu\lambda x_0 = \lambda.y \Rightarrow \lambda_y = \lambda$.
Si y et x_0 sont libres : $\lambda_{x_0+y}(x_0 + y) = \lambda x_0 + \lambda_y y$ et $(\lambda_{x_0+y} - \lambda)x + (\lambda_{x_0+y} - \lambda_y)y = 0 \Rightarrow \lambda_{x_0+y} = \lambda_y = \lambda$.
On a établi que pour tout $y \in E$, $f(y) = \lambda y$ ce qui est la définition d'une homothétie.

4. Pour $n = 2$, la matrice s'écrit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$.

• si $\mathrm{rg}(A) = 1$ alors $a^2 + bc = 0$. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$ Soit e_2 un vecteur de E non lié à e_1, on a $f(e_2) \in \mathrm{Im}(A)$ d'où $f(e_2) = \alpha e_1$. En se plaçant dans la base (e_1, e_2), la matrice A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha > 0$.

• si $\mathrm{rg}(A) = 2$, alors $a^2 + bc \neq 0$ Par la question 3, il existe e_1 tel que $(e_1, f(e_1))$ soit une base de E. Ainsi $f(f(e_1)) = (a^2 + bc)e_1$ donc A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 + bc & 0 \end{pmatrix}$ où $a^2 + bc \in \mathbb{R}^*$.

5. a) Par la question 3, il existe e_1 tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre dans E. On note $e_2 = f(e_1)$. La famille $\{e_1, e_2\}$ peut être complétée en $\{e_1, e_2, e_3, \cdots e_{n+1}\}$ base de E. Par définition l'hyperplan H engendré par $\{e_2, e_3, \cdots, e_{n+1}\}$ est un supplémentaire de D dans E.

b) Ainsi défini, $g(y)$ est unique dans H. La linéarité de p et de f entraîne celle de g c'est bien un endomorphisme de H.

c) La matrice de f dans la base $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n+1,2} & \cdots & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice de g dans la base $\{e_2, e_3, \cdots, e_{n+1}\}$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n+1,2} & \cdots & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

D'où $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(f) = 0$

d) Procédons par récurrence sur n.

Pour $n = 2$ le résultat a déjà été établi lors de la question 4.

On suppose le résultat établi au rang $n > 2$; montrons qu'il est encore vrai au rang $n + 1$.
On note $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$. On suppose $\operatorname{tr}(A) = 0$. On a montré que $g \in \mathcal{L}(H)$ avec $dim(H) = n$ et $\operatorname{tr}(g) = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence on a l'existence d'une base de H $\{u_2, \cdots, u_{n+1}\}$ telle que la matrice de g dans cette base ait tous ses coefficients de la diagonale principale nuls. On se place dans la base $\{u_1 = e_1, u_2, \cdots, u_{n+1}\}$ de E, on note : $f(u_j) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i,j} u_j$. Alors
• $f(u_1) = f(e_1) = e_2 \in H = \operatorname{Vect}\{u_2, \cdots, u_{n+1}\}$ donc $b_{1,1} = 0$.
• pour $2 \leqslant j \leqslant n + 1$, on a : $g(u_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} b_{i,j} p(u_j) = \sum_{i=2}^{n+1} b_{i,j} u_j$ (car $p(u_1) = 0$). L'hypothèse de récurrence entraîne : $b_{j,j} = 0$ pour tout $j \in [\![2, n]\!]$.
On a montré que la matrice de f a tous ses coefficients de la diagonale principale nuls. Ce qui achève la démonstration.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X la variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

1. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T.

b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité et donner une densité de T.

2. On considère une variable aléatoire N, indépendante des X_k, qui suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$, avec $0 < q < 1$.

On définit la variable aléatoire U par : pour tout $\omega \in \Omega$, $U(\omega) = \min\big(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$.

a) Montrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $P(U > x) = \dfrac{1-q^2}{x^2 - q^2}$.

b) Établir l'existence de l'espérance de la variable aléatoire U, notée $E(U)$.

c) Établir l'égalité suivante :

$$E(U) = 1 + \int_1^{+\infty} P\big([U > x]\big)dx.$$

d) Calculer $E(U)$.

Solution :

1.a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sauf en 1 et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1.

La fonction de répartition de X est donc : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit x réel. On a : $F_{T_n}(x) = P\big([T_n \leqslant x]\big) = P\big([\sup(X_1, \dots, X_n) \leqslant x\sqrt{n}]\big)$, soit encore,

$$F_{T_n}(x) = P\big([X_1 \leqslant x\sqrt{n}] \cap \dots \cap [X_n \leqslant x\sqrt{n}]\big) = \big(F_X(x\sqrt{n})\big)^n = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x\sqrt{n} > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $x \leqslant 0$, on a $F_{T_n}(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = 0$.
- Si $x > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x\sqrt{n} > 1$.

Soit $n \geqslant n_0$; on a alors $F_{T_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = e^{-1/x^2}$.

b) On vérifie facilement que F_T est bien une fonction de répartition et qui plus est, d'une variable à densité.

Une densité de T est :

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3}\, e^{-1/t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.a) Soit $([N = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$P\big([U > x]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([U > x] \cap [N = n]\big)$$

Or $P\big([U > x] \cap [N = n]\big) = P\big([U_n > x] \cap [N = n]\big)$. Comme les variables X_k et la variable N sont indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que U_n et N sont indépendantes. On a donc :

$$P\big([U > x]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([U_n > x]\big) \times P\big([N = n]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}(1 - q^2)q^{2n-2}$$

$$= \frac{1 - q^2}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q^2}{x^2}\right)^{n-1} = \frac{1 - q^2}{x^2 - q^2}$$

b) Pour tout $x > 1$, une densité de U est $f_U(x) = 2(1-q^2)\dfrac{x}{(x^2-q^2)^2}$ et $0 \leqslant x f_U(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ d'intégrale convergente. Donc $E(U)$ existe.

c) Pour $A > 1$, une intégration par parties donne :

$$\int_1^A t f_U(t)dt = \Big[-t\big(1-F_U(t)\big)\Big]_1^A + \int_1^A \big(1-F_U(t)\big)dt$$

Il reste à vérifier grâce à l'expression de $1-F_U$ trouvée ci dessus, que $\lim\limits_{A\to+\infty} A\big(1-F_U(A)\big) = 0$ et à passer à la limite lorsque A tend vers $+\infty$. Il vient :

$$E(U) = \int_1^{+\infty} t f_U(t)dt = 1 + \int_1^{+\infty} P\big([U>t]\big)dt$$

d) Une décomposition classique donne :

$$\frac{1}{x^2-q^2} = \frac{1}{2q}\left[\frac{1}{x-q} - \frac{1}{x+q}\right]$$

et

$$E(U) = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1-q^2}{x^2-q^2}dx = 1 + \frac{1-q^2}{2q}\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x-q} - \frac{1}{x+q}\right]dx = 1 + \frac{1-q^2}{2q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right).$$

Exercice 3.02.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i et X et Y les variables aléatoires définies par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \quad \text{et} \quad Y = N - X$$

1. Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $\quad P([X=k]\cap[Y=\ell]) = \dbinom{k+\ell}{k} p^k(1-p)^\ell P(N = k+\ell)$.

2. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

3. On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) \neq 0$ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y=\ell) \neq 0$.

a) Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$(k+1)P(X=k+1)P(Y=\ell)(1-p) = (\ell+1)P(X=k)P(Y=\ell+1)p$$

b) En déduire la loi suivie par X puis celle suivie par Y.

c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Solution :

1. L'événement $[X = k \cap Y = \ell]$ est égal à l'événement $[X = k \cap N = k + \ell]$. En utilisant les probabilités conditionnelles, on a :

$$P([X = k \cap Y = \ell]) = P([X = k \cap N = k + \ell]) = P([X = k|N = k + \ell])P(N = k + \ell)$$

Or lorsque $N = k + \ell$, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k + \ell, p)$. Ainsi :

$$P([X = k \cap Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N = k + \ell)$$

2. Si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, il vient :

$$P([X = k \cap Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} = p^k (1-p)^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^k \lambda^\ell}{k!\ell!}$$

La loi marginale de X se calcule par :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} P([X = k \cap Y = \ell]) \\ &= p^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^\ell \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. On montre de la même façon que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}((1-p)\lambda)$.

3.a) Notons $p_k = P(X = k)$ et $q_\ell = P(Y = \ell)$. On sait que :

$$\begin{cases} p_{k+1} q_\ell = P\big([X = k+1] \cap [Y = \ell]\big) = \dbinom{k+\ell+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^\ell P(N = k + \ell + 1) \\ p_k q_{\ell+1} = P\big([X = k] \cap [Y = \ell+1]\big) = \dbinom{k+\ell+1}{k} p^k (1-p)^{\ell+1} P(N = k + \ell + 1) \end{cases}$$

On termine cette question en remarquant que : $(k+1)\dbinom{k+\ell+1}{k+1} = (\ell+1)\dbinom{k+\ell+1}{k}$.

b) On prend $\ell = 0$ dans la relation précédente. Il vient :

$$p_{k+1} = \frac{1}{k+1} \frac{pq_1}{(1-p)q_0} p_k = \alpha \frac{p_k}{k+1}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $p_k = \alpha^k \dfrac{p_0}{k!}$ avec $\alpha = \dfrac{pq_1}{(1-p)q_0}$.

Or, $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \Rightarrow p_0 = e^{-\alpha}$. Ainsi X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$.

De façon symétrique, en prenant $k = 0$ dans la relation, il vient :

$$P(Y = \ell + 1) = \frac{p_1(1-p)}{p_0 p} \frac{P(Y = \ell)}{\ell + 1}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $\beta = \dfrac{p_1(1-p)}{p_0 p}$, on a : $q_\ell = \beta^\ell \dfrac{q_0}{\ell!}$. Or, $1 = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} q_\ell \Rightarrow q_0 = e^{-\beta}$.

Ainsi Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\beta)$.

c) Par stabilité de la loi de Poisson pour deux variables indépendantes, N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha + \beta)$.

Exercice 3.03.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $p_n \in]0,1[$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points distincts du plan.

On construit une figure géométrique aléatoire admettant ces points pour sommets de la façon suivante :

pour i différent de j, on dessine une arête entre les points A_i et A_j avec la probabilité p_n et on ne dessine pas d'arête reliant A_i et A_j avec la probabilité $1 - p_n$.

L'objet de cet exercice est d'évaluer la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé, c'est-à-dire un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet par une arête.

On définit des variables aléatoires X_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$ par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \text{ est isolé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de X_1. En déduire l'espérance de S_n.

2. En déduire un majorant de la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p_n = c\,\dfrac{\ln n}{n}$ avec $c > 0$.

3. Dans cette question, on suppose que $c > 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 1$.

4. Dans cette question, on suppose que $c < 1$.

a) Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$P(Y = 0) \leqslant \frac{V(Y)}{E^2(Y)}$$

b) Calculer $E(X_i X_j)$ pour $i \neq j$ puis $E(S_n^2)$.

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$.

Solution :

1. Le point A_1 est isolé signifie qu'il n'y a aucune arête le liant aux $(n-1)$ autres points. Les liaisons étant indépendantes, $P(X_1 = 1) = (1-p_n)^{n-1}$. La variable aléatoire suit une loi de Bernoulli et $E(X_1) = (1-p_n)^{n-1}$.

2. La variable S_n représente le nombres de points isolés. On a $E(S_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.

Par l'inégalité de Markov : $P(S_n \neq 0) = P(S_n \geqslant 1) \leqslant E(S_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.

3. On a

$$\begin{aligned}(n-1)\ln(1-p_n) &= (n-1)\ln\left(1 - c\frac{\ln n}{n}\right) = -c\frac{n-1}{n}\ln n + \frac{c^2}{2}\frac{n-1}{n^2}\ln^2 n + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\\ &= -c\ln n + c\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi $(1-p_n)^{n-1} = \dfrac{1}{n^c}\exp\left(c\dfrac{\ln n}{n} + O\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)\right)$ et $E(S_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{c-1}}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \neq 0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 1$

4. a) Le fait que Y est à valeurs positives et l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff donnent

$$P(Y=0) = P(Y \leqslant 0) \leqslant P(Y \leqslant 0) + P(Y \geqslant 2E(Y)) = P(|Y - E(Y)| \geqslant E(Y)) \leqslant \frac{V(Y)}{E^2(Y)}$$

b) On a $E(X_iX_j) = P[(X_i = 1) \cap (X_j = 1)] = P[(X_i = 1)|(X_j = 1)]P(X_j = 1) = (1-p_n)^{n-1}(1-p_n)^{n-2} = (1-p_n)^{2n-3}$. Puis

$$E(S_n^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_{i\neq j} E(X_iX_j) = n(1-p_n)^{n-1} + (n^2-n)(1-p_n)^{2n-3} \underset{n\to\infty}{\sim} n(1-p_n)^{n-1}$$

car X_i^2 suit la loi de Bernoulli de même paramètre que X_i.
c) Le calcul effectué précédemment montre que $E(S_n) \sim n^{1-c} \to +\infty$. Et

$$\frac{V(S_n)}{E^2(S_n)} = \frac{E(S_n^2)}{E^2(S_n)} - 1 = \frac{n(1-p_n)^{n-1} + (n^2-n)(1-p_n)^{2n-3}}{n^2(1-p_n)^{2n-2}} - 1$$

Donc

$$P(S_n = 0) \leqslant \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{1-p_n} - 1 \sim \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{1 - c\frac{\ln n}{n}} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = 0$.

Exercice 3.04.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

1. a) Déterminer la fonction de répartition de X.

b) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

2. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, indépendantes et de même loi que X.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ et } T_n = Z_n - \ln(n).$$

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T.

b) Vérifier que T est à densité et donner une densité f_T de T.

3. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V admettant chacune f_T pour densité.

À l'aide du changement de variable $y = (1+e^{-x})e^t$, calculer une densité de la variable aléatoire $W = U - V$.

Solution :

1. a) On a donc, pour tout réel x,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

(changement de variable $u = e^{-t}$)

b) Au voisinage de $+\infty$, on a $xf(x) \sim xe^{-x}$. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente (c'est par exemple l'espérance d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1), et que la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est impaire, on en déduit que X possède une espérance et que $E(X) = 0$.

2. a) Soit x un réel. De manière classique :

$$P([T_n \leqslant x]) = P([\sup(X_1, \ldots, X_n) - \ln n \leqslant x]) = P([\sup(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x + \ln n])$$

$$= \left(\frac{1}{1+e^{-(x+\ln n)}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\dfrac{e^{-x}}{n}}\right)^n = e^{-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)}$$

Comme $\ln\left(1+\dfrac{e^{-x}}{n}\right) \sim e^{-x}$, une simple composition de limite donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = e^{-e^{-x}}$.

b) La fonction $x \longmapsto e^{-e^{-x}}$ vérifie bien les propriétés d'une fonction de répartition : croissante, limite en $-\infty$ égale à 0, limite en $+\infty$ égale à 1, continue à droite en tout point. De plus la fonction possède les propriétés d'une fonction de répartition d'une variable à densité : continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 presque partout.

Enfin pour tout x réel :

$$f_T(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$$

3. Une densité de $-V$ est $f_{-V}(x) = e^x e^{-e^x}$. En notant h une densité de $W = U - V$, comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x-t)f_{-V}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)}e^{-e^{-(x-t)}}e^t e^{-e^t}dt = e^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}e^{-e^t(1+e^{-x})}dt$$

Le changement de variable proposé, $y = (1+e^{-x})e^t$ est de classe C^1 et est bijectif. On a donc :

$$h(x) = e^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}y^2}{(1+e^{-x})^2} \times \frac{1}{y}dy = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\int_0^{+\infty} e^{-y}ydy = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

En conclusion, W suit la même loi que X.

Exercice 3.05.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Montrer que :

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n-k+1}(1-t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-t}dt$$

2. On pose : $S_{n-k} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}S_{n-k}$. Montrer que l'on a :

$$T_n = e^{-1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$$

3. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}dt$.

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $T_n = 1$.

Dans toute la suite, on note U_n une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ dont la loi est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P(U_n = k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

4. Vérifier que l'on définit ainsi une loi de probabilité.

Pour toute variable aléatoire T, on appelle *moment factoriel d'ordre* k, pour $k \in \mathbb{N}$, les réels suivants :

$$m_k(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ E(T(T-1)\cdots(T-k+1)) & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

5. a) Montrer que pour $k \geqslant n+1$, on a $m_k(U_n) = 0$.

b) Montrer que pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $m_k(U_n) = 1$.

6. On définit une suite $(Q_j)_{j \geqslant 0}$ de polynômes par :

$$Q_j(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ X(X-1)\cdots(X-j+1) & \text{si } j \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

b) En déduire une méthode de calcul des moments $E(U_n^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Solution :

1. La formule de Taylor reste intégral donne $e^{-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n-k+1}(1-t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-t} dt$.

2. Ainsi

$$\begin{aligned} T_n &= e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-k}(1-t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-t} dt \\ &= e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{e^{-t}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t-1)^{n-k} dt = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

3. Une intégration par parties donne $I_n = -e^{-1} + nI_{n-1}$. En divisant par $n!$, il vient

$$\frac{I_n}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$$

On somme ces égalités pour k de 0 à n. On obtient $\dfrac{I_n}{n!} - \dfrac{I_0}{0!} = -e^{-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, et

$$T_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - e^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1 \right) + I_0 = 1$$

4. Il reste à vérifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_n = k) \geqslant 0$, ce qui sera vérifié si pour tout $p \geqslant 0$, $u_p = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{j!} \geqslant 0$.

Pour cela on démontre que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes :

• $u_{2p+2} - u_{2p} = \dfrac{1}{(2p+2)!} - \dfrac{1}{(2p+1)!} < 0$

• $u_{2p+1} - u_{2p-1} = \dfrac{1}{(2p)!} - \dfrac{1}{(2p+1)!} > 0$

• $|u_{2p+1} - u_{2p}| \to 0$.

Elles convergent vers la même limite (e^{-1}). La suite (u_{2p+1}) étant la suite croissante, on a pour tout p, $u_p \geqslant u_1 = 0$.

5. a) La variable aléatoire U_n étant à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on a $U_n(U_n - 1)\cdots(U_n - n) = 0$ et $m_k(U_n) = 0$ si $k \geqslant n+1$.

b) La relation est vérifiée pour $k = 0$ par définition de $m_0(T)$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} m_k(U_n) &= \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\cdots(i-k+1)\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{i=k}^{n}\frac{1}{(i-k)!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n-k-i}\frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n-k} P(U_{n-k} = i) = 1 \end{aligned}$$

6. a) La suite (Q_n) est une suite de polynômes échelonnée en degrés et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(Q_k) = k$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et une base.

b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe $a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k}$ réels tels que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_{j,k} Q_j$.

Pour déterminer $E(U_n^k)$, il suffit de calculer ces réels. En effet, par linéarité de l'espérance

$$E(U_n^k) = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} m_k(U_n) = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k}$$

Exercice 3.06.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, où p est un réel de $]0, 1[$. On pose de plus $q = 1 - p$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On considère également une variable aléatoire N, à valeur dans $\mathbb{N}^*$, possédant une espérance et indépendante des variables aléatoires X_n.

Pour tout ω de Ω, on pose $S(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$ et *on admet* que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ est une variable aléatoire.

Enfin, on rappelle la formule suivante, que l'on pourra utiliser sans la justifier. Pour tous entiers naturels r et s tels que $r \leqslant s$, on a :

$$\sum_{j=r}^{s} \binom{j}{r} = \binom{s+1}{r+1}$$

1. Déterminer $S_n(\Omega)$. Montrer que l'on a :

$$\forall\, k \in S_n(\Omega), \quad P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

2. Compléter le script *Scilab* suivant pour que x contienne une simulation de la loi de S_3, où p est choisi par l'utilisateur :

```
p=input('entrer la valeur de p'),
t=find(rand(1,100)<p),
x=.......
```

3. a) Vérifier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance conditionnelle $E(S \,|\, [N = k])$ et donner sa valeur.

b) En déduire $E(S)$.

4. On suppose dans cette question que N suit la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de S.

Solution :

1. Comme on additionne des entiers naturels non nuls, on $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty [\![$.
On montre le résultat demandé par récurrence sur n :
• Pour $n = 1$, la formule proposée devient $P([S_1 = k]) = pq^{k-1}$. Comme $S_1 = X_1$, la formule est vraie pour $n = 1$.
• Supposons que, pour un certain entier naturel n non nul, on ait : $P([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ et considérons S_{n+1}. Soit k un entier supérieur ou égal à $n+1$ et considérons l'évènement $[S_{n+1} = k]$. Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, on peut écrire :

$$P([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} P([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k - j])$$

Comme les variables (X_k) sont indépendantes, le lemme des coalitions permet alors d'affirmer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
On a donc : $P([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} P([S_n = j]) \times P([X_{n+1} = k - j])$.
En remplaçant $P([S_n = j]]$ grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$P([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n} p q^{k-j-1} = p^{n+1} q^{k-(n+1)} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1}$$

$$= p^{n+1} q^{k-(n+1)} \sum_{j=n-1}^{k-2} \binom{j}{n-1} = p^{n+1} q^{j-(n+1)} \binom{k-1}{n}$$

2. Le vecteur `t` contient les coordonnées du vecteur `rand` qui correspondent à un succès. Il suffit donc de chercher la troisième coodonnée de v qui correspond à la réalisation du troisième succès. Le programme complété est donc :

```
p=input('entrer la valeur de p')
t=find(rand(1,100)<p)
x=t(3)
```

3. a) L'espérance conditionnelle $E(S/[N=k]$ existe si et seulement si la série de terme général $iP_{[N=k]}\big([S=i]\big)$ est absolument convergente. Or, en utilisant le lemme des coalitions, pour S_k et N indépendantes :

$$P_{[N=k]}\big([S=i]\big)=\frac{P\big([S_k=i]\cap[N=k]\big)}{P\big([N=k]}=\frac{P\big([S_k=i]\cap[N=k]\big)}{P\big([N=k]}=\frac{P\big([S_k=i]\big)\times P\big([N=k]\big)}{P\big([N=k]}$$

Il reste donc : $iP_{[N=k]}\big([S=i]\big)=iP\big([S_k=i]\big)$ qui est le terme général de série convergente $E(S_k)=\frac{k}{p}$.

b) On applique alors la formule de l'espérance totale, en vérifiant au passage que toutes les séries considérées convergent :

$$\begin{aligned}E(S)&=\sum_{n=0}^{+\infty}E(S/[N=k])P([N=k])=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k}{q}P([N=k])\\&=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}kP([N=k])=\frac{1}{p}E(N)=E(X_1)E(N)\end{aligned}$$

4. On a $S(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour déterminer la loi de S, on applique la formule des probabilités totales :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P(S=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P([S=k]\cap[N=n])$$

D'une part : $P([S=k]\cap[N=n])=P([S_n=k]\cap[N=n])$ et comme, d'après le lemme des coalitions, S_k et N sont indépendantes, on obtient

$$P([S=k]\cap[N=n])=P(S_n=k)\times P(N=n)$$

D'autre part : Comme $S_n(\Omega)=[n,+\infty[$, on a $P(S_n=k)=0$ si $k<n$.

Il reste donc : $P(S=k)=\displaystyle\sum_{n=1}^{k}P(S_n=k)\times P(N=n)$.

On applique la formule précédente, en remplaçant $P([N=n])$ par pq^{n-1} et $P([S_n=k])$ par la valeur trouvée précédemment.

On a donc $P([S=k])=\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}pq^{n-1}=q^{k-1}p^2\sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1}p^{n-1}$.

On effectue un changement d'indice : $P([S=k])=q^{k-1}p^2\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n}p^n$.

On reconnaît la formule du binôme de Newton, d'où

$$P([S=k])=q^{k-1}p^2(1+p)^{k-1}$$

On a $q = 1 - p$ et donc $q^{k-1}(1+p)^{k-1} = (1-p)^{k-1}(1+p)^{k-1} = (1-q^2)^{k-1}$.

Finalement : $P([S = k]) = (1-p^2)^{k-1}p^2$ et S suit une loi géométrique de paramètre p^2.

Exercice 3.07.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $p_i \in]0,1[$.
Autrement dit, $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ P(X_i = 1) = p_i$ et $P(X_i = 0) = 1 - p_i$.

On note $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire représentant le nombre total de succès et $\mu = E(X)$.

1. Soit un réel $\alpha > 0$.

a) Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad 1 + x \leqslant e^x$.

b) En déduire : $E(e^{\alpha(X_i - p_i)}) \leqslant \exp\big(p_i\, e^{\alpha}\big)$.

c) En déduire : $E(e^{\alpha(X-\mu)}) \leqslant \exp\big(\mu e^{\alpha}\big)$.

d) Montrer : $\forall\, r \in \mathbb{R},\ P([X - \mu \geqslant r]) \leqslant \exp\big(\mu e^{\alpha} - \alpha r\big)$.

e) En déduire :

$$\forall\, r > \mu,\ P([X - \mu \geqslant r]) \leqslant \left(\frac{\mu e}{r}\right)^r$$

2. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $p_i = p \in]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.

a) Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a $P([X \geqslant k]) \leqslant \dbinom{n}{k} p^k$.

b) En étudiant la variable aléatoire $Y = n - X$, en déduire, pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P([X \leqslant k]) \leqslant \binom{n}{k} q^{n-k}$$

Solution :

1. Soit $\alpha > 0$.
a) La fonction $x \mapsto e^x$ étant convexe, elle est au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1, la droite $y = x + 1$.
b) Il vient

$$\begin{aligned} E(e^{\alpha(X_i - p_i)}) &= p_i e^{\alpha(1-p_i)} + q_i e^{\alpha(0-p_i)} = p_i e^{\alpha q_i} + q_i e^{-\alpha p_i} \\ &\leqslant p_i e^{\alpha} + 1 \quad (\text{car } \alpha > 0, q_i \leqslant 1, e^{-\alpha p_i} \leqslant 1) \\ &\leqslant e^{p_i e^{\alpha}} \quad (\text{car pour tout } x,\ 1 + x \leqslant e^x) \end{aligned}$$

Donc $E(e^{\alpha(X_i-p_i)})\leqslant e^{p_ie^\alpha}$.

c) On a : $\mu=E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i$, et

$$\begin{aligned}E(e^{\alpha(X-\mu)})&=\prod_{i=1}^{n}E(e^{\alpha(X_i-p_i)})\quad\text{(indépendance mutuelle des } X_i \text{ et donc des } e^{\alpha(X_i-p_i)})\\&\leqslant\prod_{i=1}^{n}e^{p_ie^\alpha}\quad\text{(d'après la question précédente)}\\&=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}p_ie^\alpha\right)=e^{\mu e^\alpha}\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}P[X-\mu\geqslant r]&=P[e^{\alpha(X-\mu)}\geqslant e^{\alpha r}]\quad\text{(car } \alpha>0 \text{ et } x\mapsto e^x \text{ est croissante)}\\&\leqslant E(e^{\alpha(X-\mu)})e^{-\alpha r}\text{(inégalité de Markov pour } e^{\alpha(X-\mu)}\geqslant 0)\\&\leqslant e^{\mu e^\alpha-\alpha r}\text{(question précédente)}\end{aligned}$$

e) On étudie la fonction : $\alpha\mapsto e^{\mu e^\alpha-\alpha r}$. Elle admet un minimum pour $\alpha=\ln(\dfrac{r}{\mu})>0$, et

$$\begin{aligned}P[X-\mu\geqslant r]\leqslant e^{\mu e^\alpha-\alpha r}&\leqslant e^{\mu e^{\ln(\frac{r}{\mu})}-\ln(\frac{r}{\mu})r}\\&\leqslant e^{(r-r\ln(\frac{r}{\mu}))}=\left(\frac{\mu e}{r}\right)^r\end{aligned}$$

2. On sait que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $p_i=p$.

a) Pour $0\leqslant k\leqslant n$, $[X\geqslant k]=\bigcup\limits_{0\leqslant i_1,i_2,\cdots i_k\leqslant n}\bigcap\limits_{j=1}^{k}[X_{i_j}=1]$ d'où

$$P[X\geqslant k]\leqslant\sum_{0\leqslant i_1,i_2,\cdots i_k\leqslant n}P\left(\bigcap_{j=1}^{k}[X_{i_j}=1]\right)$$

Or $P(\cup_iA_i)\leqslant\sum_iP(A_i)$. Donc $P[X\geqslant k]\leqslant\text{Card}\{(i_1,i_2,\cdots i_k)\in[|0,n|]\}.p^k$. Les événements $([X_{i_j}=1])$ étant indépendants il vient

$$P[X\geqslant k]\leqslant\binom{n}{k}p^k$$

b) La variable aléatoire $Y=n-X$ suit une loi binomiale de paramètre $q=1-p$, on a :

$$P[X\leqslant k]=P[Y\geqslant n-k]\leqslant\binom{n}{n-k}q^{n-k}=\binom{n}{k}q^{n-k}$$

Exercice 3.08.

On rappelle les résultats suivants :

(i) Soit I un ensemble dénombrable infini indexé par $\mathbb{N}$ sous la forme $I = \{\phi(n)\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ où ϕ est une bijection

de $\mathbb{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\phi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation ϕ, et

pourra également être notée $\sum_{i \in I} u_i$. On dit alors que la série $\sum_{i \in I} u_i$ converge absolument.

(ii) Dans ce cas, si $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ (union disjointe) avec J un ensemble dénombrable et I_j des ensembles dénombrables pour tout j, alors pour tout j, $\sum_{k \in I_j} u_k$ converge absolument, et

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left[\sum_{k \in I_j} u_k \right]$$

(iii) Si I et J sont des ensembles dénombrables et si $\sum_{i \in I} u_i$ et $\sum_{j \in J} v_j$ sont absolument convergentes, alors $\sum_{(i,j) \in I \times J} \big(u_i\, v_j\big)$ aussi, et

$$\left(\sum_{i \in I} u_i \right) \left(\sum_{j \in J} v_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \big(u_i\, v_j\big)$$

On prendra soin de justifier clairement, à l'aide de ces résultats, les calculs de sommes de séries qu'on sera amené à faire ci-dessous.

Soit p et q deux réels de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Vérifier que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P\big[(i,j)\big] = p\, q\, (1-p)^i\, (1-q)^j$ définit bien une probabilité P sur $\mathbb{N}^2$.

2.a) Déterminer les lois des variables aléatoires discrètes X et Y définies sur $\big(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), P\big)$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad X(i,j) = i \quad \text{et} \quad Y(i,j) = j$$

et les relier à des lois connues.

b) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.

3. Soit Z la variable aléatoire discrète définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad Z(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont de parités différentes} \end{cases} .$$

Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

4. Soit D l'ensemble défini par $D = \big\{(i,i)\,,\, i \in \mathbb{N}\big\}$. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{(i,i)\in D} Z(i,i)\,P(i,i)$ est absolument convergente et calculer sa somme.

Solution :

1. On a $P\big[(i,j)\big] \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_i p\,(1-p)^i$ et $\displaystyle\sum_j q\,(1-q)^j$ sont des séries géométriques absolument convergentes, donc d'après (iii), $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} P\big[(i,j)\big]$ est absolument convergente et

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} P\big[(i,j)\big] = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p\,(1-p)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} q\,(1-q)^j\right) = 1$$

2. a) Calculons les lois marginales : $\{i\}\times\mathbb{N}\subset\mathbb{N}^2$, donc la série $\displaystyle\sum_j P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$ est absolument convergente d'après (ii) et

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = p\,(1-p)^i \sum_{j=0}^{+\infty} q\,(1-q)^j = p\,(1-p)^i \quad \text{donc} \quad X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Le résultat et la démonstration sont analogues pour Y.

b) On a $D\subset\mathbb{N}^2$ donc la série $\displaystyle\sum_i P\big([X=i]\cap[Y=i]\big)$ est absolument convergente d'après (ii) et

$$P(X=Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P\big[(i,i)\big] = p\,q\sum_{i=0}^{+\infty}\big[(1-p)\,(1-q)\big]^i = \frac{p\,q}{p+q-pq}$$

On a la partition suivante :

$$\Big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2\,,\; i>j\Big\} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}}\big(\llbracket j+1,+\infty\llbracket\times\{j\}\big)$$

donc d'après (ii),

$$P(X>Y) = p\,q\sum_{j=0}^{+\infty}\left[(1-q)^j\sum_{i=j+1}^{+\infty}(1-p)^i\right] = p\,q\sum_{j=0}^{+\infty}\left[(1-q)^j\,\frac{(1-p)^{j+1}}{p}\right] = \frac{q\,(1-p)}{p+q-pq}$$

3. On a $|Z|\leqslant 1$. La variable aléatoire Z est bornée et donc admet une espérance.

On a : $(2\mathbb{N})^2\subset\mathbb{N}^2$ et d'après (iii), toutes les séries étant absolument convergentes,

$$\sum_{(2\mathbb{N})^2} P(i,j) = \sum_{\mathbb{N}^2}\Big[p\,q\,(1-p)^{2i}\,(1-q)^{2j}\Big] = \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\big[p\,(1-p)^{2i}\big]\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\big[q\,(1-q)^{2j}\big]\right)$$

$$= \frac{1}{(2-p)\,(2-q)}$$

De même, $(2\mathbb{N}+1)^2 \subset \mathbb{N}^2$ d'où la convergence absolue et

$$\sum_{(2\mathbb{N}+1)^2} P(i,j) = \sum_{\mathbb{N}^2} \Big[p\,q\,(1-p)^{2i+1}\,(1-q)^{2j+1}\Big] = (1-p)\,(1-q) \sum_{(2\mathbb{N})^2} P(i,j)$$
$$= \frac{(1-p)\,(1-q)}{(2-p)\,(2-q)}$$

Enfin, la partition

$$\mathbb{N}^2 = \Big[(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N})\Big] \sqcup \Big[(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N}+1)\Big] \sqcup \Big[(2\mathbb{N}+1)\times(2\mathbb{N})\Big] \sqcup \Big[(2\mathbb{N})\times(2\mathbb{N}+1)\Big]$$

donne d'après (ii),

$$E(Z) = \sum_{(2\mathbb{N})^2} P(i,j) - \sum_{(2\mathbb{N}+1)^2} P(i,j) + 0 + 0 = \frac{p+q-pq}{(2-p)\,(2-q)}$$

4. Enfin, la partition $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$, donne, d'après (ii),

$$\sum_{(i,j)\in D} \big[Z(i,j)\,P(i,j)\big] = \sum_{2\mathbb{N}} P(i,i) - \sum_{2\mathbb{N}+1} P(i,i)$$
$$= \Big[1-(1-p)\,(1-q)\Big] \sum_{i=0}^{+\infty} \big[p\,q\,(1-p)^{2i}\,(1-q)^{2i}\big]$$
$$= \Big[1-(1-p)\,(1-q)\Big] \frac{p\,q}{1-(1-p)^2\,(1-q)^2} = \frac{p\,q}{1+(1-p)\,(1-q)}$$

Exercice 3.09.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},P\big)$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :

$$P(X_1 = 1) = p \text{ et } P(X_1 = -1) = 1-p\,.$$

On suppose que $p \in]0,1[$ et que $p > 1-p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $u_n = E(|S_n|)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $E(S_n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $P(S_n < 0) \leqslant E(\exp(-tS_n))$.

3.a) Déterminer pour tout $t \geqslant 0$, $E(\exp(-tS_n))$.

b) En déduire l'existence d'un réel $\mu \in]0,1[$, que l'on exprimera en fonction de p, pour lequel on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n < 0) \leqslant \mu^n$$

4. a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(u_n - E(S_n)\big) = 0$.

b) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On suppose dans cette question que $p < 1 - p$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Par linéarité, $E(S_n) = nE(X_1) = (2p-1)n$.

2. Soit $t \geqslant 0$. Comme $(S_n < 0) \subset (\exp(-tS_n) \geqslant 1)$, on a $P(S_n < 0) \leqslant P(\exp(-tS_n) \geqslant 1)$.
En utilisant l'inégalité de Markov, on a donc $P(S_n < 0) \leqslant E(\exp(-tS_n))$.

3. a) Par indépendance des $(X_n)_{n\geqslant 0}$, $E(\exp(-tS_n)) = \big(E(\exp(-tX_1))\big)^n = \big(pe^{-t} + (1-p)e^t\big)^n$
b) Au voisinage de 0_+, on a

$$pe^{-t}+(1-p)e^t-1 = p(1+(-t)+o(t))+(1-p)(1+t+o(t))-1 = -(2p-1)t+o(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -(2p-1)t < 0$$

Il existe $t_0 > 0$, tel que $\mu = pe^{-t_0} + (1-p)e^{t_0} \in [0, 1[$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n < 0) \leqslant \mu^n$.

4. a) On remarque tout d'abord que S_n est à valeur dans $[\![-n, n]\!]$. Ainsi, on a

$$0 \leqslant u_n - E(S_n) = -\sum_{k=-n}^{-1} 2kP(S_n = k) \leqslant 2nP(S_n < 0)$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - E(S_n) = 0$.

b) À l'aide de la question 1, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} n(2p-1)$.

5. On trouve le même équivalent, soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1-2p)n$ en appliquant les questions précédentes à $-S_n$.

Exercice 3.10.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
Montrer que $\sup\limits_{k\geqslant 0} \big(P(X = k)\big)$ est atteint pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

2. On admet la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit α un réel strictement positif différent de 1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)e^{-n\alpha}\dfrac{(n\alpha)^n}{n!}$.

Dans la suite de l'exercice, α désigne un réel strictement positif et pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n désigne une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\alpha)$.

On pose $u_n = P(X_n \leqslant n)$.

3. On suppose $\alpha > 1$. En utilisant les questions 1 et 2, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. On suppose $\alpha < 1$.

a) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{n\alpha}^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.

b) Montrer que $P(X_n > n) = \dfrac{(n\alpha)^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-n\alpha t}dt$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution :

1. On étudie le rapport : $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \dfrac{\lambda}{k+1}$.

La suite $(P(X=k))_{k\geqslant 0}$ est donc décroissante pour $k+1 \geqslant \lambda$, et croissante pour $k+1 \leqslant \lambda$. Comme k est entier, elle atteint son maximum en $\lfloor \lambda \rfloor$.

2. On utilise l'aide proposée. Pour n grand :

$$(n+1)e^{-n\alpha}\frac{(n\alpha)^n}{n!} \sim (n+1)e^{-n\alpha}n^n\alpha^n \times \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}e^{n(1-\alpha+\ln\alpha)}$$

La concavité de la fonction ln ou une étude rapide de fonction, montre que pour $\alpha > 0$, $1-\alpha+\ln\alpha \leqslant 0$. Ainsi la limite demandée est nulle si $\alpha \neq 1$.

3. On a $u_n = e^{-n\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\alpha)^k}{k!}$. Comme $\alpha > 1$, la suite $(P(X=k))_k$ est croissante sur $[\![0,n]\!]$. Donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant (n+1)e^{-n\alpha}\frac{(n\alpha)^n}{n!} \longrightarrow 0$$

4. a) Une intégration par parties donne

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_{n\alpha}^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \frac{(n\alpha)^n e^{-n\alpha}}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{n\alpha}^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

soit $I_n - I_{n-1} = \dfrac{(n\alpha)^n e^{-n\alpha}}{n!}$. Ainsi

$$I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k\alpha)^k e^{-k\alpha}}{k!}$$

Il reste à rajouter I_0 aux deux membres de cette équation pour obtenir le résultat demandé.

b) On sait que $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = 1$ (fonction Γ). Donc

$$P(X_n > n) = 1 - P(X \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_0^{n\alpha} t^n e^{-t}dt = \frac{(n\alpha)^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n e^{-n\alpha t}dt$$

en utilisant le changement de variable linéaire $t = n\alpha u$.

c) Une étude de $h : t \to t^n e^{-n\alpha t}$, montre que h' s'annule en $t = 1/\alpha > 1$, et que la fonction h est croissante sur $[0, 1]$. Donc $h(t) \leqslant e^{-n\alpha}$ pour $t \in [0, 1]$.

Ainsi

$$0 \leqslant P(X_n > n) = \frac{(n\alpha)^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n e^{-n\alpha t} dt \leqslant \frac{(n\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-n\alpha} \longrightarrow 0$$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5. Pour $\alpha = 1$, on applique le théorème central limite. Ainsi

$$P(X_n \leqslant n) = P\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} \leqslant 0\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}$$

Exercice 3.11.

Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher.

La proportion de boules rouges est $p \in]0, 1[$ et celle de boules noires est $q = 1 - p$.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à obtention d'une boule rouge.

Un maximum de n tirages, avec $n \geqslant 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n-ième tirage.

On note G_n la variable aléatoire égale au rang du tirage d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des n tirages.

1. Dans cette question, n est un entier fixé.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_n.

b) En utilisant la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a : $E(G_n) = \dfrac{1 - q^n(1 + np)}{p}$.

2. a) Déterminer la limite de $(E(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (G_n).

3. Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages.

On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la $k$ème boule tirée ($k \leqslant n$), le joueur gagne $(20 - k)$ euros. On note B_n le gain aléatoire pour une partie.

a) Exprimer B_n en fonction de G_n, puis déterminer son espérance.

b) On admet que pour tout réel $x \in]0, 1[$ on a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\ln(1 - x)} < 1$.

Quelle valeur de n doit-on choisir afin de maximiser le gain d'une partie ?

Solution :

1. a) On a ici la loi géométrique tronquée :

$$P(G_n = k) = \begin{cases} q^{k-1}p & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ q^n & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

b) On a alors $E(G_n) = p\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$. Soit la fonction $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$. On dérive

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

D'où :

$$E(G_n) = pf'(q) = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1-q^n(1+np)}{p}$$

2. a) On a $n = o(r^n)$ pour $r > 1$, en particulier pour $r = \dfrac{1}{q} > 1$ d'où : $\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} E(G_n) = \dfrac{1}{p}$ qui est l'espérance d'une loi géométrique.

b) Soit un entier $k \geqslant 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} P[G_n = k] = q^{k-1}p$ (dès que $n > k$) d'où la convergence en loi vers la loi géométrique.

3. a) On a $B_n = (5 - G_n \cdot \mathbf{1}_{G_n \neq 0}) - 15 \cdot \mathbf{1}_{G_n = 0}$, ce qui est une variable aléatoire en tant que fonction de la variable aléatoire discrète G_n. Le calcul donne

$$\begin{aligned} E(B_n) &= \sum_{k=1}^{n}(5-k)P[G_n = k] - 15P[G_n = 0] = 5(1 - P[G_n = 0]) - E(G_n) - 15P[G_n = 0] \\ &= 5 - E(G_n) - 20P[G_n = 0] \\ &= 5 - \frac{1-q^n(1+np)}{p} - 20q^n \end{aligned}$$

c) Soit g la fonction : $g(x) = 5 - \dfrac{1-q^x(1+xp)}{p} - 20q^x = 5 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{q^x}{p} + xq^x - 20q^x$.

Alors $g'(x) = \left[\dfrac{\ln(q)}{p}) + 1 + x\ln(q) - 20\ln(q)\right] q^x$, et

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{\ln(q)} + x - 20 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 20 - \frac{1}{p} - \frac{1}{\ln(q)}$$

Ainsi le maximum est obtenu pour $x = 20 - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\ln(q)}$ or on a vu : $0,5 < \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\ln(q)} < 1 \Rightarrow$ $19 < x < 19.5$.

Finalement $n = 19$ est la valeur entière la plus proche du maximum.

Exercice 3.12.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit a un réel. Soit X une variable aléatoire discrète réelle et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi que X.

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que $P(X \geqslant a) = 0$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n \geqslant na) = 0$.

2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

a) Montrer que les variables aléatoires $(S_{n+m} - S_m)$ et S_n ont même loi.

b) Soit b un nombre réel. Montrer que $P\big(S_{m+n} \geqslant (n+m)b\big) \geqslant P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb)$.

On admet le résultat suivant :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+m} \geqslant u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = s$.

3. On suppose dans cette question que $P(X \geqslant a) > 0$.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln\left(P(S_n \geqslant na)\right)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite $\gamma_a \leqslant 0$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(S_n \geqslant na) \leqslant \exp\left(n\gamma_a\right)$$

Solution :

1. Si tous les X_i sont supérieurs à a, alors S_n est supérieur à na.

Ainsi, $(X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a) \subset (S_n \geqslant na)$, donc $P((X_1 \geqslant a) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant a)) \leqslant P(S_n \geqslant na)$, et par indépendance mutuelle des $X_i \sim X$, on a donc $P(X_1 \geqslant a)^n \leqslant P(S_n \geqslant na)$.

En conséquence, si $P(S_n \geqslant na) = 0$, alors $P(X_1 \geqslant a)^n = 0$, et donc $P(X_1 \geqslant a) = 0$.

Réciproquement, on a $(S_n \geqslant na) \subset (X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)$, d'où :

$$P(S_n \geqslant na) \leqslant P((X_1 \geqslant a) \cup \cdots \cup (X_n \geqslant a)) \leqslant P(X_1 \geqslant a) + \cdots + P(X_n \geqslant a) = nP(X \geqslant a)$$

Ainsi, si $P(X_1 \geqslant a) = 0$, alors $P(S_n \geqslant na) = 0$.

2. a) On pose $X(\Omega) = \{x_n, n \in J \subset \mathbb{N}\}$ et $Y = \{x_1 + x_2 + ... + x_n, (x_1, x_2, ..., x_n) \in X(\Omega)^n\}$.

L'ensemble Y est dénombrable car $X(\Omega)^n$ est dénombrable. Soit $y \in Y$.
On pose $\mathcal{C} = \{(x_1, ..., x_n) \in X(\Omega)^n, x_1 + ... + x_n = y\}$.

$$\begin{aligned} P(S_{n+m} - S_m = y) &= P(X_{m+1} + ... + X_{m+n} = y) \\ &= \sum_{\mathcal{C}} P(X_{m+1} = x_1, X_{m+2} = x_2, ..., X_{m+n-1} = x_{n-1}, X_{m+n} = x_n) \\ &= \sum_{\mathcal{C}} P(X_{m+1} = x_1)...P(X_{m+n} = x_n) \text{ (avec l'indépendance)} \\ &= \sum_{\mathcal{C}} P(X_1 = x_1)...P(X_n = x_n) = P(X_1 + ... + X_n = y) \end{aligned}$$

Ainsi $S_{m+n} - S_m$ et S_n ont la même loi.
b) On a

$$\begin{aligned} P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) &= P(S_{m+n} - S_m \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) \\ &= P\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) P\left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right) \end{aligned}$$

Par le lemme des coalitions, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k$ sont indépendantes, donc

$$P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) = P\left(\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right)\right)$$

Comme $\displaystyle\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant nb\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \geqslant mb\right) \subset \left(\sum_{k=1}^{m+n} X_k \geqslant nb + mb\right)$, on peut conclure que,

$$P(S_n \geqslant nb)P(S_m \geqslant mb) \leqslant P(S_{n+m} \geqslant (n+m)b)$$

3. D'après la question 2 et l'hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \geqslant na) > 0$; par suite, son logarithme est bien défini et donc la suite aussi.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(P(S_n \geqslant nb))$.
La suite $(u_n)_{n \geqslant \mathbb{N}^*}$ vérifie l'inégalité du début de l'exercice, par la question 2.b.
Ainsi, on pose $\gamma_a = \sup\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, qui existe, puisque $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majorée par 0.
On conclut avec la question admise. Donc, la suite $\left(\dfrac{\ln(P(S_n \geqslant na))}{n}\right)$ converge vers $\gamma_a \leqslant 0$.
Enfin par croissance de l'exponentielle et par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n \geqslant na) \leqslant \exp(n\gamma_a)$$

Démonstration de la question admise

1. Une récurrence évidente sur $q \in \mathbb{N}^*$ montre que $u_{mq} \geqslant qu_m$. On en déduit que si $n = mq + r$, avec $(q, m, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors $u_n \geqslant u_{mq} + u_r \geqslant qu_m + u_r$.

2. Supposons $n \geqslant m$. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $n = mq + r$. On pose $M = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant m-1} |u_k|$.
Selon la question 1, on a, à l'aide d'une inégalité triangulaire,

$$\frac{u_m}{m} - \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_m}{m} - \frac{qu_m + u_r}{n} = \frac{ru_m - mu_r}{mn} \leqslant \frac{r|u_m| + m|u_r|}{mn} \leqslant \frac{|u_m| + M}{n}$$

Le majorant obtenu tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il est donc inférieur ou égal à ε pour n supérieur à un entier N convenable, que l'on peut supposer supérieur ou égal à m. Finalement, $\dfrac{u_m}{m} - \dfrac{u_n}{n} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N$.

3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $s = \sup\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\dfrac{u_{m_0}}{m_0} \geqslant s - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour ce m_0, il existe $N > m_0$ tel que pour tout $n > N$, $\dfrac{u_n}{n} \geqslant \dfrac{u_{m_0}}{m_0} - \dfrac{\varepsilon}{2} \geqslant s - \varepsilon$. Puisque pour tout $n > N$, $\dfrac{u_n}{n} \leqslant s$, on a donc pour tout $n > N$, $s - \varepsilon \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant s$. On en déduit le résultat, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = s$.

Exercice 3.13.

Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On propose l'expérience suivante pour « rééquilibrer » la pièce.

L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives.

Chaque partie consiste à lancer la pièce *deux fois de suite.*

• Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat (2 Pile ou 2 Face), on refait une partie ;

• Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.

L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que l'expérience se termine.

1. Écrire un script *Scilab* qui simule la variable aléatoire T.

2. Donner l'ensemble des valeurs prises par T. En déduire $P(T = 2k + 1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. a) Calculer $P(T = 2k)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (on pourra s'intéresser à l'événement $A = [X_1 = X_2]$, où X_1, X_2 sont les deux variables aléatoires donnant les résultats des deux premiers lancers).
b) En déduire que l'expérience se termine presque sûrement.
c) Calculer l'espérance de T.

4. Soit R la variable aléatoire donnant le résultat de l'expérience. Donner la loi de R.

Solution :

1. Le processus proposé se déroule tant que deux lancers consécutifs de la pièce donnent le même résultat. Il s'arrête sinon. Voici une proposition de script :

```
u=rand(), v= rand()
n=2
while (u<=p and v<=p) or (u>p and v>p)
      u=rand() ; v=rand()
      n=n+2
      end
disp(n)
```

2. L'ensemble des valeurs prises pris par T est $2\mathbb{N}^*$. En effet on effectue à chaque fois un couple de deux lancers. Donc $P(T = 2k + 1) = 0$.

3. a) Soit X la variable aléatoire donnant le résultat d'un lancer de la pièce :

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = q$$

Soit $A = [X_1 = X_2]$ et $B = [X_1 \neq X_2]$. On a

$P(A) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = p^2 + q^2$ et $P(B) = 1 - P(A) = 2pq$

Ainsi

$P(T = 2k) = P([X_1 = X_2]\cap[X_3 = X_4]\cap\ldots\cap[X_{2k-3} = X_{2k-2}]\cap[X_{2k-1} \neq X_{2k}]) = (p^2+q^2)^{k-1}2pq$

b) Évaluons

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = 2k) = 2pq\sum_{k=1}^{+\infty}(p^2 + q^2)^{k-1} = \frac{2pq}{1 - p^2 - q^2} = 1$$

Ainsi le processus s'arrête presque sûrement.

c) La variable aléatoire Y définie par $P(Y = k) = (p^2 + q^2)^{k-1}2pq$ suit la loi géométrique de paramètre $2pq$ et $E(T) = 2E(Y) = \dfrac{1}{pq}$.

4. Pour calculer la loi de R, on utilise le système complet d'événements $([T = 2k])_{k\geqslant 1}$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(R = \text{ Pile}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = X_2] \cap [X_3 = X_4] \cap \ldots \cap [X_{2k-3} = X_{2k-2}] \\ &\qquad \cap [X_{2k-1} \neq X_{2k}] \cap [X_{2k} = \text{ Pile}]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}(p^2 + q^2)^{k-1}pq = \frac{pq}{1 - p^2 - q^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et donc $P(R = \text{ Face}) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.14.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$P[X_k = -1] = P[X_k = 1] = \frac{1}{2}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer les moments centrés d'ordre $k \geqslant 1$ de chaque variable aléatoire X_i, puis l'espérance et la variance de S_n.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$.

Dans la suite, on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \text{ et } \mathcal{Z}_n = \{\omega \in \Omega, \exists\, k \geqslant n,\, U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\}$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$P\left[U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}$$

4. Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \geqslant 1$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

5. Soit $\mathcal{Z} = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \mathcal{Z}_n$, montrer que l'on a :

$$P(\mathcal{Z}) = 0 \text{ et } \forall\, \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Solution :

1. On obtient $E(X_i^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

On a $E(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 0$.

Par indépendance mutuelle des X_i, $V(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(X_i)^2 = n$.

2. On montre $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
- vérifié pour $n = 1$: $E(S_1^4) = E(X_1^4) = 1$.
- $S_{n+1}^4 = (S_n + X_{n+1})^4 = S_n^4 + 4S_n^3 X_{n+1} + 6S_n^2 X_{n+1}^2 + 4S_n X_{n+1}^3 + X_{n+1}^4$. Ainsi, comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes et $E(X_{n+1}) = E(X_{n+1}^3) = 0$, $E(X_{n+1}^2) = E(X_{n+1}^4) = 1$, il vient :

$$E(S_{n+1}^4) = E(S_n^4) + 0 + 6E(S_n^2).1 + 0 + 1 = E(S_n^4) + 6V(S_n) + 1$$

On termine avec l'hypothèse de récurrence $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ on obtient le résultat attendu.

3. Soit $n \geqslant 1$. La variable aléatoire $U_n = \left(\dfrac{S_n}{n}\right)^4$ est positive et admet une espérance (car cette variable est finie). On applique l'inégalité de Markov pour $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Il vient

$$P[U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}] \leqslant E(U_n).\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{n^4}E(S_n^4) = \frac{(3n-2)\sqrt{n}}{n^3} \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}$$

4. Soit $n \geqslant 1$, on a : $\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k\geqslant n} [U_k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}] \in \mathcal{A}$ car U_k est une variable aléatoire et $\mathcal{A}$ est stable pour la réunion dénombrable.

On a $0 \leqslant P(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k\geqslant n} P[U_k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}] \leqslant \sum_{k\geqslant n} \dfrac{3}{k^{3/2}}$. Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ comme limite du reste d'une série convergente.
D'où, par théorème d'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

5. On observe que $\mathcal{Z}_{n+1} \subset \mathcal{Z}_n$ d'où : $P(\mathcal{Z}) = P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} \mathcal{Z}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

Ainsi $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$ entraîne $\omega \in \overline{\mathcal{Z}}$ ce qui entraîne $\omega \in \bigcup_{n\geqslant 1} \overline{\mathcal{Z}_n}$. Donc il existe $n_0 \geqslant 1, \omega \in \overline{\mathcal{Z}_{n_0}}$ ce qui entraîne qu'il existe $n_0 \geqslant 1, \forall k \geqslant n_0, U_k(\omega) < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
Ainsi

$$\lim_{k\to+\infty} U_k(\omega) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{S_k(\omega)}{k}\right)^4 = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Exercice 3.15.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [0,1[\\ -\dfrac{1}{6}(x-4) & \text{si } x \in [1,4] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f et montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui admet f comme densité. On note F sa fonction de répartition.

2. Calculer l'espérance de X.

3. Soit W et Z deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que W suit la loi normale $\mathcal{N}(3,1)$ et que Z suit la loi gamma $\gamma(3)$.
On suppose que X, W et Z sont mutuellement indépendantes.
Soit T la variable aléatoire telle que : $T = \dfrac{XW}{Z}$.
Justifier que T est définie presque sûrement. Calculer son espérance et justifier qu'elle admet une variance.

4. Montrer que F est bijective de $[0,4]$ sur $[0,1]$ et que sa réciproque G est donnée par :

$$G(y) = \begin{cases} \sqrt{4y} & \text{si } y \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right[\\ 4 - \sqrt{12 - 12y} & \text{si } y \in \left[\dfrac{1}{4}, 1\right] \end{cases} .$$

5. Soit la variable aléatoire $Y = F(X)$. Déterminer la loi de Y. En déduire le rôle de la fonction *Scilab* suivante :

```
function x=mystere()
  y=rand() ;
  if y<1/4
   then x=sqrt(4*y) ;
   else x=4-sqrt(12-12*y),
  end
endfunction
```

6. On donne la fonction Scilab suivante :

```
function E=mysterebis(n)
E=0 ;
for i=[1..n],
 x=mystere() ;
 E=E+x
end
E=E/n ;
endfunction
```

Que dire de la valeur qui sera renvoyée par l'instruction `mysterebis(1000)` ?

Solution :

1. La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}$, et son intégrale vaut 1 (c'est l'aire d'un triangle dont la base est de longueur 4 et dont la hauteur est de longueur $\dfrac{1}{2}$). Donc f est bien une densité.

2. Par le théorème de transfert, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^4 -x\frac{1}{6}(x-4)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}.$$

3. La variable T est définie presque sûrement car $P(Z=0)=0$, puisque Z est à densité. Par indépendance, et le théorème de transfert

$$E(T)=E(X)\,E(W)\,E\left(\frac{1}{Z}\right)=\frac{5}{3}\times 3\times\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{x^2e^{-x}}{\Gamma(3)}\ \mathrm{d}x=5\times\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ \mathrm{d}x=\frac{5}{2}$$

Comme X est à valeurs dans $[0,4]$, elle admet un moment d'ordre 2. D'après le cours, il en est de même de W. Et par théorème de transfert comme précédemment, $E\left(\dfrac{1}{Z^2}\right)$ existe. Donc, par indépendance, on a l'existence de $E(T^2)=E\left(X^2\right)E\left(W^2\right)E\left(\dfrac{1}{Z^2}\right)$, donc celle de $V(T)$.

4. Le calcul donne :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \displaystyle\int_0^x\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t=\frac{x^2}{4} & \text{si } x\in[0,1[\\ \displaystyle\int_0^1\frac{t}{2}\ \mathrm{d}t+\int_1^x-\frac{1}{6}(t-4)\ \mathrm{d}t=1-\frac{(x-4)^2}{12} & \text{si } x\in[1,4[\\ 1 & \text{si } x\geqslant 4\end{cases}$$

Donc, pour tout $x\in[0,1[$, on a : $y=F(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in\left[0,\frac{1}{4}\right[\\ x=\sqrt{4y}\end{cases}$.

Et pour tout $x\in[1,4[$, on a : $y=F(x)\Leftrightarrow y=1-\dfrac{(x-4)^2}{12}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in\left[\frac{1}{4},1\right[\\ x=4-\sqrt{12(1-y)}\end{cases}$

Donc, par recollement de bijections entre des ensembles disjoints au départ et à l'arrivée, F est bijective de $[0,4]$ sur $[0,1]$ de réciproque G.

5. Comme F est à valeurs dans $[0,1]$, on a $Y(\Omega)\subset[0,1]$, et comme G est strictement croissante puisque F l'est, pour tout $y\in[0,1]$, on a :

$$P(Y\leqslant y)=P(F(X)\leqslant y)=P(G(F(X)\leqslant G(y))=P(X\leqslant G(y))=F(G(y))=y.$$

Donc Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$. La relation $Y=F(X)$ s'écrit aussi $X=G(Y)$. On reconnaît donc que la fonction `mystere()` simule la valeur de la variable aléatoire X.

6. On reconnaît que la fonction `mysterebis` simule la variable aléatoire $\bar{X}_n=\dfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$, où $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes et de même loi que X. Comme X admet une variance , d'après la loi faible des grands nombres, la suite $(\bar{X}_n)$ tend en probabilité vers $E(X)$, donc `mysterebis(1000)` devrait renvoyer une valeur proche de $E(X)=\dfrac{5}{3}$.

Exercice 3.16.

1. Soit α un réel strictement positif.

Donner un équivalent de $S_n = \sum_{j=1}^{n} j^\alpha$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $(X_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$.

Soit k un entier fixé avec $k \geqslant 2$. On dit que X_k est un *sommet* si pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_{k-1}(\omega) < X_k(\omega)$ et $X_{k+1}(\omega) < X_k(\omega)$.

2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) « X_k est un sommet ». Donner $\lim_{n\to+\infty} P(X_k \text{ est un sommet})$.

b) « X_k et X_{k+1} sont des sommets ».

c) « X_k et X_{k+3} sont des sommets ». Donner $\lim_{n\to+\infty} P(X_k \text{ et } X_{k+3} \text{ sont des sommets})$.

d) « X_2 et X_4 sont des sommets ». Donner $\lim_{n\to+\infty} P(X_2 \text{ et } X_4 \text{ sont des sommets})$.

Solution :

1. On peut utiliser une comparaison série/intégrale.

La fonction $t \to t^\alpha$ est croissante sur $[1, +\infty[$.

Si $t \in [k, k+1]$, on a $k^\alpha \leqslant t^\alpha \leqslant (k+1)^\alpha$. En intégrant, puis en sommant, il vient

$$k^\alpha \leqslant \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leqslant (k+1)^\alpha \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha \leqslant \int_1^n t^\alpha dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} k^\alpha$$

ou

$$S_n - n^\alpha \leqslant \frac{1}{\alpha+1}\left(n^{\alpha+1} - 1\right) \leqslant S_n - 1$$

Ce qui montre que $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Ou utiliser les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}$$

2. a) On a X_k est un sommet si et seulement si $\max(X_{k-1}, X_{k+1}) < X_k$.

La loi du $\max(X_{k-1}, X_{k+1})$ est donnée par, pour $j \in [\![0, n]\!]$

$$P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) \leqslant j) = P((X_{k-1} \leqslant j) \cap (X_{k+1} \leqslant j)) = P(X_{k-1} \leqslant j)^2 = \frac{j^2}{n^2}$$

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) < X_k) = \sum_{j=1}^{n} P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) \leqslant j-1) P(X_k = j)$$

soit

$$P(\max(X_{k-1}, X_{k+1}) < X_k) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

La limite demandée est donc $\dfrac{1}{3}$.

b) La probabilité que X_k et X_{k+1} soient des sommets est nulle, ce qu'on vérifie aisément.

c) On a X_k et X_{k+3} sont des sommets si et seulement si $\max(X_{k-1}, X_{k+1}) \leqslant X_k$ et $\max(X_{k+2}, X_{k+4}) \leqslant X_{k+3}$.
Par indépendance

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_k \text{ et } X_{k+3} \text{ sont des sommets }) = \frac{1}{9}$$

d) L'événement « X_2 et X_4 sont des sommets » correspond à

$$[X_1 < X_2] \cap [X_5 < X_4] \cap [X_3 < \min(X_2, X_4)]$$

En utilisant le système complet d'événements $([X_2 = i] \cap [X_4 = j])_{0\leqslant i,j\leqslant n}$, il vient :

$$\begin{aligned}
&P([X_1 < X_2] \cap [X_5 < X_4] \cap [X_3 < \min(X_2, X_4)]) = \\
&\quad = P(([X_1 < X_2] \cap [X_5 < X_4] \cap [X_3 < \min(X_2, X_4)])|([X_2 = i] \cap [X_4 = j])) \\
&\qquad\qquad\qquad \times P([X_2 = i] \cap [X_4 = j]) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_1 < i)P(X_5 < j)P(X_3 < \min(i,j))P(X_2 = i)P(X_4 = j) \\
&\quad = \frac{1}{(n+1)^5}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i \times j^2 + \frac{1}{(n+1)^5}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i^2 \times j \\
&\quad = \frac{1}{(n+1)^5}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2(i+1)(2i+1)}{6} + \frac{1}{(n+1)^5}\sum_{i=1}^{n} i^2\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right)
\end{aligned}$$

En regardant les termes dominants, la première somme donne

$$\frac{1}{(n+1)^5}\sum_{i=1}^{n} i^2(i+1)(2i+1) \sim \frac{1}{3}\frac{n^5}{5(n+1)^5} \sim \frac{1}{15}$$

et la seconde somme

$$\frac{1}{(n+1)^5}\sum_{i=1}^{n} i^2\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) \sim \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{6(n+1)^5} \sim \frac{1}{15}$$

Exercice 3.17.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont à valeurs dans un sous-ensemble fini $[\![0, n]\!]$ de $\mathbb{N}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour tout réel t, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k.$$

On note $X \sim Y$ lorsque deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi.

1. Montrer que $G_X = G_Y$ si et seulement si $X \sim Y$.

2. Montrer que si G_Y est une fonction constante, alors Y est une variable nulle presque sûrement.

On dit que la variable aléatoire X est *décomposable* s'il existe deux variables aléatoires Y et Z indépendantes, non presque sûrement constantes et telles que $X \sim Y + Z$.

3. On suppose que $X \sim Y + Z$ et que Y et Z sont indépendantes. Montrer que $G_X = G_Y \times G_Z$.

4. On suppose que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$. Montrer que X n'est pas décomposable.

5. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geqslant 2$.

Solution :

1. On suppose que X et Y suivent la même loi. On a donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, pour tout réel t :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(Y = k) = G_Y(t).$$

Réciproquement, on suppose que $G_X = G_Y$. Les fonctions G_X et G_Y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales. Ainsi, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$,

$$G_X = G_Y \quad \Rightarrow \quad G_X^{(k)}(0) = G_Y^{(k)}(0).$$

La formule de Taylor pour les polynômes donne :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{G_X^k(0)}{k!} t^k$$

Par identification sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on trouve :

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{G_Y^{(k)}(0)}{k!} = P(Y = k).$$

On en déduit que X et Y suivent la même loi.

2. Si G_Y est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, toutes les dérivées de G_Y sont nulles. En particulier, pour tout $k \geqslant 1$, on a $P(Y = k) = \dfrac{G_Y^{(k)}(0)}{k!} = 0$. Ainsi, la variable Y est nulle presque sûrement.

3. On commence par remarquer que la formule de transfert donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k = E(t^X)$$

où E désigne l'opérateur espérance. Comme X et $Y + Z$ suivent la même loi, elles ont même fonction génératrice :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad G_X(t) = G_{Y+Z}(t) = E(t^{Y+Z}) = E(t^Y t^Z) = E(t^Y)E(t^Z) = G_Y(t)G_Z(t)$$

par indépendance des variables t^Y et t^Z (lemme des coalitions). (On vérifie aussi l'égalité pour le cas $t = 0$).

4. On raisonne par l'absurde en supposant X décomposable. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Y + Z$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = q + pt$ en posant $q = 1 - p$. Il en résulte que G_X est un

polynôme de degré 1. On doit de plus avoir, d'après la question 3, $G_X = G_Y G_Z$, donc G_Y ou G_Z est de degré 0, ce qui signifie que G_Y ou G_Z est constant. Mais, d'après la question 2, cela implique que Y ou Z est nulle presque sûrement. On aboutit à une contradiction.

5. La question précédente donne déjà le sens direct : si $n < 2$, X n'est pas décomposable. Donc, par contraposée,

si X est décomposable, alors $n \geqslant 2$. Étudions la réciproque. On suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k q^{n-k} = (pt + q)^n$ en posant $q = 1 - p$.

Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. On pose Y et Z deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(n - k, p)$ et $\mathcal{B}(k, p)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = G_Y(t)G_Z(t) = G_{Y+Z}(t)$.

D'après la question 1 , X suit alors la même loi que $Y + Z$. Or, d'après la question 2, les variables aléatoires Y et Z ne sont pas presque sûrement constantes, ce qui prouve que X est décomposable.

Exercice 3.18.

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire à densité et f une densité de X, supposée continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et *on admet* que Y est une variable aléatoire.

1. a) Exprimer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X, notée F_X.

b) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité φ de Y.

2. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{f(t)}{t} dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ sont convergentes, et qu'on a alors :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{0} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{1}{y}$.

3. a) Déterminer le réel α pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \dfrac{\alpha}{1+t^2}$ soit une densité de probabilité.

b) Soit alors U une variable aléatoire de densité u. Préciser une densité de $U' = \dfrac{1}{U}$.

Les variables aléatoires U et U' admettent-elles une espérance ?

4. Soit V une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Déterminer une densité de $V' = \dfrac{1}{V}$.

Les variables aléatoires V et V' admettent-elles une espérance ?

5. Peut-on déterminer une densité w telle que si W est une variable aléatoire de densité w et $W' = \dfrac{1}{W}$, alors W et W' admettent toutes les deux une espérance ?

Solution :

1. a) On évalue $F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$ selon les valeurs de y :

• si $y < 0$, $Y \leqslant y \Leftrightarrow 1/X \leqslant y < 0 \Leftrightarrow 1/y \leqslant X < 0$, donc $F_Y(y) = F_X(0) - F_X(1/y)$;

• si $y = 0$, $Y \leqslant 0 \Leftrightarrow 1/X \leqslant 0 \Leftrightarrow X < 0$ et $F_Y(y) = F_X(0)$;

• si $y > 0$, $Y \leqslant y \Leftrightarrow 1/X \leqslant y \Leftrightarrow (1/X \leqslant 0 \text{ ou } 0 < 1/X \leqslant y) \Leftrightarrow (X \leqslant 0 \text{ ou } 1/y \leqslant X)$; les deux événements étant incompatibles, on a $F_Y(y) = F_X(0) + 1 - F_X(1/y)$.

Ainsi :

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(0) - F_X(1/y) & \text{si } y < 0 \\ F_X(0) & \text{si } y = 0 \\ F_X(0) + 1 - F_X(1/y) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

b) La fonction F_Y continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 car

$$\lim_{y\to 0^-} F_Y(y) = F_X(0) - \lim_{x\to -\infty} F_X(x) = F_X(0) \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0^+} F_Y(y) = F_X(0) + 1 - \lim_{x\to +\infty} F_X(x) = F_X(0)$$

donc $\lim\limits_{y\to 0^-} F_Y(y) = \lim\limits_{y\to 0^+} F_Y(y) = F_Y(0) = F_X(0)$.

La fonction F_Y est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ sauf en un nombre fini de points car F_X l'est, donc elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$.

Par dérivation, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$F_Y'(y) = \Big[- F_X\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big]' = \frac{1}{y^2} F_X'\Big(\frac{1}{y}\Big) = \frac{1}{y^2} f\Big(\frac{1}{y}\Big) \quad \text{d'où} \quad \varphi(y) = \frac{1}{y^2} f\Big(\frac{1}{y}\Big)$$

2. Si f est continue sur $\mathbb{R}$, φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et Y admet une espérance si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 y\,\varphi(y)dy$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} y\,\varphi(y)dy$ convergent.

Le changement de variable $t = 1/y$ donne :

$$\int_{-\infty}^{0} y\,\varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{y}\,f\Big(\frac{1}{y}\Big)dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t}\,f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} y\,\varphi(y)dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t}\,f(t)dt$$

3. a) Ainsi :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{1+t^2}dt = \alpha\,\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\pi}$$

b) D'après la question 1, une densité de $U' = 1/U$ est :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2}\,u\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{\pi\,(1+t^2)} = u(t)$$

et au voisinage de $+\infty$, $t\,u(t) \sim 1/(\pi\,t)$ d'intégrale divergente en $+\infty$. Il n'existe donc pas d'espérance.

4. Une densité ψ de V' est donnée par $\psi(t) = \dfrac{1}{t^2}\,v\Big(\dfrac{1}{t}\Big) = \dfrac{e^{-1/(2t^2)}}{\sqrt{2\pi}\,t^2}$, éventuellement prolongée par continuité par $\psi(0) = 0$.

Ainsi V a une espérance nulle ; mais $t\,\psi(t) \sim 1/\big(\sqrt{2\pi}\,t\big)$, au voisinage de $+\infty$, d'intégrale divergente en $+\infty$, donc V' n'a pas d'espérance.

5. On peut proposer $w(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, qui est une fonction positive, continue, d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$, (égale au moment d'ordre 2 d'une variable suivant la loi normale centrée réduite) valant 1.

On a, au voisinage de $+\infty$, $t\,w(t) \sim \dfrac{t^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, donc W admet une espérance (c'est le moment d'ordre 3 d'une loi normale centrée réduite).

D'autre part, une densité ω de $W' = 1/W$ est donnée par $\omega(t) = \dfrac{1}{t^2}\,w\Big(\dfrac{1}{t}\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,t^4}\,e^{-1/(2t^2)}$ et $t\,\omega(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,t^3}$ d'intégrale convergente en $+\infty$ donc W' admet une espérance.

Exercice 3.19.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\,x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)dt.$$

1. Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose, dans cette question, que f est la densité d'une variable aléatoire X. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de loi uniforme sur $[-1, 0]$. Montrer que g est une densité de probabilité de $X + Y$.

3. On suppose, dans cette question, que f est une fonction positive différente de la fonction nulle et que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge. On note I la valeur de cette intégrale.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = I$.

4. On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$ converge.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ converge et montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$.

Solution :

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x) = f(x+1) - f(x)$.
Elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et suivant la loi uniforme sur $[-1,0]$. On note f_Y une densité de Y. Déterminons une densité h de $X+Y$. Comme X et Y sont indépendantes, h est donnée, sous réserve de convergence, par l'intégrale $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t)f(t)dt$ avec :

$$f_Y(x-t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x-t \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant t \leqslant x+1.$$

Si $t \notin [x, x+1]$, $f_Y(x-t) = 0$, ce qui résout le problème de convergence de l'intégrale et donne :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, \qquad h(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt = g(x).$$

3. a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la relation de Chasles donne : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x+1} f(t)dt - \int_{\infty}^{x} f(t)dt$.
Ainsi, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0.$$

b) La fonction $\dfrac{f}{I}$ est une densité de probabilité. Par la question précédente, $g(x) = \dfrac{1}{I}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$ est une densité de probabilité. Par suite, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = I$$

4. a) Soit $x\in\mathbb{R}$. On définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[x, x+1]$ en posant $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_x^{x+1} u(t)v(t)dt$. On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les fonctions $u = f$ et $v : t \to 1$. Cela donne :

$$|\langle f,1\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2\|1\|^2 \quad \Rightarrow \quad |\int_x^{x+1} f(t)dt|^2 \leqslant \|f\|^2\|1\|^2 \quad \Rightarrow \quad |g(x)|^2 \leqslant \int_x^{x+1} f^2(t)dt.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit $\displaystyle\int_x^{x+1} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{x+1} f(t)dt - \int_{\infty}^{x} f(t)dt.$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\int_x^{x+1} f^2(t)dt\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = 0$. On conclut, par comparaison, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Soit A et B deux réels tels que $B < 0 < A$. Par croissance de l'intégrale, l'inégalité précédente donne :

$$\int_B^A g^2(x)dx \leqslant \int_B^A \Big(\int_x^{x+1} f^2(t)dt\Big)dx$$

Par la question 3 appliquée à la fonction f^2, on obtient :

$$\lim_{A\to+\infty, B\to-\infty}\Big(\int_B^A \Big(\int_x^{x+1} f^2(t)dt\Big)dx\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$$

La fonction g^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $B < 0 < A$, on a :

$$\int_B^A g^2(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$$

On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt.$

Exercice 3.20.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. Rappeler la loi de S_n, son espérance et sa variance. Déterminer l'espérance et la variance de S_n^*.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $e^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{n-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(S_n^* \leqslant 0) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-t}t^n\,\mathrm{d}t.$

4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5. En déduire que la suite $(P(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite monotone qui converge vers une limite $\ell \in [0,1[$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t > 0$, on pose : $G_{S_n}(t) = E(t^{S_n})$.

a) Donner une expression simple de $G_{S_n}(t)$.

b) Vérifier que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance telle que :

$$E(t^{S_n^*}) = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}} G_{S_n}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right).$$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(E(t^{S_n^*})\right)$.

Solution :

1. Par stabilité de la loi de Poisson, on a $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, d'où $E(S_n) = V(S_n) = n$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $E(S_n^*) = 0$ et d'après la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$ on a $V(S_n^*) = 1$.

2. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f = \exp$ qui de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec les bornes $a = 0$ et $b = n$. On effectue ensuite le changement de variable $t = n - u$.

3. Ainsi

$$P(S_n^* \leqslant 0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = 1 - \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t - \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

4. D'après la question précédente, par relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) &= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t - \int_{n+1}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} - \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

(on a effectué une intégration par parties dans la dernière intégrale)

5. Si $f_n(t) = e^{-t}\dfrac{t^n}{n!}$, on a $f_n'(t) = \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{n!}(n-t)$.

La fonction f_n positive, est croissante sur $[0, n]$ puis décroissante Ainsi la fonction f_{n+1} est croissante sur $[n, n+1]$ donc, pour tout $t \in [n, n+1]$, $f_{n+1}(t) \geqslant f_{n+1}(n)$ donc, en intégrant sur $[n, n+1]$, par croissance de l'intégration, on a :

$$\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f_{n+1}(n)\ \mathrm{d}t = f_{n+1}(n)$$

Donc : $P(S_n^* \leqslant 0) - P(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t - f_{n+1}(n) \geqslant 0.$

Ainsi la suite $(P(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par ailleurs elle est minorée par 0 (suite de probabilités) donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \ell \leqslant P(S_n^* \leqslant 0) \leqslant P(S_1^* \leqslant 0) = 1 - \int_0^1 f_1(t)\ \mathrm{d}t < 1$$

d'où, à la limite : $\ell \in [0, 1[$.

6.a) Par le théorème de transfert, avec une série exponentielle :

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{(nt)^k}{k!} = e^{n(t-1)}.$$

b) On a : $t^{S_n^*} = (t^{\frac{1}{\sqrt{n}}})^{S_n - n} = \dfrac{1}{t^{\sqrt{n}}}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{S_n}$, d'où $E(t^{S_n^*}) = \dfrac{G_{S_n}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}{t^{\sqrt{n}}}$.

c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$E(t^{S_n^*}) = \frac{\exp\left(n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)\right)}{t^{\sqrt{n}}} = \exp\left(n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) - \sqrt{n}\ln t\right)$$

On a, au voisinage de 0, $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$; or $u = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln t \to 0$, donc :

$$t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln t} = 1 + \frac{\ln t}{\sqrt{n}} + \frac{(\ln t)^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où $n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) = \sqrt{n}\ln t + \dfrac{(\ln t)^2}{2} + o(1)$. D'où : $E(t^{S_n^*}) = \exp\left(\dfrac{(\ln t)^2}{2} + o(1)\right)$.

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} E(t^{S_n^*}) = \exp\left(\frac{(\ln t)^2}{2}\right)$$

Exercice 3.21.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{A}$.
Établir l'inégalité :

$$|P(A) - P(B)| \leqslant P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n \text{ et } G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)t^n$$

a) Montrer que les fonctions G_X et G_Y sont définies sur l'intervalle $[-1, 1]$.

b) Montrer que pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$|G_X(t) - G_Y(t)| \leqslant 2\,P(X \neq Y)$$

3. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} P(U_n \neq 0)$ converge. On pose :

$$C_n = \big\{\omega \in \Omega \,/\, \exists\, i \geqslant n \text{ tel que } U_i(\omega) \neq 0\big\}$$

a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 0$.

b) En déduire que l'ensemble $\big\{i \in \mathbb{N}^* \,/\, U_i \neq 0\big\}$ est presque sûrement fini.

4. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\omega)$ et $S(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$.

a) Montrer que $P(\{\omega \in \Omega / S(\omega) \text{ existe }\}) = 1$.
On admet que S est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[-1,1]} |G_{S_n}(t) - G_S(t)| = 0$.

Solution :

1. On utilise les systèmes complets d'événements $(A, \overline{A})$ et $(B, \overline{B})$ pour écrire

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \text{ et } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

En faisant la différence, il vient :

$$|P(A) - P(B)| = |P(A \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap B)| \leqslant P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

2. a) Comme pour $t \in [-1, 1]$, $|P(X = n)t^n| \leqslant P(X = n)$ et comme la série $\sum P(X = n)$ converge, G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

b) Par la première question, pour tout n on a

$$|P(X = n) - P(Y = n)| \leqslant P(X = n \cap Y \neq n) + P(X \neq n \cap Y = n)$$

On somme les inégalités :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P(X=n) - P(Y=n)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (P(X=n \cap Y \neq n) + P(X \neq n \cap Y = n))$$

Les événements $(X=n) \cap (Y \neq n)$ sont indépendants et tous inclus dans $(X \neq Y)$. Il en est de même des événements $(X \neq n) \cap (Y = n)$. Le majorant est donc plus petit que $2P(X \neq Y)$. Ceci justifie les existences (car on somme des quantités positives) et donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P(X=n) - P(Y=n)| \leqslant 2P(X \neq Y)$$

Pour $t \in [-1,1]$, on a $|P(X=n)t^n - P(Y=n)t^n| \leqslant |P(X=n) - P(Y=n)\|$ qui est le terme général d'une série convergente avec ce qui précède.
On a donc $\sum((P(X=n)t^n - P(Y=n))t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge et est de somme en module inférieure à $2P(X \neq Y)$.

3.a) On remarque que $C_{n+1} \subset C_n$. Comme $C_n = \bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \neq 0)$ et comme $\sum(P(U_i \neq 0))$ converge, on en déduit (reste de série convergente) que

$$0 \leqslant P(C_n) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} P(U_i \neq 0) \to 0$$

b) Ainsi l'ensemble des ω pour lesquels il existe une infinité de i tels que $U_i(\omega) \neq 0$ est de probabilité nulle.

4. a) Notons A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels qu'il n'existe qu'un nombre fini de i pour lesquels $U_i(\omega) \neq 0$. Si $\omega \in A$ alors $S(\omega)$ existe (comme somme finie). S est définie au moins sur A qui est de probabilité 1 par la question précédente.

b) Avec les questions précédentes, on a

$$\forall t \in [-1,1],\ |G_{S_n}(t) - G_S(t)| \leqslant 2P(S_n \neq S)$$

On en déduit que

$$\|G_{S_n} - G_S\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant 2P(S_n \neq S)$$

La suite d'événements $((S_n \neq S))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car les U_i sont à valeurs positives. Le théorème de la limite monotone donne

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \neq S) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (S_n \neq S)\right) = P(\overline{A}) = 0$$

Exercice 3.22.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la même loi d'espérance m et d'écart type σ. On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$Y_0 = \frac{X_0}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = \frac{X_{n+1} + Y_n}{2}$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a $Y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}} X_k$. En déduire que Y_n admet une espérance et une variance.

2. Déterminer $E(Y_n)$. Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Calculer $V(Y_n)$ et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit i et j deux entiers positifs tels que $i < j$. Prouver qu'il existe une constante c indépendante de i et de j pour laquelle on a :

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \leqslant c\, \frac{1}{2^{j-i}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Justifier l'existence de l'espérance et de la variance de S_n. Déterminer la limite ℓ de la suite $(E(S_n))_{n\geqslant 1}$.

b) *On admet* que

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\Big)$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(S_n) = 0$.

c) Justifier l'inégalité $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$ pour toute variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P\left(|S_n - \ell| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\sqrt{V(S_n)} + |E(S_n) - \ell|.\right)$$

En déduire que la suite (S_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à ℓ.

6. On suppose dans cette question que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite.

a) Déterminer la loi de Y_n.

b) Montrer que la suite (Y_n) converge en loi et préciser la loi limite.

Solution :

1. La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie au rang n, alors il vient

$$Y_{n+1} = \frac{X_{n+1} + Y_n}{2} = \frac{X_{n+1}}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+2-k}} X_k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{(n+1)+1-k}} X_k.$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$. La deuxième partie se justifie facilement avec le cours.

2. Avec la formule précédente, on trouve

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}} E(X_k) = \frac{m}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = m\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \to m.$$

3. Comme les variables X_k sont indépendantes, on a

$$V(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^{n+1-k}} V(X_k) = \frac{\sigma^2}{4} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{\sigma^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right).$$

La suite $(V(Y_n))$ converge donc vers $\dfrac{\sigma^2}{3}$.

4. Soient i et j tels que $i < j$. En utilisant l'indépendance des variables (X_k), on obtient

$$\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \frac{\operatorname{Cov}(X_k, X_l)}{2^{i+j+2-(k+l)}} = \sum_{k=0}^{i} \frac{V(X_i)}{2^{i+j+2-2k}} = \frac{\sigma^2}{2^{j-i+2}} \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{4^k} \leqslant \frac{1}{3} \frac{\sigma^2}{2^{j-i}}.$$

5. a) La justification se fait avec le cours. A l'aide de la question 2, on trouve

$$E(S_n) = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = m - \frac{m}{2n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to m$$

b) En utilisant ce qui précède, il vient

$$\begin{aligned} 0 \leqslant V(S_n) &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(Y_i, Y_j)\right] \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\left[n\frac{\sigma^2}{3} + 2c\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2^{j-i}}\right)\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{1}{3} + 2c\right] \to 0. \end{aligned}$$

c) La justification se fait avec la formule de Koenig-Huygens. En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient alors

$$\begin{aligned} P\left(|S_n - m| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \frac{E(|S_n - m|)}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left[E(|S_n - E(S_n)|) + |E(S_n) - m|\right] \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{var(S_n)} + |E(S_n) - m|\right] \end{aligned}$$

La variable S_n converge donc en probabilité vers m.

6. a) La variable X suit une loi normale centrée réduite, alors pour tout $a > 0$, la variable aX suit une loi normale $\mathcal{N}(0, a^2)$. Comme les variables X_k sont indépendantes, la stabilité de la loi normale et les questions 1 et 2 nous permettent d'affirmer que Y_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right))$.

b) Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée (qui est continue). On a alors

$$F_{Y_n}(x) = \Phi\left(\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} x\right) \to \Phi(\sqrt{3}x).$$

La suite (Y_n) converge donc en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$.

4

Option B/L

Exercice 4.01.

Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [0,1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. On pose $q = 1 - (\alpha + \beta)$.

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, montrer que $A^m = \dfrac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha q^m & \alpha(1-q^m) \\ \beta(1-q^m) & \alpha + \beta q^m \end{pmatrix}$.

Un bit de données a_1 prenant une valeur aléatoire appartenant à $\{0,1\}$, avec une probabilité non nulle, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose qu'à chaque relais, l'élément $x \in \{0,1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres.

On note X_0 la variable aléatoire certaine égale à a_1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui représente la valeur du bit à l'issue de la n-ième transmission.

3. a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer $\begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \end{pmatrix}$ en fonction de A et $\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \end{pmatrix}$.

b) En déduire la loi de X_n en fonction de celle de X_0.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_{[X_0=0]}(X_n = 0)$ et $P_{[X_0=1]}(X_n = 1)$.

5. Montrer que : $P(X_n = X_0) > 0$.

Solution :

1. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, le réel 1 est valeur propre associé au vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable et semblable à une matrice $\operatorname{diag}(1,\mu)$, alors on a $1+\mu=\operatorname{tr}(A)=2-\alpha-\beta=1+q$, donc $\mu=q$. Réciproquement le calcul donne le vecteur $\begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix}$ vecteur propre associé à la valeur propre $q=1-\alpha-\beta$ (différente de 1 car $\alpha+\beta>0$). Ainsi A, possédant deux valeurs propres distinctes, est bien diagonalisable.

2. Par récurrence sur $m\geqslant 0$, ou en diagonalisant A.

3. a) La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_n=0),(X_n=1))$ donne :

$$\forall i\in\{0,1\}\ \ P(X_{n+1}=i)=P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=i)P(X_n=0)+P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=i)P(X_n=1),$$

soit, matriciellement :

$$\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=0)\\P(X_{n+1}=1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\alpha & \beta\\ \alpha & 1-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\end{pmatrix}={}^tA\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\end{pmatrix}.$$

b) On en déduit par une récurrence immédiate que : $\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\P(X_n=1)\end{pmatrix}={}^t(A^n)\begin{pmatrix}P(X_0=0)\\P(X_0=1)\end{pmatrix}$, soit :

$$\begin{cases}P(X_n=0)=\dfrac{\beta+\alpha q^n}{\alpha+\beta}P(X_0=0)+\dfrac{\beta(1-q^n)}{\alpha+\beta}P(X_0=1)\\[2mm] P(X_n=1)=\dfrac{\alpha(1-q^n)}{\alpha+\beta}P(X_0=0)+\dfrac{\alpha+\beta q^n}{\alpha+\beta}P(X_0=1)\end{cases}$$

4. Le raisonnement précédent peut aussi être effectué en remplaçant la probabilité P par la probabilité conditionnelle $P_{[X_0=0]}$.
Pour $n\geqslant 1$, comme les relais sont indépendants, on a :

$$\begin{cases}P_{[X_0=0]\cap[X_n=0]}(X_{n+1}=0)=P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)=1-\alpha\\ P_{[X_0=0]\cap[X_n=1]}(X_{n+1}=0)=P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0)=\beta\end{cases}$$

et cela reste vrai de manière évidente pour $n=0$. Donc :

$$\begin{pmatrix}P_{[X_0=0]}(X_{n+1}=0)\\P_{[X_0=0]}(X_{n+1}=1)\end{pmatrix}={}^tA\begin{pmatrix}P_{[X_0=0]}(X_n=0)\\P_{[X_0=0]}(X_n=1)\end{pmatrix}.$$

Comme à la question précédente on en déduit :

$$P_{[X_0=0]}(X_n=0)=\frac{\beta+\alpha q^n}{\alpha+\beta}P_{[X_0=0]}(X_0=0)+\frac{\beta(1-q^n)}{\alpha+\beta}P_{[X_0=0]}(X_0=1)=\frac{\beta+\alpha q^n}{\alpha+\beta}.$$

Et de même, on obtient : $P_{[X_0=1]}(X_n=1)=\dfrac{\alpha+\beta q^n}{\alpha+\beta}$.

5. On a

$$\begin{aligned}
P(X_n = X_0) &= P_{[X_0=0]}(X_n = 0)P(X_0 = 0) + P_{[X_0=1]}(X_n = 1)P(X_0 = 1) \quad \text{(probas totales)}\\
&= \frac{\beta + \alpha q^n}{\alpha+\beta} P(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta q^n}{\alpha+\beta} P(X_0 = 1) \quad \text{(question précédente)}\\
&= \phi\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) P(X_0 = 0) + \phi\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) P(X_0 = 1).
\end{aligned}$$

avec $\phi(x) = x + (1-x)q^n$.
Si l'on note $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $p = P(X_0 = 0)$, alors

$P(X_n = X_0) = g(\lambda) = \phi(\lambda)p + \phi(1-\lambda)(1-p) = ((1-q^n)\lambda + q^n)p + ((1-q^n)(1-\lambda) + q^n)(1-p)$

La fonction ϕ est affine sur $[0,1]$, ainsi que la fonction g.
Une étude rapide montre que $g'(\lambda) = (1-q^n)(2p-1)$. Ainsi

• si $p > 1/2$, la fonction g est croissante et

$$g(\lambda) > g(0) = q^n p + (1-q^n)(1-p) > 0$$

• si $p < 1/2$, la fonction g est décroissante et

$$g(\lambda) > g(1) = p + q^n(1-p) > 0$$

• si $p = 1/2$, la fonction g est constante égale à $\dfrac{1+q^n}{2}$.

Exercice 4.02.

On considère un entier n supérieur ou égal à 2 et la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice dont les termes diagonaux sont $1, 2, \dots, n$ et dont tous les autres termes valent 1.

1. Montrer que le réel λ est valeur propre de A si et seulement si λ vérifie l'équation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$$

2. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\}$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x-k}$$

En utilisant la fonction f_n, montrer que A admet n valeurs propres réelles distinctes. En déduire quela matrice A est diagonalisable.

3. On note λ_n la plus grande valeur propre de A.

a) Établir, pour tout réel y positif, l'inégalité suivante : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y+j}\leqslant\int_0^{n-1}\frac{1}{t+y}\,dt$.

b) En déduire que $f_n\Big(n+\dfrac{n}{e-1}\Big)\leqslant 1$.

c) Montrer de même que $f_n\Big(n-1+\dfrac{n}{e-1}\Big)\geqslant 1$.

4. En déduire que l'on a : $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{ne}{e-1}$.

Solution :

1. L'équation $AX=\lambda X$ est équivalente au système $(\star)$ $\displaystyle\sum_{i=1,i\neq k}^{n} x_i + k\,x_k = \lambda\,x_k,\quad$ pour $k\in[\![1,n]\!]$, qui est équivalent au système : $(\star\star)$ $S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=(\lambda-k+1)x_k,\quad$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.

Si $\lambda=k-1$, l'équation contenant le terme $(\lambda-(k-1)x_k$ donne $S=0$ et donc $x_i=0$, pour $i\neq k$.

Mais comme $S=0$, on a $x_k=0$. Ainsi, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $\lambda\neq k-1$.

On peut donc diviser par $\lambda-(k-1)$. Il vient : $x_k=\dfrac{S}{\lambda-k+1},\quad$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.

On somme toutes ces équations et on obtient : $S\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda-k}=S$.

Comme on vu que S était nécessairement non nul, on obtient bien : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda-k}=1$.

Réciproquement, on sait que l'équation $AX=\lambda X$ est équivalente au système d'équations $(\star)$. Ce système est équivalent au système $(\star\star)$.

L'équation $S\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda-k}=S$ étant vérifiée, puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda-k}=1$, le système $(\star\star)$ est un système de $n-1$ équations à n inconnues ; il admet une solution non triviale.

2. Sur l'intervalle $]k,k+1[$, la fonction f_n est dérivable et de dérivée donnée par : $f_n'(x)=-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(x-k)^2}$.

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur cet intervalle et à valeurs dans $]-\infty,+\infty[$.

On applique alors le théorème de la bijection à f_n sur l'intervalle $]k,k+1[$ et donc il existe bien un unique réel x_k de l'intervalle $]k,k+1[$ tel que $f_n(x_k)=1$.

Il en est de même sur $]n-1,+\infty[$ où la fonction f_n décroît de $+\infty$ vers 0. Le théorème de la bijection donne l'existence de x_n.

La fonction f_n admet n solutions distinctes situées dans $\mathbb{R}$. La matrice A possède donc n valeurs propres distinctes, ce qui montre qu'elle est diagonalisable.

3. a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{y+t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La méthode de comparaison série/intégrale donne le résultat attendu.

b) $f_n(n+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+y-k}$. Le changement d'indice $j = n-k$ donne :

$$f_n(n+y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{y+j}$$

D'après la question précédente, on a donc : $f_n(n+y) \leqslant \displaystyle\int_0^{n-1} \frac{1}{t+y}dt = \ln\left(1+\frac{n-1}{y}\right)$.

On conclut en prenant $y = \dfrac{n}{e-1}$:

$$f_n\left(n+\frac{n}{e-1}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{n-1}{n}(e-1)\right) \leqslant \ln(e) = 1$$

c) On utilise la même stratégie :

$$f_n(n-1+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-1+y-k} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{y+j} \geqslant \int_0^n \frac{1}{y+t}dt$$

On obtient : $f_n(n-1+y) \geqslant \ln\left(1+\dfrac{n}{y}\right)$.

4. En posant toujours $y = \dfrac{n}{e-1}$, il vient : $f_n\left(n+\dfrac{n}{e-1}\right) \leqslant 1 \leqslant f_n\left(n-1+\dfrac{n}{e-1}\right)$. Or la fonction f_n étant décroissante, il vient : $n-1+\dfrac{n}{e-1} \leqslant \lambda_n \leqslant n+\dfrac{n}{e-1}$, ce qui donne l'équivalent $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{ne}{e-1}$.

Exercice 4.03.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-\cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que f_n est une densité de probabilité.

On considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n admet la fonction f_n comme densité.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance de X_n.

On admet sans démonstration que la variance de X_n est égale à $\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{2n^2\pi^2}$.

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet-elle d'affirmer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = 0\,?$$

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.

b) Pour tout x réel, on pose : $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

4. Soit ε un réel vérifiant $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$. Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) \neq 0$$

Solution :

1. La fonction f_n est positive, elle est continue (même en 0 et 1) et on a : $\displaystyle\int_0^1 (1-\cos(2n\pi x)dx = 1$ (sans problème de convergence).

2. a) La fonction f_n étant continue bornée et nulle hors de $[0,1]$, X_n admet des moments à tout ordre.
Par intégration par parties (les fonctions en jeu étant bien de classe C^1 sur $[0,1]$), on a :

$$E(X_n) = \int_0^1 t(1-\cos(2n\pi t)dt = \frac{1}{2} - \left[t\left(\frac{\sin(2n\pi t)}{2n\pi}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \sin(2n\pi t)dt = \frac{1}{2}$$

Un calcul analogue donne $E(X_n^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}$ et $V(X_n) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}$

b) L'inégalité de Tchebicheff ne permettra pas de conclure, car bien que $E(X_n) = 1/2$, la suite des variances ne tend pas vers zéro.

3. a) Une intégration quasi évidente donne

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x - \dfrac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Comme $\left|\dfrac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi la suite (F_n) tend vers la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

4. Soit $0<\varepsilon<1/2$. Pour tout $n\geqslant 1$, on a :

$$P\left(\left|X_n-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon\right)=P\left(X_n-\frac{1}{2}>\varepsilon\right)+P\left(X_n-\frac{1}{2}<-\varepsilon\right)=1-F_n(1/2+\varepsilon)+F_n(1/2-\varepsilon)$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 1-F_n(1/2+\varepsilon)+F_n(1/2-\varepsilon)=1-2\varepsilon>0$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4.04.}}$

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. Soit U_n une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ dont la loi est donnée par :

$$\forall\, k\in[\![0,n]\!],\ P(U_n=k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

On admet que l'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire.

Pour toute variable aléatoire T, on appelle *moment factoriel d'ordre k*, pour $k\in\mathbb{N}$, les réels suivants :

$$m_k(T)=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ E(T(T-1)\cdots(T-k+1)) & \text{si } k\geqslant 1\end{cases}$$

1. Montrer que pour $k\geqslant n+1$, on a $m_k(U_n)=0$.

2. Montrer que pour $k\in[\![0,n]\!]$, on a $m_k(U_n)=1$.

3. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $m_k(Z)$.

4. On définit une suite $(Q_j)_{j\geqslant 0}$ de polynômes par :

$$Q_j(X)=\begin{cases}1 & \text{si } j=0\\ X(X-1)\cdots(X-j+1) & \text{si } j\geqslant 1\end{cases}$$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(Q_0,Q_1,\dots,Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

b) En déduire que, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a $E(U_n^k)=E(Z^k)$.

Solution :

1. a) La variable aléatoire U_n étant à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on a $U_n(U_n-1)\cdots(U_n-n)=0$ et $m_k(U_n)=0$ si $k\geqslant n+1$.

2. La relation est vérifiée pour $k=0$ par définition de $m_0(T)$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$

$$\begin{aligned} m_k(U_n) &= \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\cdots(i-k+1)\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{i=k}^{n}\frac{1}{(i-k)!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{n-k-i}\frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n-k} P(U_{n-k}=i) = 1 \end{aligned}$$

3. Si Z suit la loi de Poisson de paramètre 1

$$m_k(Z) = e^{-1}\sum_{i=k}^{+\infty} i(i-1)\cdots(i-k+1)\frac{1}{i!} = e^{-1}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(i-k)!} = e^{-1}\times e = 1$$

4. a) La suite (Q_n) est une suite de polynômes échelonnée en degrés et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et une base.

b) Par la question précédente, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $a_{0,k}, a_{1,k}, \ldots, a_{k,k}$ réels tels que

$$X^k = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} Q_j$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(U_n^k) = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} m_k(X_n) = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} m_k(Z) = E(Z^k)$$

Exercice 4.05.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définie par la densité :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+x^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et on note Φ_n la fonction de répartition de $\dfrac{n}{M_n}$.

1. Établir que pour tout $x > 0$, la relation : $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\Phi_n(0)$.

b) En déduire, pour tout $t \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n(t)$.On note cette limite $\Phi(t)$.

3. Pour tout réel $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P\left(\left[\frac{n}{M_n} \leqslant t\right] \cap [M_n > 0]\right)$.

4. Déterminer, pour tout réel $t > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n(t)$. On note cette limite $\Phi(t)$.

5. Montrer que la fonction Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Solution :

1. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, on dérive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante. En l'évaluant en 1, on en déduit le résultat souhaité.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par indépendance des X_i :

$$\begin{aligned}\phi_n(0) &= P(nM_n^{-1} \leqslant 0) = P(M_n \leqslant 0) = P(X_1 \leqslant 0, \dots, X_n \leqslant 0)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt\right)^n = \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

b) Soit $t \leqslant 0$. Par croissance de ϕ_n, on a $0 \leqslant \phi_n(t) \leqslant \phi_n(0)$. Ainsi, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(t) = 0$.

3. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a par indépendance des X_i,

$$\begin{aligned}P(nM_n^{-1} \leqslant t, M_n > 0) &= P\left(M_n \geqslant \frac{n}{t}\right) = 1 - P\left(M_n \leqslant \frac{n}{t}\right)\\ &= 1 - P\left(X_1 \leqslant \frac{n}{t}\right)^n\\ &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{n/t} f(t)\,dt\right)^n\\ &= 1 - \left(\frac{\arctan\left(\frac{n}{t}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right)^n\end{aligned}$$

4. Soit $t > 0$. On a par la question précédente et la question 1,

$$P(nM_n^{-1} \leqslant t, M_n > 0) = 1 - \left(1 - \frac{\arctan\left(\frac{t}{n}\right)}{\pi}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}P(nM_n^{-1} \leqslant t) &= P(nM_n^{-1} \leqslant t, M_n > 0) + P(nM_n^{-1} \leqslant t, M_n \leqslant 0)\\ &= P(nM_n^{-1} \leqslant t, M_n > 0) + P(M_n \leqslant 0)\\ &= P(nM_n^{-1} \leqslant t, M_n > 0) + \phi_n(0)\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(t) = 1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\pi}\right) = \phi(t)$.

5. On déduit des questions précédentes que la suite $(\phi_n(t))$ converge vers la fonction $\phi(t)$ qui est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\pi}$.

Exercice 4.06.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (x^3+t^3)^{-1/3}dt$ est convergente pour $x>0$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f(x) = \int_0^1 (x^3+t^3)^{-1/3}dt$$

2. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} (1+t^3)^{-1/3}dt$.

3. a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Étudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

4. Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Pour tout x strictement positif, $t\mapsto (x^3+t^3)^{-1/3}$ est continue sur $[0,1]$. Pour $x=0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.
Ainsi f est-elle bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. On écrit $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 (1+(t/x)^3)^{-1/3}dt$ et le changement de variable linéaire $t = xu$ donne

$$f(x) = \int_0^{1/x} (1+u^3)^{-1/3}du$$

3. a) Pour $x>0$, le théorème fondamental du calcul intégral permet d'affirmer que f est de dire que f est dérivable et que

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1/3} = \frac{-1}{x(1+x^3)^{1/3}}$$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) • lorsque x tend vers $+\infty$, comme $h(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^{1/3}} > 0$, on peut écrire :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{1/x} du = \frac{1}{x}$$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• lorsque x tend vers 0^+, comme $h(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^{1/3}} > 0$ et au voisinage de $+\infty$, $h(t) \sim \dfrac{1}{t}$, dont l'intégrale diverge sur $[1, +\infty]$ on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. On détermine d'abord l'équivalent de manière intuitive.

Au voisinage de 0, $\lim_{t\to 0} h(t) = 1$ et donc $f(x)$ doit être équivalent à $\dfrac{1}{x}$. De manière rigoureuse

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leqslant \int_0^{1/x} |h(t) - 1| dt$$

Or, au voisinage de 0, $h(t) - 1 = (1+t^3)^{-1/3} - 1 = -\dfrac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Ainsi pour t au voisinage de 0

$$|h(t) - 1| \leqslant Ct^3$$

Pour x assez grand

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leqslant \int_0^{1/x} Ct^3 dt = \frac{M}{x^4} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Finalement, au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$

Exercice 4.07.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. On rappelle qu'un endomorphisme f non nul de E est nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

On appelle alors indice de nilpotence de f le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p.

1. L'endomorphisme f est-il inversible ? Est-il diagonalisable ?

2. Montrer qu'il existe un élément $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre. En déduire que $p \leqslant n$.

Soit g un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence q.

3. a) Montrer que si f et g commutent, alors $f+g$ est nilpotent. Donner un majorant de l'indice de nilpotence de $f+g$.

b) Ce résultat reste-t-il valide si f et g ne commutent pas ?

4. a) Montrer que si f et g commutent, alors $f \circ g$ est nilpotent. Donner un majorant de l'indice de nilpotence de $f \circ g$.

b) Ce résultat reste-t-il valide si f et g ne commutent pas ?

Solution :

1. Comme $f^p = 0$. Si f^{-1} existe, en composant par cet inverse p fois, on obtient $I = 0$.
La seule valeur propre de f est 0, puisque s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors $0 = f^p(x) = \lambda^p x$ et $\lambda = 0$.
Si f est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle, en contradiction avec $f \neq 0$.

2. Comme $f^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)$ est libre car en composant par f^{p-1}

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 f^{p-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

En recommençant ce processus, on obtient le résultat demandé. Ceci montre que p qui est la cardinal de cette famille est inférieur ou égal à n.

3. a) Les endomorphismes f et g commutant, le binôme de Newton donne

$$(f+g)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^k g^{m-k}$$

En prenant $m = p + q$, il vient

$$(f+g)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k} f^k g^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} f^k g^{p+q-k} = 0$$

car dans la première somme $p + q - k \geqslant p$ et dans la seconde somme $k \geqslant p$.

b) Donnons un contre exemple. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on pose

$$f(e_1) = e_2, f(e_i) = 0, \forall i \neq 1, \quad \text{ et } g(e_2) = e_1, g(e_i) = 0, \forall i \neq 2$$

Alors, on vérifie que $f^2 = g^2 = 0$ et par exemple $(f+g)(e_1 + e_2) = e_2 + e_1$. Ainsi 1 est valeur propre de $f + g$ qui ne peut être nilpotent.

4. a) Par récurrence immédiate, comme $f \circ g = g \circ f$, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)^k = f^k \circ g^k$.
En posant $m = \max(p, q)$, on obtient $(f \circ g)^m = 0$.

b) Le même contre exemple marche également ici : $(f \circ g)(e_2) = e_2$. Le vecteur e_2 est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Exercice 4.08.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue sans remise le tirage une à une de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1 Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2. *On rappelle* que pour tout entier naturel m, on a :

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

et *on admet sans démonstration* que la variance de Y est égale à $\dfrac{n(n+3)}{18}$.

Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. *On admet* que $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$.

Déterminer un équivalent de $E(XY)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La variable aléatoire X prend les valeurs $\{1,2,3\}$. On note N_i l'événement « on a tiré une boule noire au i-ième tirage » et B_i l'événement « on a tiré une boule blanche au i-ième tirage ».

- $P(X=1) = \dfrac{n}{n+2}$;
- $P(X=2) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2/N_1) = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$
- $P(X=3) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1)P(N_2/N_1)P(B_3/N_1 \cap N_2) = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$

Un calcul rapide donne $E(X) = \dfrac{n+3}{n+1}$, ainsi que $V(X) = \dfrac{2n(n+3)}{(n+2)(n+1)^2}$

2. La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\{1,\ldots,n+1\}$.
On note A_i l'événement « on a tiré une boule numérotée 1 au i-ième tirage » et C_i l'événement « on a tiré une boule non numérotée 1 au i-ième tirage ».

- $P(Y=1) = \dfrac{2}{n+2}$.
- En utilisant la formule des probabiités composées, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(C_1 \cap C_2 \ldots C_{k-1} \cap A_k) \\
&= P(C_1)P(C_2/C_1)\ldots P(C_{k-1}/(C_1 \cap \ldots \cap C_{k-2}))P(A_k/(C_1 \cap \ldots \cap C_{k-1})) \\
&= \frac{n}{n+2}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{n-k+2}{n+2-k+2}\frac{2}{n+2-k+1} \\
&= \frac{2(n!)(n+2-k)!}{(n+2)!(n-k+1)!} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Un calcul un peu plus long donne :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+3}{3}$$

et

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{(n+2)(n+3)}{6} - \frac{(n+3)^2}{9} = \frac{n(n+3)}{18}$$

3. On a

$$P(X = Y = 1) = P((X=1)\cap(Y=1)) = \frac{1}{n+2} \text{ et } P((X=1)P(Y=1) = \frac{n}{n+2}\times\frac{2}{n+2}$$

Ces deux expressions ne sont pas égales, sauf pour $n = 2$.

Si $n = 2$, $Y(\Omega) = X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $P(X = 3, Y = 3) = 0 \neq P(X = 3)P(Y = 3)$.
En conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

4. On sait que $\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Donc $|E(XY) - E(X)E(Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Les calculs précédents montrent que $E(X)E(Y) \sim \dfrac{n}{3}$ tandis que $\sqrt{V(X)V(Y)} \sim \sqrt{\dfrac{n}{9}} = o\big(E(X)E(Y)\big)$.

Ainsi, $E(XY) \sim E(X)E(Y) \sim \dfrac{n}{3}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.09.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. A toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction $T_n(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0, \qquad T_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-ntx} dt$$

1. a) Soit $f_a : t \to e^{-at}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel $a > 0$, la fonction $T_n(f_a)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Expliciter son expression.

b) Soit $f_k : t \to t^k$, où $k \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de l'entier k la fonction $T_n(f_k)$ est-elle définie ?

Dans ces cas, l'expliciter.

2. On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que la fonction $T_n(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(T_n(f)(x)\Big)$.

3. On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(xT_n(f)(x)\Big)=\frac{f(0)}{n}.$$

Solution :

1. a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(nx+a)t}dt$ converge si et seulement si $nx+a>0$. Ainsi pour toute valeur de $a>0$, la fonction $T_n(f_a)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $T_n(f_a)(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(a+nx)t}dt=\frac{1}{a+nx}$.

b) Soit $x>0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nxt}dt$ converge pour toute valeur de k car la fonction $t\to t^k e^{-nxt}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. De plus, le changement de variable affine $u=nxt$ donne :

$$T_n(f_k)(x)=\int_0^{+\infty} t^k e^{-nxt}dt=\int_0^{+\infty}\Big(\frac{u}{nx}\Big)^k e^{-u}\frac{du}{nx}=\frac{1}{(nx)^{k+1}}\Gamma(k+1)=\frac{k!}{(nx)^{k+1}}.$$

2. a) Soit M un réel tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $|f(x)|\leqslant M$. Alors :

$$\forall\, x>0,\qquad |f(t)e^{-nxt}|\leqslant Me^{-nxt}\qquad\text{et}\qquad e^{-nxt}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par critères successifs de négligeabilité et de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nxt}dt$ converge absolument, donc converge.

b) Pour tout $x>0$, $|T_n(f)(x)|\leqslant M\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nxt}dt=\frac{M}{nx}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(T_n(f)(x)\Big)=0$.

3. Soit $A>0$. Les fonctions f et $t\to e^{-nxt}$ étant de classe C^1 sur $[0,A]$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^A f(t)e^{-ntx}dt=\Big[-f(t)\frac{e^{-ntx}}{nx}\Big]_0^A+\frac{1}{nx}\int_0^A f'(t)e^{-nxt}dt$$

Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, en faisant tendre A vers $+\infty$, il reste :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-ntx}dt=\frac{f(0)}{nx}+\frac{1}{nx}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-nxt}dt\qquad\Rightarrow\qquad xT_n(f)(x)=\frac{f(0)}{n}+\frac{1}{n}T_n(f')(x).$$

On fait alors tendre x vers $+\infty$. En appliquant la question précédente avec la fonction f' qui est elle aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$, on trouve la formule demandée.

Exercice 4.10.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = P(X = n)$.

1. Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

On désigne alors par f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

On suppose que cette fonction est dérivable en 1.

2. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0,1[$ et que pour tout x de $[0,1]$, on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant f'(1)$.

3. Montrer que la série de terme général na_n est convergente et que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leqslant f'(1)$$

4. En déduire que X admet une espérance et la déterminer en fonction de f.

Solution :

1. Soit $x \in [0,1]$. On a :$0 \leqslant a_n x^n \leqslant a_n$. Or a_n est le terme général d'une série convergente dont la somme est égale à 1. Donc la série $\sum a_n x^n$ est convergente.

2. Soit $x \in [0,1[$. Il vient

$$g(x) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\Big) = \frac{1}{1 - x}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 - x^n)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)$$

Soient $0 \leqslant x \leqslant y < 1$. Alors

$$g(x) - g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) - \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - y^k)\Big)$$

La fonction g est croissante sur $[0,1[$ et g admet une limite à gauche en 1.

Donc, $\forall x \in [0,1[, g(x) \leqslant \lim\limits_{x \to 1} g(x)$ soit $g(x) \leqslant f'(1)$ et on a évidemment $0 \leqslant g(x) \leqslant f'(1)$.

3. Soit $N \geqslant 1$. Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on a $a_n \geqslant 0$. Donc, pour tout x de $[0,1]$,

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leqslant f'(1)$$

Ainsi

$$\forall x \in [0,1[, 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leqslant f'(1)$$

Or, $x \longmapsto \sum_{n=1}^{N}(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k)$ est un polynôme donc est continue en 1. Donc, en faisant tendre x vers 1, on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} na_n \leqslant f'(1)$$

Donc, pour tout $N \geqslant 1$, $0 \leqslant \sum_{n=1}^{N}(na_n) \leqslant f'(1)$. La suite des sommes partielles de terme général na_n positif est croissante et majorée, donc convergente. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ converge et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leqslant f'(1)$$

en faisant tendre N vers $+\infty$.

Soit $x \in [0,1[$. On a $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k)$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
On obtient par comparaison des sommes de séries convergentes

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant na_n \text{ et } 0 \leqslant g(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leqslant f'(1)$$

4 . La série $\sum na_n$ converge donc X admet une espérance et : $\forall x \in [0,1[, 0 \leqslant g(x) \leqslant E(X) \leqslant f'(1)$.
En faisant tendre x vers 1, on obtient $E(X) = f'(1)$.

Exercice 4.11.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher.

La proportion de boules rouges est $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise.

On commence par effectuer des tirages de boules jusqu'à obtention d'une boule rouge ; on note N le nombre de tirages qui ont été nécessaires pour obtenir cette première boule rouge.

On effectue ensuite N tirages successifs et on s'intéresse à X qui représente le nombre de boules rouges obtenues lors de ces N tirages.

1. Quelle est la loi de de la variable aléatoire N ?

2. Pour un entier $n \geqslant 1$, quelle est la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$?

3. Déterminer la loi du couple (N, X).

4. Déterminer la loi de X . On pourra utiliser sans démonstration l'égalité :

$$(*) \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+k}{k} x^m$$

5. Soit un réel $\lambda \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires U et V indépendantes, telles que U suit une loi de Bernouilli de paramètre λ et V suit une loi géométrique de paramètre λ. Déterminer la loi de la variable aléatoire UV.

6. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une suivant une loi de Bernoulli et l'autre une loi géométrique.

7. Exprimer $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de λ.

Solution :

1. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ La variable aléatoire N compte le nombre de tirages pour obtenir la première boule rouge. Les tirages sont identiques et indépendants, N suit donc une loi géométrique de paramètre p : pour $n \geqslant 1$, $P[N = n] = (1-p)^{n-1}p$.

2. On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Sachant que $[N = n]$, on a n répétitions indépendantes du même schéma de Bernouilli de probabilité de succès p d'où une loi binomiale :
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P[X = k | N = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et pour toute autre valeur de $k, P[X = k|N = n] = 0$.

3. La loi du couple (N, X) est donnée, pour $n \geqslant 1$, par :

$$P[(N,X) = (n,k)] = \begin{cases} P_{N=n}(X = k)P[N = n] = \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. On utilise le système complet d'événements $([N = n])_{n\geqslant 1}$: pour $k \geqslant 1$, nécessaire pour initialiser n,

$$\begin{aligned} P[X = k] &= \sum_{n=1}^{+\infty} P[X = k, N = n] = \sum_{n=k}^{+\infty} P[X = k, N = n], \\ &= p^{k+1}(1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-2k} \\ &= p^{k+1}(1-p)^{k-1} \frac{1}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = p^{k+1}(1-p)^{k-1} \frac{1}{p^{k+1}(2-p)^{k+1}} \\ &= \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \end{aligned}$$

Pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} P[X = 0] &= \sum_{n=1}^{+\infty} P[X = 0, N = n] = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^1 (1-p)^{2n-1} \\ &= p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

5. La loi de la variable aléatoire UV est donnée par $UV(\Omega) = \mathbb{N}$, et, pour $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} P[UV = k] &= P[UV = k, U = 0] + P[UV = k, U = 1] = P[V = k, U = 1] \\ &= P[V = k]P[U = 1] = (1-\lambda)^{k-1}\lambda^2 \end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $P[UV = 0] = P[U = 0] = 1 - \lambda$ car $V > 0$.

6. On choisit λ tel que : $1 - \lambda = \dfrac{1-p}{2-p}$. On a alors : $\lambda = \dfrac{1}{2-p}$ et $0 < p < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \lambda < 1$. On a donc bien : $0 < \lambda < 1$. En remplaçant λ par cette expression on obtient : $\forall k \geqslant 0, P[UV = k] = P[X = k]$.

7. L'égalité des lois et l'indépendance des variables U et V entraînent :
$E(X) = E(UV) = E(U)E(V) = \lambda\dfrac{1}{\lambda} = 1$

$$\begin{aligned} V(X) = V(UV) &= E(U^2V^2) - E(UV)^2 = E(U^2)E(V^2) - 1 \\ &= E(U)E(V^2) - 1 = \lambda E(V^2) - 1 \quad (\ U = U^2 \text{ et } E(U) = \lambda) \\ &= \lambda\frac{2-\lambda}{\lambda^2} - 1 = 2(\frac{1}{\lambda} - 1) \end{aligned}$$

car $E(V^2) = V(V) + E(V)^2 = \dfrac{1-\lambda}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2}$

Exercice 4.12.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On lance indéfiniment une pièce truquée amenant Pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On appelle série une succession de Pile ou de Face interrompue par l'événement contraire ; par exemple, dans la suite (Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face) il y a quatre séries successives dont deux séries de Pile de longueur 1 et 3, et deux séries de Face de longueur 2 et 1.

On note L_1 et L_2 les longueurs aléatoires de la première et de la seconde série.

1. Déterminer la loi de L_1 ainsi que son espérance et sa variance (si elles existent).

2. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi marginale de L_2.
Peut-on déterminer l'espérance de L_2 ?

3. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. On a $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[L_1 = k]$ est l'événement « lors des $(k+1)$ premiers lancers, on a obtenu k fois Pile suivi d'un Face » ou « k fois Face suivi d'un Pile ». Ainsi :

$$P(L_1 = k) = p^k q + q^k p$$

L'espérance de L_1 existe puisque les séries de la forme $\sum_k kp^{k-1}$ convergent comme dérivées de séries géométriques.

$$E(L_1) = pq\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}\right) = pq\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}$$

Pour calculer la variance, on utilise le moment factoriel d'ordre 2.

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E^2(X)$$

et

$$E(L_1(L_1-1)) = p^2q\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} + pq^2\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = 2\left(\frac{q^2}{p^2} + \frac{p^2}{q^2}\right)$$

et $V(L_1) = \dfrac{q}{p^2} + \dfrac{p}{q^2} - 2$.

2. Pour $(k_1, k_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'événement $[L_1 = k_1] \cap [L_2 = k_2]$ est l'événement « on a obtenu k_1 fois Pile suivi de k_2 fois Face, puis un Pile » ou « on a obtenu k_1 fois Face suivi de k_2 fois Pile, puis un Face ».

Ainsi :

$$P(L_1 = k_1 \cap L_2 = k_2) = p^{k_1+1}q^{k_2} + q^{k_1+1}p^{k_2}$$

Par définition de la loi marginale, on a :

$$P(L_2 = k_2) = \sum_{k_1=1}^{+\infty} P(L_1 = k_1 \cap L_2 = k_2) = p^2q^{k_2}\frac{1}{1-p} + q^2p^{k_2}\frac{1}{1-q} = p^2q^{k_2-1} + q^2p^{k_2-1}$$

L'espérance de L_2 existe. On reconnaît des sommes de séries classiques. On obtient $E(L_2) = 2$.

3. Supposons L_1 et L_2 indépendantes. Alors :

$$P(L_1 = 1 \cap L_2 = 1) = P(L_1 = 1)P(L_2 = 1) \Rightarrow p^2q + q^2p = 2pq(p^2+q^2) \Leftrightarrow (2p-1)^2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Donc si $p \neq 1/2$, les variables aléatoires L_1 et L_2 ne sont pas indépendantes.

Supposons $p = 1/2$. Alors :

$$P(L_1 = k_1) = \frac{1}{2^{k_1}} \text{ et } P(L_2 = k_2) = \frac{1}{2^{k_2}} \text{ et } P(L_1 = 1 \cap L_2 = 1) = \frac{1}{2^{k_1+k_2}}$$

et les variables aléatoires L_1 et L_2 sont indépendantes.

Ainsi, L_1 et L_2 sont indépendantes si et seulement si $p = 1/2$.

5

QUESTIONS COURTES

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle et vérifiant pour tous x, y réels
$$f(x+y) = f(x)f(y)$$
Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$$
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On appelle point fixe de f, tout réel x tel que $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.

2. Montrer que le nombre de points fixes de f est inférieur ou égal à celui de $f \circ f$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, n[$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
On note Y la partie entière de X et on pose $Z = X - Y$.
Déterminer la loi de Y puis celle de Z.

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de même loi.
On note F la fonction de répartition de X_1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \min(X_1, ..., X_n)$.
On suppose que les X_n possèdent une densité f nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $f(0) > 0$. Montrer que la suite $(nM_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi.

On lance n fois ($n \geqslant 2$) une pièce équilibrée et on considère les événements suivants :
$A =$ « on obtient au plus une fois Pile »
$B =$ « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit U, V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Soit a un réel non nul et I_n la matrice identité d'ordre n. On pose

$$M = aI_n + U\,{}^tV.$$

1. Déterminer les valeurs propres de M.

2. La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle que $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0 sauf à l'intersection de la ligne i et de la colonne j où se trouve un 1.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Calculer $(E_{i,i} + E_{i,j})^2$.
En déduire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices de projecteurs.

On note E l'espace vectoriel des applications $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, bornées, de classe C^1, telles que $f(0) = 0$.
On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$, définie par

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Soit $n \geqslant 2$ et f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f\circ g = g\circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

1. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.

2. En déduire que g est diagonalisable.