Code sujet : 296

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : emLyon business school

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Mardi 23 Avril 2024, de 14h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad x'(t) = -x(t) + e^{-t},$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbf{R}$.

   b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at+b)e^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

   c) Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) : \quad \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

2. a) Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que

   $$(S) \iff X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

   La matrice A est–elle diagonalisable ?

   b) Justifier l'existence d'une unique solution (x,y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

   c) Déterminer cette solution (x,y) en vous aidant de la question 1.

   d) Étudier la convergence de la solution (x,y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

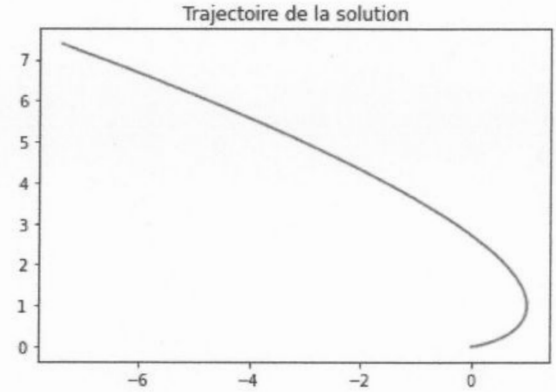
3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci–dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.

   On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```



Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0.

5. a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

   b) Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}$ notée u_k.

   b) Déterminer explicitement u_1.

7. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.$$

   En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

8. a) Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k+1)}{k}.$$

   b) En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

9. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} u_k$?

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{C}$ le sous–ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ défini par :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \ ; \ AM = MA\}.$$

Partie A : Étude de A et de $\mathscr{C}$

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. La matrice A est–elle diagonalisable ?
3. Justifier que $\mathscr{C}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
4. a) Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

   b) Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathscr{C}$.
5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathscr{C}$.

   a) Montrer que le produit MN appartient à $\mathscr{C}$.

   b) Montrer que M et N commutent, c'est–à–dire que $MN = NM$.
6. Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathscr{C}$.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathscr{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.
Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

   a) Montrer : $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.

   b) En déduire :

$$P(M) = 0_2 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + ua + v &= 0 \\ 2ab + ub &= 0 \end{cases}$$

8. Dans cette question, on montre que le système ci–dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ en distinguant deux cas :

   a) Si $\Delta \geqslant 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.

   b) Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution (a, b) avec $b \neq 0$.
9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \quad \varphi(M) = AMA.$$

On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1}.
12. a) Calculer $\varphi(E_1), \ldots, \varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

    b) Justifier sans calcul que B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}$.
    (On pourra remarquer que $B^2 = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4)

    c) Déterminer une base de chaque sous–espace propre de B.

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k–ième tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1;N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.
2. Le programme en langage Python ci–dessous définit une fonction « `ajout` » qui prend en argument une liste `L` et un entier `x`.

```
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

   Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste `L`.

3. Recopier et compléter la fonction Python « `Simul_T` » ci–dessous.
   Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1;N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :
   - `L` la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués;
   - `k` le rang du tirage en cours;
   - `x` le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = ...
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$.
   Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`.
   Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.
   a) Décrire l'évènement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbf{N}^*$.
   b) En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.
   c) Montrer que $P(T_2 = k) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
   Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.

Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1, \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}–ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i - 1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variable aléatoires $Z_1, \ldots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2; N]\!]$.
   a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N - i + 1}{N}$.
   b) Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
10. Soit $i \in [\![1; N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \ldots, Z_i$.

Loi de T_3

11. a) Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbf{N}^*$.
    b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
    $$P(Z_2 + Z_3 = n) \quad = \quad \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right).$$
    c) Déterminer la loi de T_3.

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1; N]\!]$, montrer que $E(T_i) \; = \; N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.

13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$, montrer que

$$\operatorname{cov}(T_i, T_j) = V(T_i).$$

où $\operatorname{cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1186 – D'après documents fournis