**Voici les questions sans préparation 2003 qu'à bien voulu nous fournir l'ESCP. Suivent quelques bribes de correction. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?**

# QUESTIONS COURTES 2003

**F 1** Immédiat.

**F 2** Demande un peu de travail.

**F 3** Demande un peu de réflexion.

## Question 1 ESCP 2003 F 3

Soient $A, B$ deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de $A$ est également vecteur propre de $B$.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

## Question 2 ESCP 2003 F 2

Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 4 et une variance non nulle. Minimiser la quantité

$$f(a,b) = E[(X^2 - a - bX)^2]$$

lorsque $(a, b)$ parcourt $\mathbb{R}^2$.

## Question 3 ESCP 2003 F 2

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient $H_1, H_2$ deux hyperplans de $E$ (sous–espaces vectoriels de dimension $n-1$). Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$ ?

## Question 4 ESCP 2003 F 3

Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface totale $S$, quel est celui (quels sont ceux) de volume maximal ?

## Question 5 ESCP 2003 F 2

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X^2$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer $f$.

## Question 6 ESCP 2003 F 2

Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d)$ réels pour que $\varphi$ définie sur $E^2$ par

$$\varphi(X, Y) = {}^tX \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y$$

soit un produit scalaire sur $E$.

## Question 7 ESCP 2003 F 2

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$. A-t-on $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$ ?

## Question 8 ESCP 2003 F 3

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut–on avoir $M$ semblable à $2M$ ? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

---

## Question 9 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Pour allumer un feu, on dispose de $N$ allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in ]0, 1[$. Vous finissez par allumer le feu.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes. Déterminer la loi et l'espérance de $X$.

---

## Question 10 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

---

## Question 1 ESCP 2003

Soient $A, B$ deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de $A$ est également vecteur propre de $B$.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

---

Il existe une base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associées aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soit $Q$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$.

Alors $Q^{-1} A Q = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \mu_i \in \mathbb{R}$, $BX_i = \mu_i X_i$ (tout vecteur propre de $A$ est vecteur propre de $B$)

Alors $Q^{-1} B Q = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Posons $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n))$

$\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$ car $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts

($\varphi$ linéaire et injective donc $\varphi$ iso car $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$).

Alors $\exists !\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.

Alors $P(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Donc $P(Q^{-1} A Q) = Q^{-1} B Q$ ; $Q^{-1} P(A) Q = Q^{-1} B Q$ ; $P(A) = B$.

**Exercice ..** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Montrer que $A^{-1}$ est un polynôme en $A$.

R

**Question 2 ESCP 2003**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 4 et une variance non nulle. Minimiser la quantité

$$f(a,b) = E[(X^2 - a - bX)^2]$$

lorsque $(a,b)$ parcourt $\mathbb{R}^2$.

---

Posons $m_k = E(X^k)$ pour tout $k \in [\![1,4]\!]$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a,b) = a^2 - 2am_2 + b^2 m_2 + 2abm_1 - 2bm_3 + m_4$.

$f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 0 \iff \begin{cases} 2a - 2m_2 + 2bm_1 = 0 \\ 2bm_2 + 2am_1 - 2m_3 = 0 \end{cases} \underset{\uparrow}{\iff} \begin{cases} a = \dfrac{m_2^2 - m_1 m_3}{m_2 - m_1^2} \\ b = \dfrac{m_3 - m_1 m_2}{m_2 - m_1^2} \end{cases}$$

$V(X) = m_2 - m_1^2 \neq 0$

Un point critique et un seul $(a_0, b_0) = \left( \dfrac{m_2^2 - m_1 m_3}{m_2 - m_1^2}, \dfrac{m_3 - m_1 m_2}{m_2 - m_1^2} \right)$.

$$f(a_0 + \alpha, b_0 + \beta) - f(a_0, b_0) = \alpha^2 + \beta^2 m_2 + 2\alpha\beta m_1 = (\alpha + m_1 \beta)^2 + (m_2 - m_1^2)\beta^2$$

$$= (\alpha + m_1\beta)^2 + \underbrace{V(X)}_{>0}\beta^2 \geqslant 0$$

$f$ possède un minimum absolu atteint au seul point $(a_0, b_0)$ avec

$a_0 = \dfrac{m_2^2 - m_1 m_3}{m_2 - m_1^2}$ et $b_0 = \dfrac{m_3 - m_1 m_2}{m_2 - m_1^2}$ forme canonique en $a_0$ !

$$f(a_0,b_0) = (\underbrace{a_0 - m_2 + b_0 m_1}_{=0})^2 - (-m_2 + b_0 m_1)^2 + b_0^2 m_2 - 2b_0 m_3 + m_4$$

$$f(a_0,b_0) = (m_2 - m_1^2)\, b_0^2 - 2b_0(m_3 - m_1 m_2) + m_4 - m_2^2$$

$$f(a_0,b_0) = (m_2 - m_1^2)\frac{(m_3 - m_1 m_2)^2}{(m_2 - m_1^2)^2} - 2\,\frac{m_3 - m_1 m_2}{m_2 - m_1^2}(m_3 - m_1 m_2) + m_4 - m_2^2$$

$$f(a_0,b_0) = -\frac{(m_3 - m_1 m_2)^2}{m_2 - m_1^2} + m_4 - m_2^2 = -\frac{(\mathrm{cov}(X,X^2))^2}{V(X)} + V(X^2)$$

$$\underline{\underline{f(a_0,b_0) = V(X^2)\left[1 - \rho_{X,X^2}^2\right]}}.$$

R

**Question 3** **ESCP 2003** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient $H_1, H_2$ deux hyperplans de $E$ (sous–espaces vectoriels de dimension $n-1$). Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$ ?

---

$n = \dim E \geqslant \dim(H_1 + H_2) = 2(n-1) - \dim(H_1 \cap H_2)$

$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant 2n - 2 - n = n - 2$

Or $\dim(H_1 \cap H_2) \leqslant \dim H_1 = n-1$. Donc $n-2 \leqslant \dim(H_1 \cap H_2) \leqslant n-1$.

1^er^ Cas.. $H_1 = H_2$. Alors $H_1 \cap H_2 = H_1$ ; $\dim(H_1 \cap H_2) = n-1$

2^e^ Cas.. $H_1 \neq H_2$

Supposons $\dim(H_1 \cap H_2) = n-1$. Alors $H_1 \cap H_2 \subset H_1$, $H_1 \cap H_2 \subset H_2$,

$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1$ et $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_2$.

Alors $H_1 \cap H_2 = H_1$ et $H_1 \cap H_2 = H_2$ ; $H_1 = H_2$ !

Ainsi $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

<u>Conclusion..</u> $\dim(H_1 \cap H_2) = \begin{cases} n-2 & \text{si } H_1 \neq H_2 \\ n-1 & \text{si } H_1 = H_2 \end{cases}$

R

**Question 4** **ESCP 2003** Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface totale $S$, quel est celui (quels sont ceux) de volume maximal ?

Soit $a, b, c$ les dimensions du parallélépipède.

Sa volume est $abc$. Sa surface est $2ab+2bc+2ca$.

Le problème est $\begin{cases} \text{Max } abc \\ \text{sc } 2ab+2bc+2ca = S \end{cases}$ ... mais la contrainte n'est pas linéaire.

On pose $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\forall (x,y,z) \in \Omega$, $f(x,y,z) = xyz$ et $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2xy+2yz+2zx = S\}$

On cherche le maximum de $f$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Supposons que $f$ admette en $A=(a,b,c)$ un maximum sous la contrainte $\mathcal{C}$.

$A \in \mathcal{C} \cap \Omega$ donc $c = \dfrac{S-2ab}{2a+2b}$. Soit $X=(x,y,z) \in \Omega \cap \mathcal{C}$.

$x>0, y>0, z = \dfrac{S-2xy}{2(x+y)} > 0$ et $f\left(x,y,\dfrac{S-2xy}{2(x+y)}\right) \leqslant f\left(a,b,\dfrac{S-2ab}{2(a+b)}\right)$.

Posons $\Omega' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0, \dfrac{S-2xy}{2(x+y)}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0, S-2xy>0\}$.

et $\forall (x,y) \in \Omega'$, $h(x,y) = f\left(x,y,\dfrac{S-2xy}{2(x+y)}\right) = xy\,\dfrac{S-2xy}{2(x+y)}$.

$\Omega'$ est un ouvert et $h$ admet en $(a,b)$ un maximum. Comme $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$

sur $\Omega'$, $(a,b)$ est un point critique de $h$. $\nabla h(a,b) = 0$.

Alors $\dfrac{b}{2(a+b)^2}\left[(S-4ab)(a+b) - Sa + 2a^2b\right] = \dfrac{a}{2(a+b)^2}\left[(S-4ab)(a+b) - Sb + 2ab^2\right] = 0$.

$\begin{cases} (S-4ab)(a+b) - Sa + 2a^2b = 0 \\ Sa - 2a^2b = Sb - 2ab^2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 0 = S(a-b) - 2ab(a-b) = (a-b)(S-2ab) \\ (S-4ab)(a+b) - Sa + 2a^2b = 0 \end{cases}$ ;

Or $S-2ab>0$ donc $\begin{cases} a=b \\ 0 = (S-4a^2)2a - Sa + 2a^3 = a(S-6a^2) \end{cases}$ ; $a=b=\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

Alors $c = \dfrac{S-2ab}{2a+2b} = \dfrac{S-2\times\frac{S}{6}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \dfrac{\frac{2S}{3}}{4\sqrt{S/6}} = \dfrac{\frac{S}{6}}{\sqrt{S/6}} = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$ ; $A = \left(\sqrt{\dfrac{S}{6}}, \sqrt{\dfrac{S}{6}}, \sqrt{\dfrac{S}{6}}\right)$.

R.

(*) Posons $A=\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\sqrt{\frac{5}{6}},\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$. Montrons que $f$ admet en $A$ un maximum sous la contrainte $\mathcal{E}$. $f(A)=\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^3=\left(\frac{5}{6}\right)^{3/2}$.

Soit $(x,y,z)\in\mathcal{E}\cap\mathcal{Q}$. $x>0, y>0, z>0$ et $2xy+2yz+2zx=5$

Rappel : $\forall(u,v,w)\in\mathbb{R}_+$, $\sqrt[3]{uvw}\leq\frac{u+v+w}{3}$.

$$\frac{5}{6}=\frac{xy+yz+zx}{3}\geq\sqrt[3]{(xyz)^2}=(f(X))^{2/3}.\ \text{Alors}\ f(X)\leq\left(\frac{5}{6}\right)^{3/2}=f(A).$$

Ainsi le volume est maximal si et seulement si les dimensions du parallélépipède sont $\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Exercice : Montrer que $\forall(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$, $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Indication : si $x_1>0, x_2>0,\dots,x_n>0$ appliquer $\ln t\leq t-1$ à $\frac{x_i}{s}$ où $s=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

**Question 5** **ESCP 2003** Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X^2$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer $f$.

---

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x \in ]0,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[ \\ 0 & \end{cases}$

$g$ et $h$ sont deux densités ; elles coïncident sur $\mathbb{R} \setminus D$ où $D$ est fini.

$\forall x \in ]0,+\infty[ - D$, $\lambda e^{-\lambda x} = h(x) = g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ est paire}}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$.

$\forall x \in ]0,+\infty[ - D$, $f(\sqrt{x}) = \lambda \sqrt{x}\, e^{-\lambda x}$

Or $x \mapsto \lambda\sqrt{x}\, e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto f(\sqrt{x})$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

Donc $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f(\sqrt{x}) = \lambda\sqrt{x}\, e^{-\lambda x}$

Ainsi $\forall x \in ]0,+\infty[$, $f(x) = \lambda x\, e^{-\lambda x^2}$

$f$ est continue en 0 donc à droite en 0. Par passage à la limite à droite en 0 il vient $f(0) = 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \lambda x\, e^{-\lambda x^2}$

Soit $x \in ]-\infty, 0[$. $f(x) = f(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ -x \in ]0,+\infty[}}{=} \lambda(-x) e^{-\lambda(-x)^2} = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$

Finalement $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}.}}$

R

**Question 6** **ESCP 2003** Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d)$ réels pour que $\varphi$ définie sur $E^2$ par

$$\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y$$

soit un produit scalaire sur $E$.

---

• Supposons que $\varphi$ est un produit scalaire. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\varphi(E_1, E_2) = \varphi(E_2, E_1)$ ; ${}^tE_1 A E_2 = {}^tE_2 A E_1$ ; $b = c$. $A$ est symétrique.

$E_1 \neq 0$ donc $\varphi(E_1, E_1) > 0$ ; alors $a > 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ et $X \neq 0_E$.

$0 < \varphi(X, X) = {}^tXAX = (x, y)\begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + dy^2$

$0 < a\left[\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + y^2\left(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)\right]$ ; $0 < \left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + y^2\frac{ad - b^2}{a^2}$ car $a > 0$.

En prenant $x = -\frac{b}{a}$ et $y = 1$ on obtient $\frac{ad - b^2}{a^2} > 0$ ; $ad - b^2 > 0$

Si $\varphi$ est un produit scalaire $c = b$, $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

• Supposons $c = b$, $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$

→ $\varphi$ est clairement linéaire à droite et symétrique.

→ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$. $\varphi(X, X) = {}^tXAX = ax^2 + 2bxy + dy^2$

$$\varphi(X, X) = \underbrace{a}_{>0}\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{ad - b^2}{a^2}}_{>0}\underbrace{y^2}_{\geqslant 0}\right] \geqslant 0.$$

Supposons $\varphi(X, X) = 0$. Alors $\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 = \frac{ad - b^2}{a^2}y^2 = 0$.

$x = -\frac{b}{a}y$ et $y = 0$ car $ad - b^2 \neq 0$ ; $x = y = 0$ ; $X = 0_E$.

Ceci achève de montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.

<u>Ex</u>.. $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall (X, Y) \in E^2$, $\varphi(X, Y) = {}^tXAY$.

Notez que $\varphi$ est un produit scalaire ssi 1) $A$ est symétrique

2) les valeurs propres de $A$ sont strictement positives.

---

**Question 7** **ESCP 2003** Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$ ?

---

$X_n(\Omega) = \{\frac{1}{n}, n\}$. $P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ et $P(X_n = n) = \frac{1}{n+1}$.

(*) $(X_n)$ converge en loi vers la variable certaine nulle (et même en proba)

$\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = 1$ !

(*) Détaillons ! Notons $F_n$ la fonction de répartition de $X_n$

$\forall x \in ]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0$ ; $\forall x \in [\frac{1}{n}, n[$, $F_n(x) = P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ et

$\forall x \in [n, +\infty[$, $F_n(x) = 1$.

1) $\forall x \in ]-\infty, 0]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

2) Soit $x \in ]0, +\infty[$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $x \in [\frac{1}{n}, n[$ car

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $F_n(x) = \frac{n}{n+1}$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$.

Notons $G$ la fonction de répartition d'une variable certaine nulle.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[ \end{cases}$
- $G$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas continue en 0.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = G(x)$.

Donc $(X_n)$ converge en loi vers la variable certaine nulle.

---

**Question 8** **ESCP 2003** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut–on avoir $M$ semblable à $2M$ ? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

---

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. $M^2 = 0$.

Pour $P = \mathrm{Diag}(2,1,1)$ $P$ est inversible.

$$PM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $PM = 2MP$ ; $PMP^{-1} = 2M$ ; $M$ et $2M$ sont semblables.

**Question 9** **ESCP 2003** Pour allumer un feu, on dispose de $N$ allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in ]0,1[$. Vous finissez par allumer le feu.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restantes. Déterminer la loi et l'espérance de $X$.

---

Notons T la var égale au nombre d'allumettes non utilisées.
Notons A l'évènement le feu a été allumé.

La loi de X est en fait la loi de T sachant A.

Ainsi on peut vaguement considérer (!) que :

→ X prend ses valeurs dans $[\![0, N-1]\!]$

→ $\forall k \in [\![0, N-1]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{P([T=k] \cap A)}{P(A)} = \dfrac{p\, q^{N-k-1}}{1-q^N}$ où $q = 1-p$.

→ $E(X) = \dfrac{p}{1-q^N}\, q^{N-2} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} k \left(\frac{1}{q}\right)^{k-1}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1-x^N}{1-x}$ ; en dérivant :

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} k\, x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\left[-N x^{N-1}(1-x) + 1 - x^N\right]$

$E(X) = \dfrac{p\, q^{N-2}}{1-q^N} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}\left[-N \dfrac{1}{q^{N-1}}\left(1-\dfrac{1}{q}\right) + 1 - \dfrac{1}{q^N}\right]$

$E(X) = \dfrac{p\, q^{N-2}}{1-q^N} \dfrac{q^2}{p^2}\left[1 - \dfrac{N}{q^{N-1}} + \dfrac{N-1}{q^N}\right] = \dfrac{1}{p}\dfrac{1}{1-q^N}\left[q^N - Nq + N - 1\right]$

$E(X) = \dfrac{N}{1-q^N} - \dfrac{1}{p}$.

---

**Question 10** **ESCP 2003** Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?
Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

---

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de matrices inversibles et diagonalisables !