R.

Question 1 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ MARHABEN

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = {}^tA$.

Quand la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Montrer que A est orthogonale.

$A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^2) = {}^t(A \times A) = {}^tA\,{}^tA = A^2A^2 = A^4$.

Comme A est inversible : $I_n = AA^{-1} = A^4A^{-1} = A^3$. $A^3 - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de A donc la seul zéro dans $\mathbb{R}$ est 1. Alors $Sp_{\mathbb{R}}A \subset \{1\}$.

• Supposons que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. $Sp_{\mathbb{R}}A \neq \emptyset$ et $Sp_{\mathbb{R}}A \subset \{1\}$ donc $Sp_{\mathbb{R}}A = \{1\}$.

De plus $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(A, 1)$. Ainsi $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim SEP(A, 1) = n - rg(A - I_n)$.

Donc $rg(A - I_n) = 0$. $A - I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $A = I_n$.

• Réciproquement supposons que $A = I_n$. Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $A^2 = {}^tA$

$(A^2 = I_n^2 = I_n = {}^tI_n = {}^tA)$.

Ainsi <u>A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = I_n$.</u>

${}^tAA = A^2A = A^3 = I_n$. Donc <u>$A$ est orthogonale.</u>

Question 2 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X\,g(X)$ et $g'(X)$ admettent une espérance.

a) Montrer que $E\big(g'(X)\big) = E\big(X\,g(X)\big)$.

b) En déduire les valeurs des moments de X.

---

a) Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$. φ est une densité de X et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -t\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2} = -t\varphi(t)$.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, g' et $t \mapsto t g(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $E(g'(X))$ et $E(X g(X))$ existent.

Le théorème de transfert montre alors que : $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ sont absolument convergentes, $E(g'(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $E(X g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$.

Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt \underset{g \text{ et } \varphi \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}{\overset{\text{IPP}}{=}} \big[g(t)\varphi(t)\big]_0^A - \int_0^A g(t)\varphi'(t)\,dt \underset{\varphi'(t) = -t\varphi(t)}{=} g(A)\varphi(A) - g(0)\varphi(0) + \int_0^A g(t)\, t\varphi(t)\,dt.$$

$\int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt = g(A)\varphi(A) - g(0)\varphi(0) + \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt$. (1) On a aussi :

$\int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt = -g(A)\varphi(A) + g(0)\varphi(0) + \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ (2),

$g(A)\varphi(A) = \int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt + g(0)\varphi(0) - \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt$ (3),

$g(A)\varphi(A) = -\int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt + g(0)\varphi(0) + \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ (4).

$\int_0^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ convergent donc $A \mapsto \int_0^A g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $A \mapsto \int_0^A t g(t)\varphi(t)\,dt$ ont une limite finie en $+\infty$. Alors (3) montre que $A \mapsto g(A)\varphi(A)$ a une limite finie en $+\infty$. Notons la L.

$\int_{-\infty}^0 g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ convergent donc $A \mapsto \int_A^0 g'(t)\varphi(t)\,dt$ et $A \mapsto \int_A^0 t g(t)\varphi(t)\,dt$ ont une limite finie en $-\infty$. Alors (4) montre que $A \mapsto g(A)\varphi(A)$ a une limite finie en $-\infty$ que nous notons ℓ.

R.

Supposons $L \neq 0$. Alors $g(t)\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} L$. $|g(t)\varphi(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |L| = |L|\frac{1}{t^0}$.

De plus $\int_0^{+\infty} |L|\frac{1}{t^0}\,dt$ diverge et $t\mapsto |L|\frac{1}{t^0}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

Alors $\int_0^{+\infty} |g(t)\varphi(t)|\,dt$ diverge. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)\varphi(t)|$ diverge. Cela contredit l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)\,dt$. Ainsi $L = 0$.

Un raisonnement analogue donne $\ell = 0$. Alors en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1) et vers $-\infty$ dans (2) il vient :

$\int_0^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt = -g(0)\varphi(0) + \int_0^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{0} g'(t)\varphi(t)\,dt = g(0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} t g(t)\varphi(t)\,dt$

En ajoutant ces deux égalités on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\varphi(t)\,dt$.

Donc $\underline{\underline{E(g'(X)) = E(Xg(X))}}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^{k+2}\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^{k+2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x^2/2)^{\frac{k+2}{2}}}{e^{x^2/2}}\right] = 0$ par

croissance comparée. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 x^k\varphi(x)) = 0$. Alors :

1) $x^k\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2) $\forall x \in [1,+\infty[$, $x^k\varphi(x) \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$.

φ est paire sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^k$ a la parité de k sur $\mathbb{R}$. Donc $x \mapsto x^k\varphi(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ si k est pair et impaire sur $\mathbb{R}$ si k est impair.

La convergence de $\int_0^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$ donne alors la convergence de $\int_{-\infty}^{0} x^k\varphi(x)\,dx$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx$ converge. Cela suffit pour dire que X possède un moment d'ordre k ou que X^k possède une espérance.

R.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k que nous noterons $m_k(X)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $m_k(X) = E(X^k)$.

Si k est impair $m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^k \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} x^k \varphi(x)dx = -\int_0^{+\infty} x^k \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} x^k \varphi(x)dx = 0$

Si k est impair $m_k(X) = 0$. $\forall r \in \mathbb{N}$, $m_{2r+1}(X) = 0$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2r-1}$. g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (2r-1)x^{2r-2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x g(x) = x^{2r}$ et $g'(x) = (2r-1)x^{2r-2}$.

Alors $E(Xg(X))$ existe et vaut $m_{2r}(X)$, et $E(g'(X))$ existe et vaut $(2r-1)m_{2r-2}(X)$

Alors d'après Q1 $m_{2r}(X) = E(Xg(X)) = E(g'(X)) = (2r-1)m_{2r-2}(X)$.

$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $m_{2r}(X) = (2r-1)\, m_{2r-2}(X)$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$

$\frac{1}{2r-1} m_{2r}(X) = m_{2r-2}(X)$; $\frac{2r}{(2r)(2r-1)} m_{2r}(X) = m_{2r-2}(X)$;

$\frac{2r}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{1}{(2r-2)!} m_{2r-2}(X)$; $\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{2^{r-1}(r-1)!}{(2r-2)!} m_{2r-2}(X)$.

Donc la suite $\left(\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X)\right)_{r \in \mathbb{N}}$ est constante.

Alors $\forall r \in \mathbb{N}$, $\frac{2^r r!}{(2r)!} m_{2r}(X) = \frac{2^0\, 0!}{(2\times 0)!} m_{2\times 0}(X) = m_0(X) = 1$;

$\forall r \in \mathbb{N}$, $m_{2r}(X) = \frac{(2r)!}{2^r r!}$. $\qquad \forall r \in \mathbb{N}$, $m_{2r+1}(X) = 0$.

Notons quand même que $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $m_{2r}(X) = (2r-1)(2r-3)\cdots 1 = \prod_{k=1}^{r} (2k-1)$.

R.

Question 3 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 2}}$

f est une fonction T-périodique sur $\mathbb{R}$, avec $T > 0$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que T s'annule en p points distincts x_1, x_2, ..., x_p de $[0, T[$ tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.

Montrer que f' s'annule en au moins p points distincts de $[0,\mathrm{T}[$ et distincts de x_1, x_2, ..., x_p.

• 1^er^ Cas.. $x_1 = 0$. Alors $f(T) = f(0) = f(x_1) = 0$. Posons $x_{p+1} = T$.

$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_p < x_{p+1} = T$ et $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{p+1})$ $(= 0)$.

De plus f est dérivable sur IR donc sur $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_p, x_{p+1}]$.

Le théorème de Rolle montre alors que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\exists\, y_k \in]x_k, x_{k+1}[$, $f'(y_k) = 0$.

Alors $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont p zéros distincts de f' appartenant à $[0, T[$ et distincts de $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Ceci achève de montrer le résultat pour $x_1 = 0$. •

• 2^ème^ Cas.. $x_1 > 0$. Nous allons alors montrer que f' s'annule en au moins un point de $[0, x_1[\cup]x_p, T[$.

a) $f(0) = 0$. Le théorème de Rolle appliqué à f sur $[0, x_1]$ montre l'existence d'un zéro pour f' dans $]0, x_1[$ donc dans $[0, x_1[\cup]x_p, T[$

b) $f(0) \neq 0$. Quitte à changer f en $-f$ nous supposerons que $f(0) > 0$.

i) $f'(0) = 0$. Alors f' s'annule en un point de $[0, x_1[\cup]x_p, T[$!

ii) $f'(0) > 0$. Supposons que $\forall x \in [0, x_1[$, $f(x) \leqslant f(0)$.

Alors $\forall x \in]0, x_1[$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leqslant 0$. En faisant tendre x vers 0 par valeurs supérieures il vient $f'(0) \leqslant 0$!

Donc $\exists\, \alpha \in [0, x_1[$, $f(\alpha) > f(0)$. Nécessairement $\alpha \in]0, x_1[$ car $f(\alpha) > f(0)$.
sur $]\alpha, x_1[$

f est continue sur $[\alpha, x_1]$ donc f prend toutes les valeurs comprises strictement entre $f(x_1)$ qui vaut 0 et $f(\alpha)$ qui est strictement supérieur à $f(0)$. De plus $f(0) > 0$ donc $\exists\, \beta \in]\alpha, x_1[$, $f(\beta) = f(0)$. En appliquant Rolle à f sur $[\beta, x_1]$ on obtient l'existence de γ dans $]\beta, x_1[$ tel que $f'(\gamma) = 0$.

Donc f' s'annule sur $[0, x_1[\cup]x_p, T[$.

R

(ii) <u>$f'(0)<0$</u>. On pourrait sans doute se ramener à (i) en considérant $g : x \mapsto f(T-x)$ non ? Mais on ne change pas une solution qui gagne.

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x+T)=f(x)$. En dérivant il vient $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x+T)=f'(x)$.

Alors $f'(T)=f'(0)<0$. Supposons que $\forall x\in]x_p,T[, f(x)\leq f(T)$

Alors $\forall x\in]x_p,T[, \dfrac{f(x)-f(T)}{x-T}\geq 0$. En faisant tendre x vers T par valeurs inférieures il vient $f'(T)\geq 0$! Donc $\exists \alpha'\in]x_p,T[, f(\alpha')>f(T)$.

f est continue sur $[x_p,\alpha']$ donc f prend sur $]x_p,\alpha'[$ toutes les valeurs strictement comprises entre $f(x_p)$ qui vaut 0 et $f(\alpha')$ qui est strictement supérieure à $f(T)$. $f(x_p)=0<f(0)=f(T)<f(\alpha')$.

Ainsi $\exists \beta'\in]x_p,\alpha'[, f(\beta')=f(T)$.

Rolle appliqué à f sur $[\beta',T]$ montre que $\exists \delta\in]\beta',T[, f'(\delta)=0$.

Or $\delta\in]x_p,T[$ car $x_p\leq\beta'$.

f' s'annule sur $]x_p,T[$ donc sur $[0,x_1[\cup]x_p,T[$.

<u>(Si $x_1>0$:) f' s'annule en au moins un point de $[0,x_1[\cup]x_p,T[$.</u> Achevons le cas $x_1>0$.

<u>1er cas</u>.. $p=1$. f' s'annule en au moins un point de $[0,x_1[\cup]x_1,T[$.
Ainsi f' s'annule en au moins un point de $[0,T[$ distinct de x_1.

<u>2ème cas</u>.. $p>1$ f' s'annule déjà en au moins un point y_0 de $[0,x_1[\cup]x_p,T[$.

Pour tout k dans $[\![1,p-1]\!]$, f est dérivable sur $[x_k,x_{k+1}]$ et $f(x_k)=0=f(x_{k+1})$.

Rolle montre alors que : $\forall k\in[\![1,p-1]\!], \exists y_k\in]x_k,x_{k+1}[, f'(y_k)=0$.

Alors $y_0,y_1,\dots,y_{p-1}$ sont p éléments distincts de $[0,T[$ qui annulent f' et qui sont distincts de $x_1,x_2,\dots,x_p$: ceci achève de montrer que :

<u>f' s'annule en au moins p points distincts de $[0,T[$ et distincts de $x_1,x_2,\dots,x_p$.</u>

R.

Question 4 ESCP 2012 F2 P. KONIECZNY

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme $X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$.

a). Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n' possède une racine et une seule dans $]0,1[$ que nous noterons r_n.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} r_n$.

---

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. P_n est dérivable sur $[k, k+1]$ et $P_n(k) = P_n(k+1) = 0$.

Ceci suffit pour utiliser le théorème de Rolle et dire qu'il existe un élément β_k de $]k, k+1[$ tel que $P_n'(\beta_k) = 0$.

Alors $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ sont n zéros distincts de P_n'.

$\deg P_n = n+1$ donc $\deg P_n' = n$. P_n' admet au plus n racines.

Alors $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ sont LES racines de P_n'.

Notons que $\beta_0 \in]0,1[$ et que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\beta_k \in]k, k+1[\subset]1, +\infty[$.
si $n \geqslant 2$...

Ainsi <u>P_n' possède une racine et une seule dans $]0,1[$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.</u>

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ nous noterons, dans la suite, r_n cette racine.

<u>Remarque</u>.. $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) <u>Rappel</u> | Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ alors $\ln|u|$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(\ln|u|)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $f_n(x) = \ln|P_n(x)|$.

P_n est dérivable et non nulle sur $]-\infty, 0[,]0,1[, \dots,]n-1, n[,]n, +\infty[$ donc f_n est dérivable sur chacun de ces intervalles et sa dérivée coïncide sur ces intervalles avec P_n'/P_n.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $f_n'(x) = \dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}$.

Mais $\forall x \in \mathbb{R} - [\![0,n]\!]$, $f_n(x) = \ln\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x-k)\right| = \ln\left[\prod_{k=0}^{n}|x-k|\right] = \sum_{k=0}^{n} \ln|x-k|$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$, $x \mapsto x-k$ est dérivable et non nulle sur $]-\infty, k[$ et $]k, +\infty[$.

Alors $v_k : x \mapsto \ln|x-k|$ est dérivable sur $]-\infty, k[$ et sur $]k, +\infty[$. De plus $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\}$, $v_k'(x) = \dfrac{1}{x-k}$.

R.

$\forall x \in \mathbb{R} - [\![1,n]\!]$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} - [\![1,n]\!]$, $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = f'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v'_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - [\![1,n]\!]$, $\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r_n - k} = \frac{P'_n(r_n)}{P_n(r_n)} = 0$. $\frac{1}{r_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_n - k} = 0$.

Alors $\frac{1}{r_n} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_n - k}$. $r_n > 0$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $r_n - k > -k$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $k - r_n < k$ et $k - r_n > 0$ $(r_n \in]0,1[)$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{1}{k} < \frac{1}{k - r_n}$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - r_n} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_n - k} = \frac{1}{r_n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{r_n}$.

Or la série de terme général en $\frac{1}{k}$ est divergente et à termes positifs. Ainsi la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ et ainsi $\lim \frac{1}{r_n} = +\infty$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1/r_n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} r_n = 0$.

Question 5 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Déterminer la probabilité de l'événement $\{3X = 2Y\}$.

Soit $(k,k')\in(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $3k'=2k$; 2 divise $3k'$ donc 2 divise k'...

$\exists r\in\mathbb{N}^*$, $k'=2r$. Alors $6r=2k$; $k=3r$.

Réciproquement soit $r\in\mathbb{N}^*$. Posons $k'=2r$ et $k=3r$. $3k'=6r=2(3r)=2k$.

Ainsi $\{(k,k')\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \mid 3k'=2k\}=\{(2r,3r)\,;\,r\in\mathbb{N}^*\}$.

Rappelons que X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\{3X=2Y\}=\{\omega\in\Omega \mid 3X(\omega)=2Y(\omega)\}=\{\omega\in\Omega \mid \exists r\in\mathbb{N}^*, X(\omega)=2r \text{ et } Y(\omega)=3r\}$.

$$\{3X=2Y\}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*}\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=2r \text{ et } Y(\omega)=3r\}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*}\left(\{X=2r\}\cap\{Y=3r\}\right).$$

Les éléments de cette réunion étant deux à deux incompatibles il vient :

$$P(3X=2Y)=\sum_{r=1}^{+\infty}P(\{X=2r\}\cap\{Y=3r\}).$$ Par indépendance on obtient :

$$P(3X=2Y)=\sum_{r=1}^{+\infty}P(X=2r)\,P(Y=3r)=\sum_{r=1}^{+\infty}p\,q^{2r-1}\,p\,q^{3r-1}$$

$$P(3X=2Y)=p^2\sum_{r=1}^{+\infty}q^{5r-2}=p^2q^3\sum_{r=1}^{+\infty}(q^5)^{r-1}=p^2q^3\sum_{r=0}^{+\infty}(q^5)^r=\frac{p^2q^3}{1-q^5}.$$

$$\underline{\underline{P(3X=2Y)=\frac{p^2q^3}{1-q^5}.}}$$

Question 6 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(X = k)$ et on suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) p_{k-1}$ ou a et b sont deux réels réels tels que $a \leqslant 0$ et $b > 0$.

La variable aléatoire X peut-elle suivre :

a) une loi exponentielle ?

b) une loi de Poisson ?

c) une loi binomiale ?

d) une loi géométrique ?

Deux remarques. 1/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$

2/ Si $p_0 = 0$, une récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = 0$ et on a $\displaystyle 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 0$! donc $p_0 \neq 0$.

a) Supposons que X suive une loi exponentielle. Alors X est une variable aléatoire à densité donc $\displaystyle 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 0$!

X ne peut pas suivre une loi exponentielle.

b) • Supposons que X suive une loi de Poisson. Soit λ son paramètre. $\lambda > 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(X=k) = p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) p_{k-1} = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$; $\dfrac{\lambda}{k} = a + \dfrac{b}{k}$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

En particulier $\dfrac{\lambda}{1} = a + \dfrac{b}{1}$ et $\dfrac{\lambda}{2} = a + \dfrac{b}{2}$ donc $\begin{cases} a + b = \lambda \\ 2a + b = \lambda \end{cases}$. $a + b = 2a + b$;

Alors $a = 0$ et $b = \lambda$.

• Réciproquement supposons que $a = 0$. Montrons que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) p_{k-1} = \dfrac{b}{k} p_{k-1}$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k!\, p_k}{b^k} = \dfrac{(k-1)!\, p_{k-1}}{b^{k-1}}$.

La suite $\left(\dfrac{k!\, p_k}{b^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{k!\, p_k}{b^k} = \dfrac{0!\, p_0}{b^0} = p_0$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \dfrac{b^k}{k!} p_0$.

De plus $\displaystyle 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = p_0 e^{b}$. $p_0 = e^{-b}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \dfrac{b^k}{k!} e^{-b}$; $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$.

R.

Conclusion.. 1) oui X peut suivre une loi de Poisson.

2) X suit une loi de Poisson si et seulement si $a=0$.

3) Si $a=0$: $X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

c) • Supposons que X suit une loi binomiale. Plus précisément supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ où $q = 1-p$.

1er cas.. $p=1$. Alors $q=0$. Donc $p_0 = q^n = 0$. Ceci est impossible comme nous l'avons dit dans la remarque initiale.

2ème cas.. $p=0$. Alors $q=1$. Donc $p_0 = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_k = 0$.

Donc $0 = p_1 = (a+b)p_0 = a+b$. $a+b=0$.

3ème cas.. $p \neq 0$ et $p \neq 1$. Alors $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$

$\binom{n}{1} p q^{n-1} = p_1 = (a+b)p_0 = (a+b)q^n$; comme $q \neq 0$: $np = (a+b)q$.

$0 = p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p^n$; comme $p \neq 0$: $a + \frac{b}{n+1} = 0$.

Notons que nécessairement $a \neq 0$ car $a=0$ donne $b=0$!

Ainsi $n+1 = -\frac{b}{a}$. Alors $-\frac{b}{a}$ est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et $n = -\frac{b}{a} - 1$

$np = (a+b)q = (a+b)(1-p)$; $(n+a+b)p = a+b$;

$$p = \frac{a+b}{n+a+b} = \frac{a+b}{-\frac{b}{a}-1+a+b} = \frac{a+b}{-\frac{a+b}{a}+a+b} = \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1}\ ;\ p = \frac{a}{a-1}.$$

Remarque.. dans le deuxième cas $a+b=0$ donc $a \neq 0$ ($a=0 \Rightarrow b=0$) et $-\frac{b}{a} = 1$

Ainsi si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$: $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$.

• Réciproquement supposons que $a \neq 0$ et que $-\frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$.

1er cas.. $-\frac{b}{a} = 1$. Alors $a+b=0$. Donc $p_1 = (a+b)p_0 = 0$.

Une récurrence simple donne : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = 0$.

Alors $p_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = 0$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,0)$ avec n quelconque dans $\mathbb{N}^*$!?

2ème cas. $-\frac{b}{a} \in [\![2,+\infty[\![$. Posons $n=-\frac{b}{a}-1$. $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $p=\frac{a}{a-1}$. $p>0$ car $a<0$.

$1-p = 1-\frac{a}{a-1} = -\frac{1}{a-1} = \frac{1}{1-a} > 0$ car $1-a>0$. $1-p>0$. $p<1$.

Ainsi $p \in]0,1[$. Posons $q=1-p$. Montrons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Notons que $p_{n+1} = \left(a+\frac{b}{n+1}\right)p_n$.

Or $n=-\frac{b}{a}-1$; $n+1=-\frac{b}{a}$; $\frac{b}{n+1}=-a$; $a+\frac{b}{n+1}=0$; $p_{n+1}=0$.

Une récurrence simple montre que $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![$, $p_k=0$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $p_k = \left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}$.

$p=\frac{a}{a-1}$; $pa-p=a$; $a=\frac{p}{p-1}=-\frac{p}{q}$.

$a+\frac{b}{n+1}=0$ donc $b=-(n+1)a = (n+1)\frac{p}{q}$.

Alors $p_k = \left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1} = \left(-\frac{p}{q}+\frac{1}{k}(n+1)\frac{p}{q}\right)p_{k-1} = \frac{n+1-k}{k}\frac{p}{q}p_{k-1}$. $p_k = \frac{n+1-k}{k}\frac{p}{q}p_{k-1}$.

Donc $\frac{q^k}{p^k}p_k = \frac{n+1-k}{k}\frac{q^{k-1}}{p^{k-1}}p_{k-1}$; $\frac{q^k}{p^k}k!(n-k)!\,p_k = \frac{q^{k-1}}{p^{k-1}}(k-1)!\,(n-(k-1))!\,p_{k-1}$.

Alors la suite $\left(\frac{q^k}{p^k}k!\,(n-k)!\,p_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est constante.

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\frac{q^k}{p^k}k!(n-k)!\,p_k = \frac{q^0}{p^0}0!\,(n-0)!\,p_0 = n!\,p_0$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{p}{q}\right)^k p_0 = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}\frac{p_0}{q^n}$.

$1=\sum_{k=0}^{n} p_k = \frac{p_0}{q^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \frac{p_0}{q^n}(p+q)^n = \frac{p_0}{q^n}$; $\frac{p_0}{q^n}=1$.

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

R.

conclusion 1/ oui X peut suivre une loi binomiale !

2/ X suit une loi binomiale si et seulement si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in \mathbb{N}^*$

3/ si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} = 1$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,1)$ avec n quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in [\![2,+\infty[\![$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n = -\frac{b}{a} - 1$ et $p = \frac{a}{a-1}$.

d) • Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ au sens du programme.

Alors $p_0 = P(X=0) = 0$! ceci est impossible comme nous l'avons vu.

• Supposons que X suive la loi géométrique " sur $\mathbb{N}$ " de paramètre p.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X=k) = pq^k$ avec $q = 1-p$.

Alors $pq^k = p_k = (a + \frac{b}{k})p_{k-1} = (a + \frac{b}{k})pq^{k-1}$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $q = a + \frac{b}{k}$ car $p \neq 0$ et $q \neq 0$ ($p \in]0,1[$).

Donc $q = a + \frac{b}{1} = a + \frac{b}{2}$. Alors $b = 0$. ceci est contraire à l'hypothèse.

Ainsi X ne peut pas suivre une loi géométrique.

Question 7 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ **G. BURNEL et L. CHICHEPORTICHE**

On considère un certain jeu de casino et on note X la variable aléatoire égale au gain du casino à chaque partie jouée. Un joueur joue une partie et il note X_0 la variable aléatoire égale à la somme qu'il perd.

Pour mesurer sa malchance, celui-ci observe les pertes X_1, X_2, ..., X_n, ... des joueurs suivants, en supposant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

Il s'intéresse à l'indice du premier joueur qui perd plus que lui, autrement dit à la variable aléatoire N du plus petit indice n tel que l'événement $\{X_n > X_0\}$ soit réalisé.

a) Justifier que $P(N > n-1) = \dfrac{1}{n}\cdot$

b) Le joueur a-t-il raison de penser qu'il est vraiment malchanceux ?

Non le joueur n'a visiblement pas de raison de penser qu'il est malchanceux mais les candidats qui ont eu à traiter cet exercice si (encore que...). Il manque visiblement une hypothèse...

Pour l'anecdote l'un de mes deux élèves ci-dessus à eu 20 à son épreuve et l'autre 11...

Supposons que le résultat soit juste. En l'appliquant pour n=2 il vient $P(X_1 \leqslant X_0) = \dfrac{1}{2}\cdot$ *En considérant que* $X_1 - X_0$ *et* $X_0 - X_1$ *ont même loi et en remarquant que* $P(X_1 < X_0) + P(X_0 < X_1) + P(X_1 = X_0) = 1$ *il vient rapidement* $P(X_1 = X_0) = 0$.

$\boxed{\text{Nous supposerons, pour traiter cet exercice, que } \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ i\neq j \Rightarrow P(X_i = X_j) = 0.}$

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

__Lemme 1__ .. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall (A_0, A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{A}^{p+1}$, $P(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_p) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P(A_k)$.

- Montrons ce résultat par récurrence sur p
- C'est clair pour $p=0$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément p de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$

Soit $(A_0, A_1, \dots, A_{p+1}) \in \mathcal{A}^{p+2}$. Posons $B = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_p$.

Par hypothèse de récurrence, $P(B) \leqslant P(A_0) + P(A_1) + \dots + P(A_p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P(A_k)$.

$P(B \cup A_{p+1}) = P(B) + P(A_{p+1}) - P(B \cap A_{p+1}) \leqslant P(B) + P(A_{p+1}) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P(A_k) + P(A_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} P(A_k)$

donc $P(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{p+1}) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} P(A_k)$. Ceci achève la récurrence

Fixons n dans $[\![1, +\infty[\![$. Posons $S_n = \displaystyle\bigcup_{0\leqslant i<j\leqslant n-1} \{X_i = X_j\}$. Notons que $S_n = \displaystyle\bigcup_{\substack{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2 \\ \text{et } i\neq j}} \{X_i = X_j\}$

__Lemme 2__ 1°/ $P(S_n) = 0$

2°/ $\forall C \in \mathcal{A}$, $P(C) = P(C \cap \overline{S_n})$.

Lemme 1

$$0 \leqslant P(S_n) = P\Big(\bigcup_{0\leqslant i<j\leqslant n-1} \{X_i = X_j\}\Big) = P\Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{i=0}^{j-1} \{X_i = X_j\}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} P\Big(\bigcup_{i=0}^{j-1} \{X_i = X_j\}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{j-1} \underbrace{P(X_i = X_j)}_{=0} = 0$$

Alors $0 \leqslant P(S_n) \leqslant 0$. $\underline{\underline{P(S_n) = 0}}$.

$\forall C \in \mathcal{A}$, $P(C) = P(C \cap \overline{S_n}) + P(C \cap S_n)$ et $\forall C \in \mathcal{A}$, $C \cap S_n \subset S_n$.

Donc $\forall C \in \mathcal{C}$, $0 \leq P(C \cap S_n) \leq P(S_n) = 0$. $\forall C \in \mathcal{C}$, $P(C \cap S_n) = 0$.

Alors $\forall C \in \mathcal{C}$, $P(C) = P(C \cap \overline{S_n})$.

Lemme 3. Si σ est une permutation de $[\![0, n-1]\!]$, $P(X_{\sigma(0)} \leq X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)}) = \frac{1}{n!}$.

Notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![0, n-1]\!]$. Rappelons que $\mathrm{card}\, \mathfrak{S}_n = n!$.

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cap \overline{S_n}) = P\Big(\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \{X_{\sigma(0)} \leq X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)}\}\Big) \cap \overline{S_n}\Big)$$

$$1 = P\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(\{X_{\sigma(0)} \leq X_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)}\} \cap \overline{S_n}\Big)\Big) = P\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \{X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)}\}\Big).$$

Par incompatibilité il vient $1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)})$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. 1) $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ sont indépendantes

2) $X_{\sigma(0)}, X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n-1)}$ sont indépendantes

3) Pour tout i dans $[\![0, n-1]\!]$, $X_{\sigma(i)}$ a même loi que X_i

Alors $P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1})$.

Donc $1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1}) = (\mathrm{card}\, \mathfrak{S}_n) P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1})$

$1 = n! \times P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1})$. Ainsi $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1}) = \frac{1}{n!}$.

De plus $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n!}$.

Lemme 4 $P(\{X_1 \leq X_0\} \cap \{X_2 \leq X_0\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \leq X_0\}) = \frac{1}{n}$ ... ou $P(N > n-1) = \frac{1}{n}$.

Notons que $\{N > n-1\}$ se réalise si et seulement aucun des événements $\{X_1 > X_0\}$, $\{X_2 > X_0\}, \ldots, \{X_{n-1} > X_0\}$ ne se réalise.

Alors $\{N > n-1\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{\{X_k > X_0\}} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{X_k \leq X_0\}$.

$\{N > n-1\} = \{X_1 \leq X_0\} \cap \{X_2 \leq X_0\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \leq X_0\}$

Notons $\mathcal{S}_{n-1}$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n-1]\!]$.

$$\{N > n-1\} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \{X_{\sigma(1)} \leqslant \cdots \leqslant X_{\sigma(n-1)} \leqslant X_0\}.$$

$$P(N > n-1) = P(\{N > n-1\} \cap \overline{S}_n) = P\left(\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \{X_{\sigma(1)} \leq X_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)} \leq X_0\}\right) \cap \overline{S}_n\right).$$

$$P(N > n-1) = P\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \left(\{X_{\sigma(1)} \leq X_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq X_{\sigma(n-1)} \leq X_0\} \cap \overline{S}_n\right)\right).$$

incompatibilité.

$$P(N > n-1) = P\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} (X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0)\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} P(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0)$$

$$P(N > n-1) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \frac{1}{n!} = \operatorname{Card} \mathcal{S}_{n-1} \times \frac{1}{n!} = (n-1)! \times \frac{1}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$\underline{\underline{P(N > n-1) = \frac{1}{n}.}}$$

b) Donc sur un groupe de n joueurs qui contient notre joueur la probabilité pour qu'il perde la place est $\frac{1}{n}$.

Il n'est donc pas particulièrement malchanceux !

mais fallait-il tout cela pour l'affirmer ?

R.

Question 8 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **A. GAY**

λ et μ sont deux réels. On suppose λ n'est pas nul.

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par : $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \lambda P_n + \mu P_n'$.

Q1. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q2. n est fixé dans $\mathbb{N}$ et Q est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il P_0 dans $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = Q$?

Q1 Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, P_n appartient à $\mathbb{R}_2[X]$.

- $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ donc la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que $P_n \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $P_n' \in \mathbb{R}_2[X]$ et ainsi $\lambda P_n + \mu P_n' \in \mathbb{R}_2[X]$ donc P_{n+1} est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{R}_2[X]$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q2 Posons $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\phi(P) = \lambda P + \mu P'$. Montrons que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lambda P + \mu P' \in \mathbb{R}_2[X]$ donc $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

  ϕ est une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

  $\phi(\alpha P + Q) = \lambda(\alpha P + Q) + \mu(\alpha P + Q)' = \lambda\alpha P + \lambda Q + \mu(\alpha P' + Q')$.

  $\phi(\alpha P + Q) = \lambda\alpha P + \lambda Q + \mu\alpha P' + \mu Q' = \alpha(\lambda P + \mu P') + \lambda Q + \mu Q' = \alpha\,\phi(P) + \phi(Q)$.

  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (P,Q) \in E^2$, $\phi(\alpha P + Q) = \alpha\,\phi(P) + \phi(Q)$. ϕ est linéaire.

Finalement ϕ est un endomorphisme de E.

- Soit $P = aX^2 + bX + c$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$.

$P \in \operatorname{Ker}\phi \iff \phi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff \lambda P + \mu P' = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff \lambda(aX^2 + bX + c) + \mu(2aX + b) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

$$P \in \operatorname{Ker}\phi \iff (\lambda a)X^2 + (\lambda b + 2\mu a)X + \lambda c + b\mu = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff \begin{cases} \lambda a = 0 \\ \lambda b + 2\mu a = 0 \\ \lambda c + b\mu = 0 \end{cases} \underset{\lambda \neq 0}{\iff} \begin{cases} a = 0 \\ \lambda b = 0 \\ \lambda c + b\mu = 0 \end{cases} \underset{\lambda \neq 0}{\iff} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ \lambda c = 0 \end{cases} \underset{\lambda \neq 0}{\iff} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

ϕ est injectif

Donc $\operatorname{Ker}\phi = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. Comme ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension finie,

ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrons dans une même récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$, ϕ^k est un automorphisme et $P_k = \phi^k(P_0)$.

k.

- La propriété est vraie pour $k=0$ car $\phi^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$.
- Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse ϕ^k est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P_k = \phi^k(P_0)$.

Alors $\phi^{k+1} = \phi^k \circ \phi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ comme composée de deux automorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P_{k+1} = \phi(P_k) = \phi(\phi^k(P_0)) = \phi^{k+1}(P_0)$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, ϕ^k est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P_k = \phi^k(P_0)$.

Il est temps de répondre à la question ! Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}_2[X]$.

ϕ^n étant un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, $\exists!\, P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\phi^n(P_0) = \varphi$. Alors $P_n = \varphi$.

Donc pour n fixé dans $\mathbb{N}$ et φ dans $\mathbb{R}_2[X]$ on peut choisir P_0 dans $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_n = \varphi$.

R.

Question 9 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AMB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Montrer que A est nulle ou B est nulle.

Soit $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. AE_p est la $p^{\text{ième}}$ colonne de A, ${}^tE_qB$ est la $q^{\text{ième}}$ ligne de B

et $E_p\,{}^tE_q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $AE_p\,{}^tE_qB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. $\begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} (b_{q,1} \ b_{q,2} \cdots b_{q,n}) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Donc la matrice $(a_{i,p}\, b_{q,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nulle.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,p}\, b_{q,j} = 0$.

Mieux $\forall (i,j,p,q) \in [\![1,n]\!]^4$, $a_{i,p}\, b_{q,j} = 0$.

ce qui peut encore s'écrire $\underline{\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4,\ a_{i,j}\, b_{k,\ell} = 0}$, non ?

1er cas... $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Gagné !

2ème cas... $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors $\exists (i_0,j_0) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i_0,j_0} \neq 0$.

Alors $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i_0,j_0}\, b_{k,\ell} = 0$ et $a_{i_0,j_0} \neq 0$.

Donc $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{k,\ell} = 0$. $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$\underline{\underline{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AMB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \text{ ou } B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.}}$

<u>Remarque</u>... $(E_p\,{}^tE_q)_{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2}$ n'est autre que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Question 10 ESCP 2012 F1 S. LY et N. KARPIEL

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire 3 boules simultanément et X, Y et Z sont les variables aléatoires égales au numéro des boules obtenues avec $X < Y < Z$.

Q1. Trouver la loi de Y.

Q2. Montrer que Y et $n+1-Y$ ont la même loi. Calculez $E(Y)$.

Nous supposerons évidemment que $n \geqslant 3$.

choix de la valeur de X

Q1.. $Y(\Omega) = [\![2, n-1]\!]$. $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(Y=k) = \dfrac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}}$ ← choix de la valeur de Z

← nombre de tirages

$\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(Y=k) = \dfrac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$.

Q2.. Posons $T = n+1-Y$.

- $T(\Omega) = [\![n+1-(n-1), n+1-2]\!] = [\![2, n-1]\!]$.
- $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(T=k) = P(n+1-Y=k) = P(Y=n+1-k) = \dfrac{6(n+1-k-1)(n-(n+1-k))}{n(n-1)(n-2)}$.

Alors $T(\Omega) = [\![2, n-1]\!] = Y(\Omega)$ et $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(T=k) = \dfrac{6(n-k)(k-1)}{n(n-1)(n-2)} = P(Y=k)$.

T et Y ont donc la même loi. Y et $n+1-Y$ ont la même loi.

Y prend un nombre fini de valeurs donc Y possède une espérance.

Alors $n+1-Y$ possède une espérance égale à celle de Y car $n+1-Y$ a même loi que Y.

Ainsi $n+1-E(Y) = E(n+1-Y) = E(Y)$. Alors $2E(Y) = n+1$.

$E(Y) = \dfrac{n+1}{2}$. Retrouvons ce résultat à la main. $E(Y) = \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)} \displaystyle\sum_{k=2 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} k(k-1)(n-k)$.

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (k^2-k)(n-k) = \sum_{k=1}^{n} \left[(n+1)k^2 - k^3 - nk\right] = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - n\sum_{k=1}^{n} k.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} E(Y) = (n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{12}\left[2(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) - 6n\right]$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} E(Y) = \frac{n(n+1)}{12}(4n^2+6n+2-3n^2-3n-6n) = \frac{n(n+1)}{12}(n^2-3n+2) = \frac{n(n+1)}{12}(n-1)(n-2).$$

En divisant par $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ on retrouve $E(Y) = \dfrac{n+1}{2}$.

R.

Question 11 ESCP 2012 [F1] I. KARDASZEWICZ **Déjà vu en 2011**

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables alétaoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre a.

Soit x un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire N_x égale à $\mathrm{Min}\{k\in\mathbb{N}^*\mid X_k>x\}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x>E(N_x))$.

Pour être complet nous supposons que N_x prend la valeur 0 si l'événement $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\{X_k\leqslant x\}$ se réalise. Autrement dit si $\{k\in\mathbb{N}^*\mid X_k>x\}=\emptyset$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\Big)\leqslant P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n}\{X_k\leqslant x\}\Big)$ par croissance de P...

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\Big)\leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}P(X_k\leqslant x)=(1-e^{-ax})^n$.

↑ Par indépendance

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-e^{-ax})^n=0$ car $|1-e^{-ax}|<1$ puisque $0<1-e^{-ax}<1$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $0\leqslant P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\Big)\leqslant 0$.

Alors $P(N_x=0)=P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\{X_k\leqslant x\}\Big)=0$. $\underline{P(N_x=0)=0}$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $P(N_x=1)=P(X_1>x)=1-P(X_1\leqslant x)=e^{-ax}$.

Supposons $k\geqslant 2$. $P(N_x=k)=P(\{X_1\leqslant x\}\cap\{X_2\leqslant x\}\cap\dots\cap\{X_{k-1}\leqslant x\}\cap\{X_k>x\})$.

Par indépendance il vient $P(N_x=k)=P(X_1\leqslant x)\,P(X_2\leqslant x)\cdots P(X_{k-1}\leqslant x)\,P(X_k>x)$.

$P(N_x=k)=(1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$. Formule qui vaut pour $k=1$.

Donc $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(N_x=k)=(1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$. $\underline{N_x \text{ suit la loi géométrique de paramètre } e^{-ax}}$. Notons que $E(N_x)=e^{ax}$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $r_x=\mathrm{Ent}(e^{ax})+1$.

$P(N_x>E(N_x))=P(N_x>e^{ax})=P(N_x\geqslant r_x)=\sum\limits_{k=r_x}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k-1}e^{-ax}$.

$P(N_x>E(N_x))=e^{-ax}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k-1+r_x}=e^{-ax}(1-e^{-ax})^{r_x-1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-e^{-ax})^{k}$.

$P(N_x>E(N_x))=e^{-ax}(1-e^{-ax})^{r_x-1}\times\dfrac{1}{1-(1-e^{-ax})}=(1-e^{-ax})^{r_x-1}$.

$\underline{P(N_x>E(N_x))=(1-e^{-ax})^{r_x-1}}$. $\underline{P(N_x>E(N_x))=(1-e^{-ax})^{\mathrm{Ent}(e^{ax})}}$

R.

$(1-e^{-ax})^{r_x-1} = e^{(r_x-1)\ln(1-e^{-ax})} = e^{\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax})}$.

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{ax} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-ax} = 0$. Alors $\mathrm{Ent}(e^{ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} e^{ax}$ et $\ln(1-e^{-ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} -e^{-ax}$

Alors $\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax}) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} e^{ax}(-e^{-ax}) = -1$.

donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \left(\mathrm{Ent}(e^{ax})\ln(1-e^{-ax})\right) = -1$.

Alors par continuité de la fonction exponentielle en -1 on a $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{\mathrm{Ent}(ax)\ln(1-e^{-ax})} = e^{-1}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} P(N_x > E(N_x)) = e^{-1}$.

Question 12 ESCP 2012 $\boxed{F\ 1^+}$ J. KY

X est une variable aléatoire à densité de densité $x \to \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x}\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$.

Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \text{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et X ont même loi.

Déjà vu en 2010.
Vu aussi en exercice préparé en 2003 (3.38).

Remarque. Considérons $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue au moins sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ existent et valent 0.

$\int_0^1 f(t)\,dt$ existe car f est continue sur $[0,1]$. $\int_0^1 f(t)\,dt = \dfrac{1}{\ln 2}\Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \dfrac{\ln 2 - \ln 1}{\ln 2} = 1$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut 1. Ceci achève de montrer que <u>f est une densité de probabilité</u>.

Notons F_X la fonction de répartition de X.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$. $\forall x \in [0,1[,\ F_X(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+t}\,dt = \left[\dfrac{\ln|1+t|}{\ln 2}\right]_0^x = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$

$\forall x \in [1,+\infty[,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+t}\,dt + \int_1^x 0\,dt = \int_0^1 \dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{1+t}\,dt = 1$.

Ainsi <u>$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) =$</u> $\begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$.

Posons $Z = \dfrac{1}{X}$. X prend ses valeurs dans $[0,1]$ ... presque sûrement donc Z prend presque sûrement ses valeurs dans $[1,+\infty[$. Notons F_Z sa fonction de répartition.

$\forall x \in]-\infty, 1[,\ F_Z(x) = 0$. Soit $x \in [1,+\infty[$.

$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(\dfrac{1}{X} \leq x\right) = P\left(X \geq \dfrac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X < \dfrac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X \leq \dfrac{1}{x}\right) = 1 - F_X\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$x > 0$ et X prend presque sûrement ses valeurs dans $]0,1]$

X est une variable aléatoire à densité.

$F_Z(x) = 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2}$

<u>$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) =$</u> $\begin{cases} 1 - \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$Y = Z - \mathrm{Ent}(Z)$ donc Y prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$ et $\forall x \in [1,+\infty[$, $F_Y(x) = 1$.

Posons $T = \mathrm{Ent}(Z)$. Soit $x \in [0,1[$

$(\{T=k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet (ou quasi complet) d'événements.

Ainsi $F_Y(x) = P(Y \le x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\}\cap\{Y\le x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\}\cap\{Z-T\le x\})$.

$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{T=k\}\cap\{Z\le k+x\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k\le Z<k+1\}\cap\{Z\le k+x\})$.

$F_Y(x) \underset{x<1}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(k\le Z\le k+x)$. Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x\in[1,+\infty[\\ 0 & \end{cases}$

Notons que l'on a aussi $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,1] \\ 1-\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2} & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$

$x\mapsto 0$ est de classe C^1 sur $]-\infty,1]$ et $x\mapsto 1-\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln 2}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

Alors F_Z est de classe C^1 sur $]-\infty,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{1\}$. Ainsi Z est une variable aléatoire à densité.

Donc $F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k\le Z\le k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k<Z\le k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(F_Z(k+x)-F_Z(k)\right)$.

$F_Y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[1-\dfrac{\ln(1+\frac{1}{k+x})}{\ln 2} - 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln 2}\right] = \dfrac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\dfrac{x+k+1}{k+x}\right)\right]$.

$F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(\ln(k+1)-\ln k) - (\ln(x+k+1)-\ln(x+k))\right]$.

$F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n+1)-\ln 1-\ln(x+n+1)+\ln(x+1)\right) = \dfrac{1}{\ln 2}\lim_{n\to+\infty}\left[\ln(1+x)+\ln\dfrac{x+n+1}{n+1}\right]$

Alors $F_Y(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+x)+\ln 1\right] = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in]-\infty,0[\\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$. Alors $F_Y = F_X$.

Donc $Y = \dfrac{1}{X}-\mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ a même loi que X.

Exercice.. Montrer que $Z = \dfrac{1}{X}$ et $Y = \dfrac{1}{X}-\mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{X}\right)$ sont des variables aléatoires.

R

Question 13 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F } 1^-}$ **E. MESKHI**

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On suppose que X possède une espérance.

Montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)=0$ et que $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty} P(X>t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall A \in [x,+\infty[$, $\forall t \in [x,A]$, $x f(t) \leq t f(t)$ (car $f(t) \geq 0$).

$\forall A \in [x,+\infty[$, $x\int_x^A f(t)dt = \int_x^A x f(t)dt \leq \int_x^A t f(t)dt$. (*)

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$ convergent donc $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_x^{+\infty} t f(t)dt$ convergent également

[E(X) existe...

donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (*) il vient : $x\int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t)dt$.

Mieux $\underline{0 \leq x\int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \int_x^{+\infty} t f(t)dt}$

$\int_0^{+\infty} t f(t)dt$ converge donc $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} t f(t)dt = 0$ (reste d'une intégrale convergente).

Alors par encadrement on obtient $\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_x^{+\infty} f(t)dt\right) = 0}$.

Soit G la restriction de la fonction de répartition F de X à $[0,+\infty[$.

Comme f est continue sur $[0,+\infty[$, G est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $G'(t) = f(t)$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. intégration par parties avec $t \mapsto t$ et $t \mapsto 1-G(t)$ C^1 sur $[0,+\infty[$.

$\int_0^x P(X>t)dt = \int_0^x (1-F(t))dt = \int_0^x (1-G(t))dt = [t(1-G(t))]_0^x - \int_0^x t(0-f(t))dt$

$\int_0^x P(X>t)dt = x(1-G(x)) + \int_0^x t f(t)dt = x(1-F(x)) + \int_0^x t f(t)dt = x\int_x^{+\infty} f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$

$\int_0^x P(X>t)dt = x\int_x^{+\infty} f(t)dt + \int_0^x t f(t)dt$. Or $\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_0^x f(t)dt\right) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t f(t)dt = E(X)$.

donc $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x P(X>t)dt = E(X)$

Ainsi $\underline{\int_0^{+\infty} P(X>t)dt \text{ converge et vaut } E(X).}$

B

Question 14 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ **T. PILEWICZ**

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant toutes la même loi.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q = 1-p$ où p est un réel appartenant à $]0,1[$ et différent de $\frac{1}{2}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0\}$.

Q1. Calculer pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(A_{2n})$ et $P(A_{2n-1})$.

Q2. Donner la nature de la série de terme général $P(A_n)$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$).

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons T_n la variable aléatoire égale au nombre de variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ prenant la valeur 1.

1) T_n suit la loi binomiale de paramètres n et p car $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_k = 1) = p$.

2) $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 1 \times T_n + (-1)\times(n - T_n) = 2T_n - n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 2T_n - n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(A_{2n-1}) = P(X_1 + \cdots + X_{2n-1} = 0) = P(2T_{2n-1} - (2n-1) = 0) = P\left(T_{2n-1} = n - \frac{1}{2}\right) = 0$.

$P(A_{2n}) = P(X_1 + \cdots + X_{2n} = 0) = P(2T_{2n} - 2n = 0) = P(T_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{2n}) = \binom{2n}{n}(pq)^n$ et $P(A_{2n-1}) = 0$.

Q2 $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!\,n!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{\pi n}\,(2n)^{2n}\,e^{2n}}{2\pi n\ \ n^{2n}\ e^{2n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\,2^{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\,4^n$.

Alors $P(A_{2n}) = \binom{2n}{n}(pq)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n$.

$\dfrac{P(A_{2n})}{(4pq)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(A_{2n})}{(4pq)^n} = 0$.

- $P(A_{2n}) \underset{n\to+\infty}{=} o\left((4pq)^n\right)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{2n}) \geqslant 0$ et $(4pq)^n \geqslant 0$
- $4pq \geqslant 0$ et $1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2 \overset{p\neq 1/2}{>} 0$.

donc $4pq \in [0, 1[$ (et même $4pq \in]0,1[$ car $p \in]0,1[$). La série de terme général $(4pq)^n$ est alors convergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $P(A_{2n})$ converge. Notons S sa somme.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$. Rappelons que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(A_{2k-1})=0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n} P(A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_{2k})$ et $S_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1} P(A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_{2k})$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}=S$ et $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}=S$. Ce qui suffit pour dire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers S.

Donc <u>la série de terme général $P(A_n)$ converge.</u>

<u>Exercice..</u> Examiner le cas $p=\frac{1}{2}$.

Question 15 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **M. ZYCH**

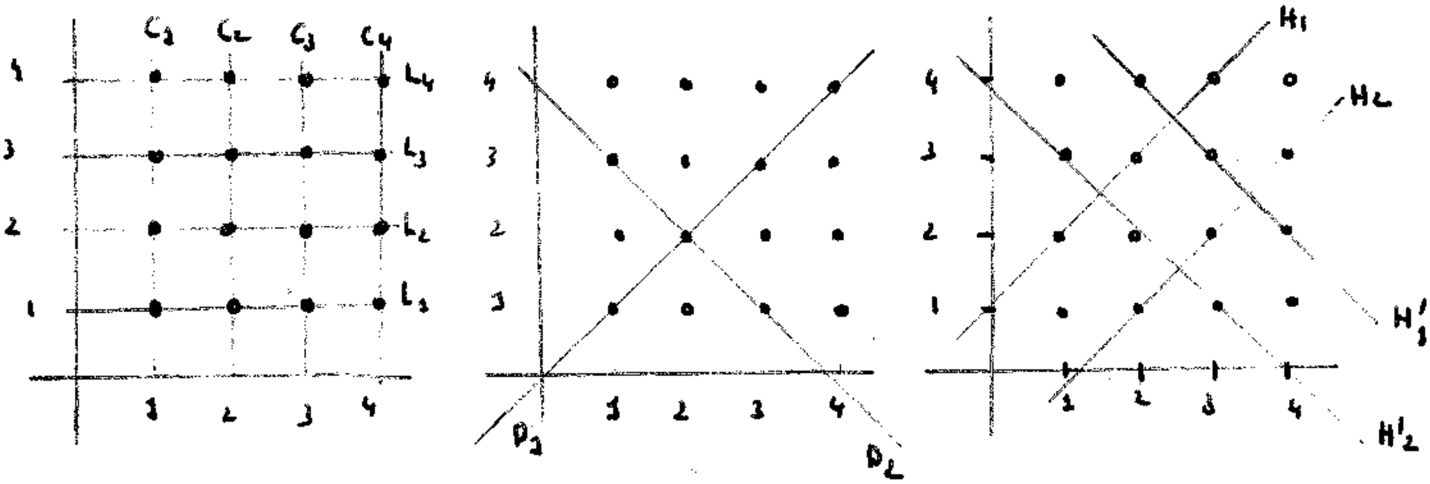
$E = [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!]$ est inclu dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure habituelle.

On choisit une partie de E constituée de 4 points de E (ce choix se fait de manière équiprobable).

Q1. Trouver la probabilité pour que ces quatre points soient alignés.

Q2. Trouver la probabilité d'avoir au moins trois points alignés.

Notons que E contient 16 points. Il y a $\binom{16}{4}$ manières de choisir quatre points de E.



(Q1) Les quatre points sont alignés si et seulement si les quatre points sont sur L_1 ou L_2 ou L_3 ou L_4 ou C_1 ou C_2 ou C_3 ou C_4 ou D_1 ou D_2.

Il y a donc exactement 10 manières de choisir une partie constituée de 4 points de E telle que ces quatre points soient alignés.

<u>La probabilité pour que ces quatre points soient alignés est $\dfrac{10}{\binom{16}{4}}$ ou $\dfrac{1}{182}$ $(\simeq 0{,}0055)$</u>

(Q2) • Le nombre de manières d'avoir quatre points alignés est 10 d'après Q1.

• Comptons le nombre de cas où trois points sont alignés et pas plus.

<u>1er cas.</u>. Les trois points sont alignés sur C_1 ou C_2 ou C_3 ou C_4 ou L_1 ou L_2 ou L_3 ou L_4 ou D_1 ou D_2, le quatrième étant en dehors de la droite qui contient les trois autres.

Il y a à chaque fois $\binom{4}{3}$ manières de choisir les trois points alignés et $16-4$ manières de choisir le quatrième point.

Ce premier cas donne donc $10 \times \binom{4}{3} \times 12$ choix possibles ; soit encore $10 \times 4 \times 12$ ou 480.

2ème cas.. Les trois points sont alignés sur H_1 ou H_2 ou H'_1 ou H'_2, le quatrième est en dehors de la droite qui contient les trois autres.

Il y a à chaque fois une manière de choisir les trois points alignés et 16-3 manières de choisir le quatrième point.

Ce second cas donne donc $4 \times 1 \times 13$ choix possibles. C'est à dire 52 choix.

Le nombre de cas où trois points sont alignés et pas plus est $480 + 52$ c'est à dire 532.

Ainsi le nombre de manières d'avoir au moins trois points alignés est $10 + 532$ c'est à dire 542.

La probabilité pour qu'au moins trois points soient alignés est $\dfrac{542}{\binom{16}{4}}$.

$$\frac{542}{\binom{16}{4}} = \frac{2 \times 271}{\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2}} = \frac{2 \times 271}{4 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{271}{2 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{271}{910}$$

La probabilité pour qu'au moins trois points soient alignés est : $\dfrac{271}{910}$.

$\dfrac{271}{910} \simeq 0,2978$.

R

Question 16 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **S. TEIAR**

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(1)=0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Q1. Nature de la suite de terme général u_n.

Q2. Nature de la série de terme général u_n.

Q1. $|f|$ est continue sur le segment donc $|f|$ possède un maximum sur $[0,1]$ que nous notons M.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leqslant |u_n| = \left|\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| \underset{0\leqslant 1}{\leqslant} \int_0^1 |t^n f(t)|\,dt = \int_0^1 |t^n|\,|f(t)|\,dt = \int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \underset{\substack{0\leqslant 1\\ \forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leqslant M \text{ et } t^n \geqslant 0}}{\leqslant} \int_0^1 M\, t^n\,dt$$

$0 \leqslant |u_n| \leqslant M \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1}$ ... et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

de plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$ donc $\underline{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$ ... par encadrement. $\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0}$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto t^{n+1}$ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ceci justifie l'intégration par parties suivante.

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)\,dt \underset{f(1)=0}{=} -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt.$$

$$|(n+1)\,u_n| = \left|-\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt\right| \underset{0\leqslant 1}{\leqslant} \int_0^1 |t^{n+1} f'(t)|\,dt = \int_0^1 |t^{n+1}|\,|f'(t)|\,dt = \int_0^1 t^{n+1} |f'(t)|\,dt.$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi f' est continue sur le segment $[0,1]$. $|f'|$ également.

Alors $|f'|$ possède un maximum sur $[0,1]$ que nous notons M'.

$$(n+1)|u_n| = |(n+1)u_n| \leqslant \int_0^1 t^{n+1}|f'(t)|\,dt \underset{\substack{0\leqslant 1\\ \forall t\in[0,1],\ |f'(t)|\leqslant M' \text{ et } t^{n+1}\geqslant 0}}{\leqslant} M'\int_0^1 t^{n+1}\,dt = M' \times \frac{1}{n+2}. \text{ donc } |u_n| \leqslant \frac{M'}{(n+1)(n+2)}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n| \leqslant \dfrac{M'}{(n+1)(n+2)} \leqslant \dfrac{M'}{n^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{M'}{n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{M'}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|u_n|$ converge.

<u>La série de terme général u_n est absolument convergente donc convergente.</u>

Question 17 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ I. YAZBECK

M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geqslant 0$ et telle qu'il existe un élément non nul X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tX_0MX_0 = 0$.

Q1. Existe-t-il une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tSS$?

Q2. Existe-t-il une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tQQ$?

Q3. Existe-t-il une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA$.

Q1 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M est symétrique donc il existe une base orthonormée $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ notons α_i la valeur propre de M associée à X_i.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1) P orthogonale car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

2) $P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $0 \leqslant {}^tX_i M X_i = {}^tX_i(\alpha_i X_i) = \alpha_i \|X_i\|^2$ et $\|X_i\|^2 > 0$ car $X_i \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Alors $\alpha_i \geqslant 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \geqslant 0$. Posons alors $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$.

$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \Delta^2$. $M = P\Delta^2P^{-1} = (P\Delta P^{-1})^2$. Posons $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta {}^tP$.

$S^2 = M$ et ${}^tS = {}^t(P\Delta P^{-1}) = {}^t(P\Delta {}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\, {}^tP = P\,{}^t\Delta\, P^{-1} = P\Delta P^{-1} = S$.

Δ est diagonale.

Alors $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, S est symétrique et $M = S^2 = SS = {}^tSS$.

Donc il existe une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tSS$.

Q2 Supposons qu'il existe une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tQQ$. Alors $M = I_n$.

Donc $0 = {}^tX_0 M X_0 = {}^tX_0 I_n X_0 = {}^tX_0 X_0 = \|X_0\|^2$. $\|X_0\|^2 = 0$. $\|X_0\| = 0$. $X_0 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$!!

Donc il n'existe pas de matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tQQ$.

Q3 Supposons qu'il existe une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA$

$0 = {}^tX_0 M X_0 = {}^tX_0\, {}^tA A X_0 = {}^t(AX_0) AX_0 = \|AX_0\|^2$. $\|AX_0\|^2 = 0$. $\|AX_0\| = 0$. $AX_0 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Or A est inversible donc $AX_0 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne $X_0 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$!!

Il n'existe pas de matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tAA$.

Question 18 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 2}}$ M. ARNOLD

A, B, C, D sont quatre événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $a = P(A \cap B)$, $b = P(\overline{A} \cap B)$, $c = P(A \cap \overline{B})$, et $d = P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exprimer $\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ en fonction de a, b, c et d. Montrer $\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

$\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B) = E(\mathbb{1}_{A\cap B}) - P(A)P(B) = P(A\cap B) - P(A)P(B)$.

$P(A) = P(A\cap B) + P(A \cap \overline{B}) = a + c$ et $P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A}) = a + b$.

Ainsi $\underline{\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - (a+c)(a+b)}$

On a de même $\operatorname{cov}(\mathbb{1}_{\overline{A}}, \mathbb{1}_{\overline{B}}) = d - (d+b)(d+c)$. (faire $A \leftarrow \overline{A}$ et $B \leftarrow \overline{B}$ dans ce qui précède)

mais $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - \mathbb{1}_B$. 　 au cas où... $\operatorname{cov}(\alpha X + \beta, \alpha' Y + \beta') = \alpha\alpha' \operatorname{cov}(X, Y)$

Alors $\operatorname{cov}(\mathbb{1}_{\overline{A}}, \mathbb{1}_{\overline{B}}) = \operatorname{cov}(1 - \mathbb{1}_A, 1 - \mathbb{1}_B) = (-1)(-1)\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$

Ainsi $\underline{\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = d - (d+b)(d+c)}$.

Donc $2\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - (a+c)(a+b) + d - (d+b)(d+c)$

$2\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - a^2 - ac - ab - bc + d - d^2 - dc - bd - bc$

$2\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a - a^2 + d - d^2 - b(a+c+d) - c(a+b+d)$.

Or $a+b+c+d = \big(P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)\big) + \big(P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A}\cap\overline{B})\big) = P(B) + P(\overline{B}) = 1$.

Alors $\underline{2\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a(1-a) + d(1-d) - b(1-b) - c(1-c)}$.

$\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

$\underline{\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}}$. Notons que a, b, c et d sont dans $[0,1]$.

Donc $2\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a(1-a) + d(1-d) - b(1-b) - c(1-c) \leqslant a(1-a) + d(1-d) \leqslant 2 \times \frac{1}{4}$.

et $2\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = a(1-a) + d(1-d) - b(1-b) - c(1-c) \geqslant -b(1-b) - c(1-c) \geqslant -2 \times \frac{1}{4}$.

En divisant par 2 il vient $-\frac{1}{4} \leqslant \operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \leqslant \frac{1}{4}$.

Ainsi $\underline{\operatorname{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]}$.

$\longrightarrow$

R

On peut retrouver ce résultat en se rappelant que :

$|\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leqslant \sqrt{V(\mathbb{1}_A)}\sqrt{V(\mathbb{1}_B)}$.

Or $V(\mathbb{1}_A) = E(\mathbb{1}_A^2) - (E(\mathbb{1}_A))^2 \underset{\uparrow}{=} E(\mathbb{1}_A) - (E(\mathbb{1}_A))^2 = P(A) - (P(A))^2$.

$\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A\cap A} = \mathbb{1}_A$

Alors $V(\mathbb{1}_A) = P(A) - (P(A))^2 = \frac{1}{4} - ((P(A))^2 - P(A) + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - (P(A) - \frac{1}{2})^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

Donc $\sqrt{V(\mathbb{1}_A)} \leqslant \frac{1}{2}$. De même $\sqrt{V(\mathbb{1}_B)} \leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi $\sqrt{V(\mathbb{1}_A)}\sqrt{V(\mathbb{1}_B)} \leqslant \frac{1}{4}$.

Donc $|\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \leqslant \frac{1}{4}$ et ainsi $\underline{\mathrm{cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}$.

Question 19 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **A. DEROO**

p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ de rang 2. f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $g \circ f = p$.

Calculer le rang de f et de g.

$g(f(\mathbb{R}^3)) = p(\mathbb{R}^3)$ donc $\dim g(f(\mathbb{R}^3)) = \dim p(\mathbb{R}^3) = \dim \operatorname{Im} p = \operatorname{rg} p = 2$.

Deux conséquences importantes.

1) $\dim f(\mathbb{R}^3) \geqslant 2$ ($\dim g(f(\mathbb{R}^3)) \leqslant \dim f(\mathbb{R}^3)$). $\dim \operatorname{Im} f \geqslant 2$. $\underline{\operatorname{rg} f \geqslant 2}$.

2) $g(f(\mathbb{R}^3)) \subset \operatorname{Im} g$ et $\dim g(f(\mathbb{R}^3)) = 2$ donc $\dim \operatorname{Im} g \geqslant 2$. $\underline{\operatorname{rg} g \geqslant 2}$.

Or $f(\mathbb{R}^3)$ est contenu dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim f(\mathbb{R}^3) \leqslant 2$. $\underline{\operatorname{rg} f \leqslant 2}$

Alors $\underline{\underline{\operatorname{rg} f = 2}}$.

$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g$ donc $\underline{\operatorname{rg} g \leqslant 2}$. Alors $\underline{\underline{\operatorname{rg} g = 2}}$.

R.

Question 20 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ **V. HUANG**

$n \in \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. $f : t \to E(t^X)$.

Q1. Montrer que pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f en 1 vaut $E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

On pose $E_0(X) = 1$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ E_k(X) = E\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big)$.

Q2. Montrer que pour tout élément j de $[\![0, n]\!]$, $P(X = j) = \dfrac{1}{j!} \displaystyle\sum_{k=j}^{n} \dfrac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} E_k(X)$.

Q1 Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

t^X est une variable aléatoire finie. Donc t^X possède une espérance.

Le théorème de transfert montre que $E(t^X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t^i P(X=i)$.

Ainsi f coïncide avec une fonction polynôme sur $]0, +\infty[$. f est donc dans C^∞ sur $]0,+\infty[$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in]0,+\infty[$, $f^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} i(i-1)\cdots(i-k+1)\, t^{i-k} P(X=i)$.

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1) P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)P(X=i)$

$i(i-1)\dots(i-k+1) = 0$ si $i < k$

donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E\big(X(X-1)\cdots(X-k+1)\big)$.

th de transfert

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E\big(X(X-1)\cdots(X-k+1)\big)$.

Q2 $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E\big(X(X-1)\cdots(X-k+1)\big) = E_k(X)$.

$f^{(0)}(1) = f(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} 1^i P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1 = E(1) = E_0(X)$. $f^{(0)}(1) = E_0(X)$.

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(1) = E_k(X)$.

f est une fonction polynômiale de degré au plus n. La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} f^{(k)}(1) + \int_1^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

Or $f^{(n+1)}$ est nulle sur $]0,+\infty[$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} f^{(k)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} E_k(X)$.

R.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} x^j (-1)^{\ell-j} E_\ell(X) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\ell=j}^{n} \frac{1}{\ell!} \frac{\ell!}{j!(\ell-j)!} (-1)^{\ell-j} E_\ell(X) \right) x^j$

permutation des deux sommes.

Posons $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\beta_j = \sum_{\ell=j}^{n} \frac{(-1)^{\ell-j}}{j!(\ell-j)!} E_\ell(X)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{j=0}^{n} P(X=j) x^j = f(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{j=0}^{n} (P(X=j) - \beta_j) x^j = 0$

Alors la fonction polynôme $x \mapsto \sum_{j=0}^{n} (P(X=j) - \beta_j) x^j$ admet une infinité de zéros.

C'est donc la fonction polynôme nulle. Ses coefficients sont nuls.

Alors $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(X=j) - \beta_j = 0$. $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(X=j) = \sum_{\ell=j}^{n} \frac{(-1)^{\ell-j}}{j!(\ell-j)!} E_\ell(X)$.

Finalement $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(X=j) = \frac{1}{j!} \sum_{\ell=j}^{n} \frac{(-1)^{\ell-j}}{(\ell-j)!} E_\ell(X)$.

Question 21 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ C. GRASSET et C. HAYEM

X est une variable aléatoire à densité qui possède un moment d'ordre 2.

Montrer que $E(|X|)$ existe et que $E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Soit f une densité de X définie sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de transfert montre que $E(|X|)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ est absolument convergente. Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| f(t) \geq 0$.

Donc $E(|X|)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge.

X possède un moment d'ordre 2 donc une espérance. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

Alors $-\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt$ et $\int_{0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existent.

Donc $\int_{-\infty}^{0} |t| f(t)\,dt$ et $\int_{0}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt$ converge.

Donc $\underline{E(|X|) \text{ existe}}$.

Soit A et B deux réels tels que $A \leq B$. Cauchy-Schwarz (!?)

$$\int_A^B |t| f(t)\,dt \leq \left| \int_A^B |t| f(t)\,dt \right| = \left| \int_A^B \left(|t|\sqrt{f(t)}\right) \sqrt{f(t)}\,dt \right| \leq \sqrt{\int_A^B \left(|t|\sqrt{f(t)}\right)^2 dt}\, \sqrt{\int_A^B \left(\sqrt{f(t)}\right)^2 dt}$$

c'est une égalité !

Donc $\int_A^B |t| f(t)\,dt \leq \sqrt{\int_A^B t^2 f(t)\,dt}\, \sqrt{\int_A^B f(t)\,dt}$. En faisant tendre A vers $+\infty$ puis B vers $-\infty$ il vient : $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,dt \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt}\, \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}$ car toutes les intégrales convergent (X possède un moment d'ordre 2).

Alors $E(|X|) \leq \sqrt{E(X^2)}\,\sqrt{1}$.

$$\underline{E(|X|) \leq \sqrt{E(X^2)}}$$

Question 22 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

N et X sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ la loi de X sachant $\{N = n\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Comparer les lois de X et de $N - X$.

Déja vu en 2011.

$(\{N=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

L'hypothèse du texte suppose, sans doute, que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $P(N=n)\neq 0$.

Alors la formule des probabilités totales donne :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(N=n)\,P_{\{N=n\}}(X=k).$$

$$\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2,\quad P_{\{N=n\}}(X=k)=\begin{cases}0 & \text{si } k>n\\ \frac{1}{n+1} & \text{si } k\leq n\end{cases}.$$

Alors $\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\,P(N=n)$.

$N-X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ car si N prend la valeur n, X prend une valeur dans $[\![0,n]\!]$.

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P(N-X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(\{N=n\}\cap\{N-X=k\})=\sum_{n=0}^{+\infty}P(\{N=n\}\cap\{X=n-k\})$$

Or $\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2$, $P(X=n-k)=0$ si $n-k<0$, donc si $n<k$.

$$\text{Alors } \forall k\in\mathbb{N},\ P(N-X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(\{N=n\}\cap\{X=n-k\})=\sum_{n=k}^{+\infty}P(N=n)\,\underbrace{P_{\{N=n\}}(X=n-k)}$$

$= \frac{1}{n+1}$ car $n-k\in[\![0,n]\!]$ lorsque $n\geqslant k$

donc $\forall k\in\mathbb{N},\ P(N-X=k)=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\,P(N=n)$.

Ainsi X et $N-X$ ont même loi.

R

Question 23 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et qu'il existe q dans $\mathbb{N}^*$ telle que $B^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles.

$I_n + A^{-1}BA = A^{-1}A + A^{-1}BA = A^{-1}I_nA + A^{-1}BA = A^{-1}(I_n+B)A$.

$I_n + ABA^{-1} = AA^{-1} + ABA^{-1} = AI_nA^{-1} + ABA^{-1} = A(I_n+B)A^{-1}$.

Alors $I_n+A^{-1}BA$ et I_n+ABA^{-1} sont semblables à I_n+B

$B^q = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ donc X^q est un polynôme annulateur de B dont la seule racine est 0

Alors $Sp\,B \subset \{0\}$. Ainsi $-1 \notin Sp\,B$. donc $B-(-1)I_n$ est inversible.

I_n+B est inversible. Comme $I_n+A^{-1}BA$ et I_n+ABA^{-1} sont semblables à I_n+B :

$I_n+A^{-1}BA$ et I_n+ABA^{-1} sont inversibles.

Question sans doute incomplète.

Question 24 ESCP 2012 $\boxed{\text{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

Q1. Montrer que la fonction $F : x \to \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

Q2. Déterminer la loi de la borne supérieure M_n de n variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition F.

Q3. Étudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Déja vu en 2011.

Q1 • $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+e^{-x} \geqslant 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+e^{-x}} \leqslant 1$.

F est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$

• $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} F(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} (1+e^{-x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (1+e^{-x}) = 1$

• F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -\dfrac{(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \geqslant 0$.

F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque.. le premier point est contenu dans les deux suivants.

• $x \mapsto 1+e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas.

Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Les quatre points précédents montrent que F est la fonction d'une variable aléatoire à densité.

Ainsi F a clairement les propriétés (caractéristiques) d'une fonction de répartition.

Remarque.. Au point quatre on pouvait se contenter de noter que F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant toutes pour fonction de répartition F. Posons $M_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Notons F_n la fonction de répartition de M_n... Exercice.. Montrer que M_n est une variable aléatoire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(M_n \leqslant x) = P(\{X_1 \leqslant x\} \cap \{X_2 \leqslant x\} \cap \cdots \cap \{X_n \leqslant x\})$.

Par indépendance on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(X_1 \leqslant x) P(X_2 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x) = (F(x))^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)^n$.

R

F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ainsi M_n est une variable aléatoire à densité et F_n' en est une densité.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_n'(x) = n\,\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^{n-1} = \frac{n e^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}}$$

(Q3) Notons G_n la fonction de répartition de $M_n - \ln n$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x) = P(M_n - \ln n \le x) = P(M_n \le x+\ln n) = F_n(x+\ln n) = \left(\frac{1}{1+e^{-x-\ln n}}\right)^n$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}e^{-x}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}e^{-x}\right)}.$$ Soit $x\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}e^{-x}\right)=0$ donc $-n\ln\left(1+\frac{1}{n}e^{-x}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\left(\frac{1}{n}\right)e^{-x} = -e^{-x}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-x}\right) = -e^{-x}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-e^{-x}}$. Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ G(x) = e^{-e^{-x}}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$. Montrons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

- $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}<0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x)=e^{-e^{-x}}\in[0,1]$. G est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{-x}) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-x})=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=1$.
- $x\mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. $x\mapsto -e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $t\mapsto e^t$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

  Par composition G est croissante sur $\mathbb{R}$.

- $x\mapsto -e^{-x}$ et $t\mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ce tout suffit pour dire que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Ainsi $(M_n - \ln n)_{n\ge1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition G ... et de densité $x\mapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}$.

Question 25 ESCP 2012 $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{u_n} (1 - e^{-t})\, dt$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrer que la série de terme général u_n converge.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \left[t+e^{-t}\right]_0^{u_n} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$. Donc $\forall x\in\mathbb{R}\ e^{-x} \geqslant -x+1$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ e^{-u_n} \geqslant -u_n+1$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1 \geqslant 0$.

Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \geqslant 0.}}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} - 1 \leqslant 0$ car $\forall n\in\mathbb{N},\ -u_n \leqslant 0$.

donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$. $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante.}}}$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge.}}}$

Notons ℓ sa limite. $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} - 1$.

En passant à la limite il vient $0 \leqslant \ell$ et $\ell = \ell + e^{-\ell} - 1$.

Alors $e^{-\ell} - 1 = 0$; $e^{-\ell} = 1$; $-\ell = \ln 1 = 0$; $\ell = 0$. $\underline{\underline{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0.}}$

$\underline{\underline{\text{V1}}}$ Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n > 0$.

- C'est vrai pour $n=0$ car $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+1$.

Nous savons déjà que $u_{n+1} \geqslant 0$. Supposons que $u_{n+1} = 0$.

Alors $\displaystyle\int_0^{u_n} (1-e^{-t})\,dt = 0$. De plus $u_n > 0$ et $t \mapsto 1 - e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, u_n]$. Alors $\forall t\in[0,u_n],\ 1 - e^{-t} = 0$.

$\forall t\in[0,u_n],\ e^{-t} = 1$. $\forall t\in[0,u_n],\ t = 0$!! Ceci est impossible car $u_n > 0$.

Ceci achève la récurrence. $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n > 0.}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-u_n}$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - e^{-0} = 0$.

2

Alors $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.

donc $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} u_p$.

donc $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leq u_n \leq (2^p u_p) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_n.

V2 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_0) = -u_0$.

Alors la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Il en est de même pour la série de terme général $u_n - u_{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $u_n - u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = -(e^{(-u_n)} - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -(-u_n) = u_n$.

donc
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - u_{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$
- La série de terme général $u_n - u_{n+1}$ converge.

Alors les règles de comparaison des séries à termes positifs montre la convergence de la série de terme général u_n.

<u>La série de terme général u_n converge.</u>

Question 26 ESCP 2012 $\boxed{F2}$ Obtenue par un élève.

X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur (Ω, A, P) telles que $X+Y$ suive une loi de Bernoulli.

Montrer que l'une des deux variables est presque sûrement constante.

X est une variable aléatoire discrète. Alors $X(\Omega)=\{x_k\ ;\ k\in K\}$ où K est un intervalle non vide de $\mathbb{N}$ et $k\mapsto x_k$ une bijection de K sur $X(\Omega)$.

Soit p le paramètre de $X+Y$. $(\{X=x_k\})_{k\in K}$ est un système complet d'événements.

$1 = P(X+Y=1) + P(X+Y=0)$.

$1 = \sum_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{X+Y=1\}) + \sum_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{X+Y=0\})$.

$1 = \sum_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{Y=1-x_k\}) + \sum_{k\in K} P(\{X=x_k\}\cap\{Y=-x_k\})$. Par indépendance il vient, $1 = \sum_{k\in K} P(X=x_k)\left[P(Y=1-x_k)+P(Y=-x_k)\right]$.

$1-x_k\neq -x_k$ donc $\{Y=1-x_k\}$ et $\{Y=-x_k\}$ sont incompatibles.

Alors $\sum_{k\in K} P(X=x_k) = 1 = \sum_{k\in K} P(X=x_k)\, P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})$

Alors $\sum_{k\in K} P(X=x_k)\left[1-P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})\right]=0$.

Or $\forall k\in K\quad P(X=x_k)\left[1-P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})\right]\geqslant 0$.

Donc $\forall k\in K,\ P(X=x_k)\left[1-P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\})\right]=0$. incompatibilité

Alors $\forall k\in K,\ P(X=x_k)=0$ ou $1=P(\{Y=1-x_k\}\cup\{Y=-x_k\}) = P(Y=1-x_k)+P(Y=-x_k)$.

<u>1er cas</u>.. X est presque sûrement constante. C'est gagné !

<u>2e cas</u>.. X n'est pas presque sûrement constante. Alors il existe deux éléments distincts α et β de $X(\Omega)$ tels que $P(X=\alpha)\neq 0$ et $P(X=\beta)\neq 0$.

Dans ces conditions $P(Y=1-\alpha)+P(Y=-\alpha)=1$ et $P(Y=1-\beta)+P(Y=-\beta)=1$.

Notons alors que si γ est un élément de $Y(\Omega)-\{1-\alpha,-\alpha\}$, $P(Y=\gamma)=0$ car

$P(Y=1-\alpha)+P(Y=-\alpha)=1$ et $\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)=1$.

R

$P(Y=1-\beta)+P(Y=-\beta)=1$. Donc $P(Y=1-\beta)\neq 0$ ou $P(Y=-\beta)\neq 0$.

<u>1er cas</u>.. $P(Y=1-\beta)\neq 0$. Alors $1-\beta=1-\alpha$ ou $1-\beta=-\alpha$

$1-\beta=1-\alpha$ est impossible car $\alpha\neq\beta$. Alors $1-\beta=-\alpha$.

Donc $-\beta=-1-\alpha$ or $-1-\alpha\neq 1-\alpha$ et $-1-\alpha\neq-\alpha$

Ainsi $-\beta\neq 1-\alpha$ et $-\beta\neq-\alpha$. Alors $P(Y=-\beta)=0$.

ce qui donne $P(Y=1-\beta)=1$. Y est presque sûrement constante.

<u>2ème cas</u>.. $P(Y=-\beta)\neq 0$. Alors $-\beta=1-\alpha$ ou $-\beta=-\alpha$.

$-\beta\neq-\alpha$ car $\beta\neq\alpha$ donc $-\beta=1-\alpha$. $1-\beta=2-\alpha$.

Or $1-\beta=2-\alpha\neq 1-\alpha$ et $1-\beta=2-\alpha\neq-\alpha$ donc $P(Y=1-\beta)=0$.

ce qui donne $P(Y=-\beta)=1$. Y est presque sûrement constante.

<u>Finalement ou X est presque sûrement constante ou Y est presque sûrement constante.</u>

R

Question 27 **ESCP 2012** **F** Obtenue par un élève.

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X suit la loi exponentielle de paramètre λ et Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. $Z = XY$.

Z est-elle une variable aléatoire discrète ? à densité ?

Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $A_x=\{\omega\in\Omega \mid Z(\omega)\leq x\}$. Soit $\omega\in\Omega$.

$$\omega\in A_x \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)\leq x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)=-1 \text{ et } -X(\omega)\leq x \\ \text{ou} \\ Y(\omega)=0 \text{ et } 0\leq x \\ \text{ou} \\ Y(\omega)=1 \text{ et } X(\omega)\leq x\end{cases}.$$

<u>1er cas.. $x<0$</u>

$$\omega\in A_x \Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)=-1 \text{ et } X(\omega)\geq -x \\ \text{ou} \\ Y(\omega)=1 \text{ et } X(\omega)\leq x\end{cases}$$

Alors $A_x = \left(Y^{-1}(\{-1\})\cap X^{-1}([-x,+\infty[)\right)\cup\left(Y^{-1}(\{1\})\cap X^{-1}(]-\infty,x])\right)$.

$Y^{-1}(\{-1\})$, $X^{-1}([-x,+\infty[)$, $Y^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(]-\infty,x])$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ car X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par intersection et union, $A_x\in\mathcal{A}$.

Par incompatibilité on a $P(A_x)=P\left(Y^{-1}(\{-1\})\cap X^{-1}([-x,+\infty[)\right)+P\left(Y^{-1}(\{1\})\cap X^{-1}(]-\infty,x])\right)$.

Par indépendance il vient $P(A_x)=P(Y^{-1}(\{-1\}))P(X^{-1}([-x,+\infty[))+P(Y^{-1}(\{1\}))P(X^{-1}(]-\infty,x]))$

$P(A_x)=P(Y=-1)P(X\geq -x)+P(Y=1)P(X\leq x) = P(Y=-1)(1-P(X<-x))+P(Y=1)P(X\leq x)$.

$P(A_x)= P(Y=-1)(1-P(X\leq -x))+P(Y=1)P(X\leq x) = \frac{1}{3}(1-(1-e^{\lambda x}))+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{3}e^{\lambda x}$.

car X est une variable à densité

$X\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$
Y suit la loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$

<u>2ème cas.. $x\geq 0$.</u>

Soit $\omega\in\Omega$: $\omega\in A_x\Leftrightarrow \begin{cases} Y(\omega)=-1 \text{ et } X(\omega)\geq -x\\ \text{ou}\\ Y(\omega)=0\\ \text{ou} \\ Y(\omega)=1 \text{ et } X(\omega)\leq x\end{cases}$.

$A_x=\left(Y^{-1}(\{-1\})\cap X^{-1}([-x,+\infty[)\right)\cup Y^{-1}(\{0\})\cup\left(Y^{-1}(\{1\})\cap X^{-1}(]-\infty,x])\right)$.

X et Y sont des variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ donc $Y^{-1}(\{-1\})$, $X^{-1}([-x,+\infty[)$, $Y^{-1}(\{0\})$, $Y^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(]-\infty,x])$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ qui est stable par intersection et réunion.

Alors $A_x\in\mathcal{A}$.

Par incompatibilité il vient :

$P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}) \cap X^{-1}([x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{0\})) + P(Y^{-1}(\{1\}) \cap X^{-1}(]-\infty,x]))$.

Par indépendance on obtient :

$P(A_x) = P(Y^{-1}(\{-1\}))\,P(X^{-1}([x,+\infty[)) + P(Y^{-1}(\{0\})) + P(Y^{-1}(\{1\}))\,P(X^{-1}(]-\infty,x]))$.

$P(A_x) = P(Y=-1)\,P(X \geqslant -x) + P(Y=0) + P(Y=1)\,P(X \leqslant x)$.

Notons que $P(Y=-1) = P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{3}$, $P(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et

$P(X \geqslant -x) = 1 - P(X < -x) = 1 - P(X \leqslant -x) = 1$.

Alors $P(A_x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - \frac{1}{3} e^{-\lambda x}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $Z^{-1}(]-\infty, x]) = A_x \in \mathcal{A}$ donc <u>Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$</u>. Notons F_Z sa fonction de répartition.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\lambda x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \frac{1}{3} e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

$x \mapsto \frac{1}{3} e^{-\lambda x}$ et $x \mapsto 1 - \frac{1}{3} e^{-\lambda x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F_Z est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$.

Alors <u>F_Z est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$</u>. $\lim_{x \to 0^-} F_Z(x) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} = F_Z(0)$

donc <u>F_Z n'est pas continue en 0</u>.

Ainsi <u>Z n'est pas une variable aléatoire à densité.</u>

F_Z a un point de discontinuité et un seul et Z n'est pas presque sûrement constante donc <u>Z n'est pas une variable aléatoire discrète</u>.

R

Question 28 **ESCP 2012** $\boxed{\text{F}}$ Obtenue par un élève.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA$.

Q1. Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer v^2.

Q2. Montrer que v est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Q3. Déterminer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$.

Il serait préférable d'inverser Q2 et Q3...

Q1 • $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. v est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$v(\lambda A+B) = \lambda A + B + {}^t(\lambda A+B) = \lambda A + B + \lambda\,{}^tA + {}^tB = \lambda(A+{}^tA) + (B+{}^tB) = \lambda v(A) + v(B)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ v(\lambda A+B) = \lambda v(A) + v(B)$. v est linéaire.

Ainsi v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$v^2(A) = v(v(A)) = v(A+{}^tA) = v(A) + v({}^tA) = A + {}^tA + {}^tA + {}^t({}^tA) = A + 2\,{}^tA + A = 2(A+{}^tA) = 2v(A)$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v^2(A) = 2v(A)$. $v^2 = 2v$.

Q2 $v^2 - 2v = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$. $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de v dont les zéros sont 0 et 2.

Alors $\operatorname{Sp} v \subset \{0, 2\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \operatorname{Ker}(v) \iff A + {}^tA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff {}^tA = -A$.

$A \in \operatorname{Ker}(v - 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \iff A + {}^tA - 2A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \iff {}^tA = A$.

Notons $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} v = \mathcal{A}_n$ et $\operatorname{Ker}(v - 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \mathcal{S}_n$.

1er cas... $n = 1$. Alors $\forall A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA = 2A$. $v = 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_1(\mathbb{R})}$.

Alors $\operatorname{Sp} v = \{2\}$ et v est diagonalisable.

2e cas... $n \geqslant 2$. $I_n \in \mathcal{S}_n$ donc $\mathcal{S}_n \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Alors $\operatorname{Ker}(v - 2\operatorname{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

donc $2 \in \operatorname{Sp} v$ et $SEP(v, 2) = \mathcal{S}_n$.

R

Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

${}^t(E_{1,2}-E_{2,1}) = {}^tE_{1,2} - {}^tE_{2,1} = E_{2,1} - E_{1,2} = -(E_{1,2}-E_{2,1})$.

Alors $E_{1,2}-E_{2,1} \in \mathcal{A}_n$ et $E_{1,2}-E_{2,1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $\operatorname{Ker} v \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

Alors $\underline{0 \in \operatorname{Sp} v \text{ et } SEP(v,0) = \mathcal{A}_n}$.

Donc $\underline{\operatorname{Sp} v = \{0,2\}}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $M = S + A$ avec $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ (*)

${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$; $S \in \mathcal{S}_n$

${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$; $A \in \mathcal{A}_n$.

Alors $M = S + A \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Soit $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$. ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$. $M = -M$; $2M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
Ainsi $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Finalement $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

$\operatorname{Sp} v = \{0,2\}$ et $SEP(v,2) \oplus SEP(v,0) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\underline{v \text{ est diagonalisable}}$.

(Q3) Nous avons déjà vu que $\underline{\operatorname{Ker} v = \mathcal{A}_n}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tv(A) = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = v(A)$. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $v(A) \in \mathcal{S}_n$.

Alors $\operatorname{Im} v \subset \mathcal{S}_n$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n$. $M \in SEP(v,2)$. $v(M) = 2M$. $M = \frac{1}{2}v(M) = v(\frac{1}{2}M)$. $M \in \operatorname{Im} v$.

$\forall M \in \mathcal{S}_n$, $M \in \operatorname{Im} v$. $\mathcal{S}_n \subset \operatorname{Im} v$.

Finalement $\underline{\operatorname{Im} v = \mathcal{S}_n}$.

Remarque.. Nous avons vu au niveau de (*) que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires.
Mieux si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nous avons vu que $\exists ! (S,A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = S + A$.
de plus $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
Soit p la projection sur $\mathcal{S}_n$ parallèlement à $\mathcal{A}_n$. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.
Alors $v = 2p$. Résultat qui permet de retrouver tout ce qui est demandé ici ?

Question 29 ESCP 2012 $\boxed{F}$ Obtenue par un élève.

$E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$. E est munit du produit scalaire canonique. Déterminer $F^{\perp}$

Manque visiblement une question. Et si on rajoutait : trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de la projection orthogonale p_F sur F.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de E.

$P \in F \iff P(1) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \iff a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$

Ainsi F est l'hyperplan d'équation $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ qui est orthonormée (... pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_n[X]$).

Alors $F^{\perp}$ est la droite vectorielle engendrée par l'élément P_0 de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la famille des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est $(1, 1, \ldots, 1)$.

Ainsi $\underline{F^{\perp} = \text{Vect}(P_0) \text{ avec } P_0 = 1 + X + \cdots + X^n.}$

Soit $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. $p_F = \text{Id}_E - p_{F^\perp}$.

$\|P_0\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{n+1}$. Posons $\varphi_0 = \frac{1}{\|P_0\|} P_0$. $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(1 + X + \cdots + X^n)$.

(φ_0) est une base orthonormée de $F^{\perp}$ donc $\forall P \in E$, $p_{F^\perp}(P) = \langle P, \varphi_0 \rangle \varphi_0$.

Alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $p_{F^\perp}(X^k) = \langle X^k, \varphi_0 \rangle \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \varphi_0 = \frac{1}{n+1}(1 + X + \cdots + X^n)$.

Ainsi la matrice de $p_{F^\perp}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Bat :

donc la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $I_{n+1} - \frac{1}{n+1} J_{n+1}$ où J_{n+1} est la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont tous ses coefficients sont égaux à 1.

La matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est encore $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & & (-1) \\ & \ddots & \\ (-1) & & n \end{pmatrix}$.