Question 1 ESCP 2013 $\boxed{\textbf{F2}}$

a) Soit $u \geqslant 1$. Comparer $\ln u$ et $u - 1$.

b) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0, f(x) > 1$.

On suppose que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))}$. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}$.

Déjà vu à l'ESCP en 2010.

---

a) ln est concave sur $]0,+\infty[$. Alors sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes. En particulier de celle au point d'abscisse 1.

Ainsi $\forall u \in]0,+\infty[$, $\ln u \leqslant (u-1)\times \ln' 1 + \ln 1 = (u-1)\times \frac{1}{1} + 0 = u-1$.

Donc $\underline{\forall u \in]0,+\infty[,\ \ln u \leqslant u-1}$. Alors $\underline{\underline{\forall u \in [1,+\infty[,\ \ln u \leqslant u-1}}$.

b) $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) > 1$ donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 < \ln(f(x)) \leqslant f(x) - 1$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) \geqslant \dfrac{1}{\ln(f(x))} > 0$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leqslant f'(x)\ln(f(x))$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leqslant f'(x)\ln(f(x)) \leqslant f'(x)(f(x)-1)$ ... car $f'(x) > 0$ pour $x \in]0,+\infty[$.

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[$, $1 \leqslant f'(x)(f(x)-1) = f'(x)f(x) - f'(x)$.

Notons que $x \mapsto f'(x)f(x) - f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Fixons x dans $]0,+\infty[$. Soit ε un élément de $]0,x[$.

$$\int_\varepsilon^x 1\,dt \underset{\varepsilon < x}{\leqslant} \int_\varepsilon^x (f'(t)f(t) - f'(t))\,dt = \left[\tfrac{1}{2}(f(t))^2 - f(t)\right]_\varepsilon^x = \tfrac{1}{2}(f(x))^2 - \tfrac{1}{2}(f(\varepsilon))^2 - f(x) + f(\varepsilon).$$

donc $x - \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{1}{2}(f(\varepsilon))^2 - f(x) + f(\varepsilon)$ et ceci pour tout ε dans $]0,x[$.

f est continue en 0 et $f(0) = 1$. Alors en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures il vient :

$x - 0 \leqslant \frac{1}{2}(f(x))^2 - \frac{1}{2}(1)^2 - f(x) + 1$; $x \leqslant \frac{1}{2}(f(x))^2 - f(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[(f(x))^2 - 2f(x) + 1\right]$.

donc $2x \leqslant (f(x)-1)^2$. Or $2x \geqslant 0$ et $f(x) - 1 \geqslant 0$ donc $\sqrt{2x} \leqslant f(x) - 1$. $f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}$. Rappelons que $f(0) = 1$ et $1 + \sqrt{2\times 0} = 1$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \geqslant 1 + \sqrt{2x}}}$.

29.11.2013

Question 2 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F2}}$

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^n \, dt$, et on suppose que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant 1$.
2. En considérant la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \in \{-1, 0, 1\}$.
3. En déduire f.

(Q1) Supposons qu'il existe t_0 dans $[0,1]$ tel que $|f(t_0)| > 1$.

Pour faciliter les écritures posons $g = |f|$. $g(t_0) > 1$.

Posons $\lambda_0 = \dfrac{g(t_0)+1}{2}$ et montrons que l'on peut trouver deux éléments α et β

de $[0,1]$ tels que : $\alpha < \beta$ et $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) > \lambda_0$.

g est continue en t_0. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|t-t_0| < \eta \Rightarrow |g(t)-g(t_0)| < \varepsilon$.

Posons $\varepsilon = \dfrac{g(t_0)-1}{2}$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ car $g(t_0) > 1$.

Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,1]$, $|t-t_0| < \eta \Rightarrow |g(t)-g(t_0)| < \varepsilon = \dfrac{g(t_0)-1}{2}$.

Donc $\forall t \in [0,1] \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $-\dfrac{g(t_0)-1}{2} < g(t)-g(t_0) < \dfrac{g(t_0)-1}{2}$. En particulier :

$\forall t \in [0,1] \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $-\dfrac{g(t_0)-1}{2} < g(t)-g(t_0)$.

$\forall t \in [0,1] \cap]t_0-\eta, t_0+\eta[$, $g(t) > -\dfrac{g(t_0)-1}{2} + g(t_0) = \dfrac{g(t_0)+1}{2} = \lambda_0$.

Alors $\forall t \in [0,1] \cap \underline{[}t_0-\dfrac{\eta}{2}, t_0+\dfrac{\eta}{2}\underline{]}$, $g(t) > \lambda_0$.

Posons $\alpha = \max(0, t_0-\frac{\eta}{2})$ et $\beta = \min(1, t_0+\frac{\eta}{2})$. Alors $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.

De plus $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) > \lambda_0$. Nous avons encore $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) \geqslant \lambda_0$.

Rappelons que $g(t_0) > 1$ donc $\lambda_0 = \dfrac{g(t_0)+1}{2} > 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{2n} = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^{2n} dt = \int_0^1 |f(t)|^{2n} dt = \int_0^1 (g(t))^{2n} dt \geqslant \int_\alpha^\beta (g(t))^{2n} dt$.

$\llcorner$ g est positive sur $[0,1]$

$I_{2n} \geqslant \displaystyle\int_\alpha^\beta (g(t))^{2n} dt \underset{\uparrow}{\geqslant} \int_\alpha^\beta (\lambda_0)^{2n} dt = (\beta-\alpha)\, \lambda_0^{2n}$.

$g(t) \geqslant \lambda_0 > 1$ si $t \in [\alpha,\beta]$

Or $\lambda_0 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_0^{2n} = +\infty$. Comme $\beta-\alpha$ est strictement positif : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((\beta-\alpha)\lambda_0^{2n}\right) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n} = +\infty$. Dans ces conditions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi il n'existe pas d'élément t_0 de $[0,1]$ tel que $|f(t_0)|>1$.

Finalement : $\underline{\forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leq 1.}$

(Q2) Supposons qu'il existe t_1 dans $[0,1]$ tel que $f(t_1)\notin\{-1,0,1\}$.

Alors $\forall t\in[0,1], |f(t)|\leq 1$ et $f(t_1)\notin\{-1,0,1\}$

donc $\forall t\in[0,1],\ |f(t)|\leq 1$ et $0<|f(t_1)|\leq 1$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

Ainsi 1/ $\forall t\in[0,1], (f(t))^{2n}(1-f^2(t))\geq 0$.

2/ $\exists t_1\in[0,1], (f(t_1))^{2n}(1-f^2(t_1))>0$.

Alors $I_{2n}-I_{2n+2}=\int_0^1 (f(t))^{2n}[1-f^2(t)]dt>0$ car $t\mapsto (f(t))^{2n}(1-f^2(t))$ est continue et positive sur $[0,1]$ et $t\mapsto (f(t))^{2n}(1-f^2(t))$ n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_{2n}-I_{2n+2}>0$. Alors $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante donc cette suite prend une infinité de valeurs. Il en est alors de même pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ceci est contraire à l'hypothèse.
Ainsi il n'existe pas d'élément t_1 de $[0,1]$ tel que $f(t_1)\notin\{-1,0,1\}$.
Finalement : $\underline{\forall t\in[0,1], f(t)\in\{-1,0,1\}.}$

(Q3) f est continue sur le segment $[0,1]$. Ainsi f possède un maximum M sur $[0,1]$ et un minimum m sur $[0,1]$. De plus $f([0,1])=[m,M]$. Or $f([0,1])$ contient un nombre fini de valeurs car $\forall t\in[0,1], f(t)\in\{-1,0,1\}$. Nécessairement $m=M$.
Alors $f([0,1])$ est réduit à un point et $\forall t\in[0,1], f(t)\in\{-1,0,1\}$.
Ainsi f est constante sur $[0,1]$ et vaut -1, 0 ou 1.

Ainsi $\underline{\forall t\in[0,1], f(t)=-1 \text{ ou } \forall t\in[0,1], f(t)=0 \text{ ou } \forall t\in[0,1], f(t)=1.}$

Remarque... Notons que si $\forall t\in[0,1], f(t)=-1$ ou si $\forall t\in[0,1], f(t)=0$ ou si $\forall t\in[0,1], f(t)=1$ la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ prend un nombre fini de valeurs ... ce qui assure la réciproque.

Question 3 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}^+}$

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que pour tout élément x de $[0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Notons F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ qui prend la valeur 0 en 0.

Soit $x \in]0,+\infty[$. Notons que $t \to e^{-xt} f(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. $u : t \mapsto e^{-xt}$ également.

De plus $F' = f$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = -x e^{-xt}$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A e^{-xt} f(t)\,dt = \left[e^{-xt} F(t) \right]_0^A - \int_0^A (-x e^{-xt}) F(t)\,dt \underset{F(0)=0}{=} e^{-xA} F(A) + x \int_0^A e^{-xt} F(t)\,dt.$$

$$\int_0^A e^{-xt} f(t)\,dt \overset{F(0)=0}{=} e^{-xA} \int_0^A f(t)\,dt + x \int_0^A e^{-xt} F(t)\,dt$$ et ceci pour tout A dans $[0,+\infty[$. (*)

1) $A \mapsto e^{-xA}$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

De plus $A \mapsto \int_0^A f(t)\,dt$ admet pour limite en $+\infty$ $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ car $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Ainsi par produit $A \mapsto e^{-xA} \int_0^A f(t)\,dt$ admet pour limite 0 en $+\infty$. (•)

2) Montrons alors que $A \mapsto \int_0^A e^{-xt} F(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Cela revient à montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} F(t)\,dt$ est convergente. Montrons d'abord que F est bornée sur $[0,+\infty[$.

$\forall A \in [0,+\infty[$, $F(A) = F(A) - F(0) = \int_0^A f(t)\,dt$. Or $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente donc $A \mapsto \int_0^A f(t)\,dt$ admet une limite finie L en $+\infty$ ($L = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$). Ainsi F admet pour limite L en $+\infty$ et $L \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $t > A \Rightarrow |F(t) - L| < \varepsilon$.

En particulier $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $t > A \Rightarrow |F(t) - L| < 1$.

Alors $\forall t \in]A,+\infty[$, $|F(t)| = |(F(t) - L) + L| \leqslant |F(t) - L| + |L| < 1 + |L|$.

$\forall t \in]A,+\infty[$, $|F(t)| \leqslant 1 + |L|$. De plus F est continue sur le segment $[0,A]$.

Ainsi F est bornée sur $[0,A]$. Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,A]$, $|F(t)| \leqslant M$.

Finalement $\forall t\in[0,+\infty[$, $|F(t)|\leq \max(M, 1+|L|)$. Posons $M'=\max(M,1+|L|)$.

Donc $\forall t\in[0,+\infty[$, $|F(t)|\leq M'$. <u>F est bornée sur $[0,+\infty[$.</u>

<u>Remarque</u>.. On aurait pu se contenter de montrer que F est bornée au voisinage de $+\infty$.

- $t\mapsto e^{-xt}F(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- $\forall t\in[0,+\infty[$, $0\leq |e^{-xt}F(t)| = e^{-xt}|F(t)|\leq M' e^{-xt}$.
- $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge car $x>0$. $\int_0^{+\infty} M' e^{-xt}\,dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent

alors que $\int_0^{+\infty} |e^{-xt}F(t)|\,dt$ converge.

$\int_0^{+\infty} e^{-xt}F(t)\,dt$ est donc absolument convergente donc convergente.

Ainsi $A\mapsto\int_0^A e^{-xt}F(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$. <u>(●●)</u>

La relation <u>(*)</u> et ce que nous venons de montrer permettent de dire que $A\mapsto\int_0^A e^{-xt}f(t)\,dt$

admet une limite finie en $+\infty$. $\hookrightarrow$ (●) + (●●)

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$ converge et ceci pour tout x strictement positif.

Or $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge par hypothèse.

<u>Finalement, pour tout élément x de $[0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$ converge.</u>

27-11-2013

P.

Question 4 ESCP 2013 $\boxed{\textbf{F1}}$

Soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ P(zz') = P(z)\,P(z')$.

a) Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}_1[X]$ éléments de E.

b) Déterminer tous les polynômes éléments de E.

Très franchement a) n'apporte rien ! Alors commençons par b) !!

* Supposons que P soit un élément de E.

<u>1er cas</u>.. <u>$\deg P \leq 0$.</u> $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $P = \lambda$.

Alors $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda = P(zz') = P(z)P(z') = \lambda\lambda = \lambda^2$.

Ainsi $0 = \lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda)$. $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Par conséquent <u>$P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ou $P = 1$.</u>

<u>2ème cas</u>.. <u>$\deg P \geq 1$.</u> Rappelons que P est scindé. Soit z_0 une racine de P.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z z_0) = P(z)P(z_0) = P(z) \times 0 = 0$. Alors pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$z z_0$ est un zéro de P.

Supposons $z_0 \neq 0$. $z \mapsto z z_0$ est alors une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Donc

tout élément de $\mathbb{C}$ est zéro de P !! or $\deg P \geq 1$!

Ainsi nécessairement $z_0 = 0$. P est scindé et 0 est son seul zéro.

Ainsi $\exists c \in \mathbb{C}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $P = cX^n$. Comme $\deg P \geq 1$: $c \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $c(zz')^n = P(zz') = P(z)P(z') = c z^n c z'^n$.

Donc $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $c z^n z'^n = c^2 z^n z'^n$.

En particulier en faisant $z = 1$ et $z' = 1$ il vient $c = c^2$. Donc $c = 1$ car $c \neq 0$.

Finalement <u>$P = X^n$.</u>

Résumons cette petite analyse.

Si $P \in E$ et si $\deg P \leq 0$: $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ou 1. Si $P \in E$ et si $\deg P \geq 1$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$,

$P = X^n$.

Mieux si <u>$P \in E$: $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ou $\exists n \in \mathbb{N}$, $P = X^n$.</u>

* Une petite réciproque s'impose.

• Posons $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $P(zz') = 0 = 0 \times 0 = P(z)P(z')$. <u>$P \in E$.</u>

• Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\exists n \in \mathbb{N}$, $P = X^n$.

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$; $P(zz') = (zz')^n = z^n z'^n = P(z)\,P(z')$. $\underline{P \in E\,!}$

Tout est dit : $\underline{\underline{E = \{X^n \,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0_{\mathbb{C}[X]}\}.}}$

27-11-2013

R.

Question 5 **ESCP 2013** $\boxed{\text{F1}^-}$ **Jessica et Robin COHEN**

P, Q, R, S sont trois éléments de $\mathbb{R}_3[X]$. Les propositions suivantes sont-elles des conditions suffisantes à la non liberté de la famille (P, Q, R, S) ?

Proposition a) $P(0) = Q(0) = R(0) = S(0) = 0$

Proposition b) $P(0) = Q(0) = R(0) = S(0) = 1$

---

a) Supposons que : $P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=0$ et posons $\mathcal{H}=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=0\}$.

Notons que (P,Q,R,S) est une famille de 4 éléments de $\mathcal{H}$.

Soit $H\in\mathbb{R}_3[X]$

$H\in\mathcal{H} \Leftrightarrow H(0)=0 \Leftrightarrow X$ divise $H \Leftrightarrow \exists A\in\mathbb{R}[X],\ H=XA \underset{H\in\mathbb{R}_3[X]}{\Leftrightarrow} \exists A\in\mathbb{R}_2[X],\ H=XA$.

$\mathbb{R}_2[X]=\text{Vect}(1,X,X^2)$

$H\in\mathcal{H} \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ H=X(\alpha+\beta X+\gamma X^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ H=\alpha X+\beta X^2+\gamma X^3$.

Finalement $\mathcal{H}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par la famille (X,X^2,X^3).

Ainsi $\dim\mathcal{H}\overset{(*)}{\leq}3$. Or (P,Q,R,S) est une famille de 4 éléments de $\mathcal{H}$; elle ne peut pas être libre.

(*) notons en fait que $\dim\mathcal{H}=3$!

<u>$P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=0$ est une condition suffisante pour la non liberté de la famille (P,Q,R,S).</u>

b) Posons $P=1$, $Q=X+1$, $R=X^2+1$ et $S=X^3+1$.

- $P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=1$
- (P,Q,R,S) est une famille de 4 polynômes non nuls de degrés échelonnés de $\mathbb{R}_3[X]$.

Ainsi (P,Q,R,S) est une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_3[X]$.

Finalement, <u>$P(0)=Q(0)=R(0)=S(0)=1$ n'est pas une condition suffisante à la non liberté de la famille (P,Q,R,S).</u>

27-11-2013

l.

Question 6 **ESCP 2013** $\boxed{\mathbf{F1^+}}$ **Natacha BOGDANIUK**

E est l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. T est l'application de E dans E qui à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1. T est-elle surjective ? injective ?

Q2. Résoudre l'équation $u\in E$ et $T(u)=\dfrac{1}{2}u$.

Q1 Montrons directement que T est une bijection de E dans E.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. Montrons par analyse-synthèse que $(v_n)_{n\geq 0}$ possède un antécédent et un seul par T dans E.

* Analyse - Unicité.

Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un antécédent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par T dans E.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}=v_n$. Ainsi :

→ $u_0=v_0$

→ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(u_0+u_1+\cdots+u_n)-(u_0+u_1+\cdots+u_{n-1})=(n+1)v_n-n\,v_{n-1}$.

Finalement $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)v_n-n\,v_{n-1}$. Ce qui montre que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un antécédent par T dans E il est unique.

* Synthèse - Existence

Posons $u_0=v_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(n+1)v_n-n\,v_{n-1}$.

• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement un élément de E.

petit changement d'indice...

• Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)v_k-k\,v_{k-1}\right]\underset{u_0=v_0}{=}v_0+\sum_{k=1}^{n}(k+1)v_k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v_k.$$

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=v_0+(n+1)v_n-(0+1)v_0=(n+1)v_n.\quad\text{Donc}\quad v_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

De plus $v_0=u_0=\dfrac{1}{0+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{0}u_k$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=v_n$. Donc $T\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)=(v_n)$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un antécédent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par T dans E.

ceci achève de montrer que tout élément de E possède un antécédent et un seul par T dans E.

Ainsi <u>T est une bijection de E sur E.</u>

(Q2) (*) Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E tel que $T(u)=\frac{1}{2}u$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_0+u_1+\dots+u_n}{n+1}=\frac{1}{2}u_n$.

. $u_0=\frac{1}{2}u_0$ donc $\underline{u_0=0}$

. $\frac{u_0+u_1}{2}=\frac{1}{2}u_1$; $\frac{u_1}{2}=\frac{u_1}{2}$!!!

. $\frac{u_0+u_1+u_2}{3}=\frac{1}{2}u_2$; $\frac{u_1+u_2}{3}=\frac{1}{2}u_2$; $2u_1+2u_2=3u_2$; $\underline{u_2=2u_1}$.

. $\frac{u_0+u_1+u_2+u_3}{4}=\frac{1}{2}u_3$; $\frac{0+u_1+2u_1+u_3}{4}=\frac{1}{2}u_3$. $2(3u_1+u_3)=4u_3$.

donc $3u_1+u_3=2u_3$; $\underline{u_3=3u_1}$.

Montrons alors par récurrence faible que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=k\,u_1$.

→ c'est vrai pour $k=1$!

→ Supposons que $k\in[\![1,+\infty[\![$ et que $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $u_i=i\,u_1$.

Montrons alors que $u_{k+1}=(k+1)u_1$.

$\frac{u_0+u_1+\dots+u_k+u_{k+1}}{k+2}=\frac{1}{2}u_{k+1}$. Alors $\frac{k+2}{2}u_{k+1}=u_0+u_1+\dots+u_k+u_{k+1}$.

donc $\frac{k+2}{2}u_{k+1}=0+\sum_{i=1}^{k}i\,u_1+u_{k+1}=u_1\times\sum_{i=1}^{k}i+u_{k+1}=u_1\times\frac{k(k+1)}{2}+u_{k+1}$.

Ainsi : $u_1\times\frac{k(k+1)}{2}=\left[\frac{k+2}{2}-1\right]u_{k+1}=\frac{k}{2}u_{k+1}$.

comme k n'est pas nul : $u_{k+1}=\frac{2}{k}u_1\times\frac{k(k+1)}{2}=(k+1)u_1$. ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=k\,u_1$. Mieux <u>$\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=k\,u_1$</u> (car $u_0=0$).

Par conséquent <u>$\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda n$.</u>

(*) Réciproquement soit λ un réel et $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda n$. Notons que $T(u)=\frac{1}{2}u$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_0+u_1+\dots+u_n}{n+1}=\frac{\sum_{k=0}^{n}(\lambda k)}{n+1}=\frac{\lambda}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k=\frac{\lambda}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\lambda n=\frac{1}{2}u_n.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $T(u)=\frac{1}{2}u$.

Finalement les solutions de l'équation $u\in E$ et $T(u)=\frac{1}{2}u$ sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que : $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda n$.

Remarques – 1.. Notons d'abord qu'il est facile de montrer que T est un endomorphisme de E.

2°.. La question 1 montre en fait que T est un automorphisme de E.

3°.. La question 2 montre que $\frac{1}{2}$ est valeur de T et que le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4°/ On peut encore montrer que :

$\rightarrow$ $\mathrm{Sp}\,T=\{\frac{1}{p+1}\ ;\ p\in\mathbb{N}\}$

$\rightarrow$ Si $p\in\mathbb{N}$, le sous-espace propre de T associé à la valeur $\frac{1}{p+1}$ est la droite vectorielle engendrée par la suite $(t_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ de E définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ t_n^{(p)}=\begin{cases}\binom{n}{p} & \text{si } n\geqslant p\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

On peut trouver cela dans les exercices de l'oral d'ESCP de 1998 (2.15).

R. 27-11-2013

Question 7 ESCP 2013 $\boxed{\textbf{F1}}$ Thomas PERARD

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les matrices $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

Déjà vu à l'ESCP en 2009.

• Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $A=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

* Supposons A et B semblables. A et B ont même spectre car elles représentent le même endomorphisme. Notons que A et B sont triangulaires supérieures.

Alors $\mathrm{Sp}\,A=\{\alpha,\beta\}$ et $\mathrm{Sp}\,B=\{1,2\}$. Ainsi $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$. Notons qu'alors

$(\alpha=1$ et $\beta=2)$ ou $(\alpha=2$ et $\beta=1)$.

* Réciproquement supposons que $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$. Alors $\mathrm{Sp}\,A=\mathrm{Sp}\,B=\{1,2\}$.

A et B ont deux valeurs propres distinctes 1 et 2, et appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Alors A et B sont diagonalisables et les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles.

Il existe une base $\mathcal{B}_1=(X_1,X_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1 et 2. Soit Q_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}_1$. Q_1 est inversible et $Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{Diag}(1,2)$.

De même il existe une matrice inversible Q_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q_2^{-1}BQ_2=\mathrm{Diag}(1,2)$.

Ainsi $Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{Diag}(1,2)=Q_2^{-1}BQ_2$.

Alors $A=Q_1(Q_2^{-1}BQ_2)Q_1^{-1}=Q_1Q_2^{-1}B\,Q_2Q_1^{-1}=(Q_2Q_1^{-1})^{-1}B\;Q_2Q_1^{-1}$.

Par conséquent A et B sont semblables.

Finalement A et B sont semblables si et seulement si $\{\alpha,\beta\}=\{1,2\}$ ou si et seulement si $(\alpha=1$ et $\beta=2)$ ou $(\alpha=2$ et $\beta=1)$.

• Notons $\hat{p}$ la probabilité pour que les matrices $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

$\hat{p} = P\big((\{X=1\} \cap \{Y=2\}) \cup (\{X=2\} \cap \{Y=1\})\big)$ d'après ce qui précède.

Par incompatibilité il vient $\hat{p} = P(\{X=1\} \cap \{Y=2\}) + P(\{X=2\} \cap \{Y=1\})$.

X et Y étant indépendantes et ayant même loi il vient :

$\hat{p} = P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1) = P(X=1)P(X=2) + P(X=2)P(X=1) = 2P(X=1)P(X=2)$

Or X suit la loi géométrique de paramètre p donc $\hat{p} = 2 \times p \times (1-p)p$.

$\hat{p} = 2p^2(1-p)$.

La probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables est $2p^2(1-p)$.

23-11-2013

1.

Question 8 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de tels que $f \circ g = g \circ f$.

On note S (resp. A) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

On suppose que S est symétrique et A antisymétique.

Montrer que $\forall x \in E,\ \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$

Déjà vu à HEC en 2007.

Soit x un élément de E. Notons X sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale : $\langle f(x), g(x)\rangle = {}^t(SX)AX$ et $\langle g(x), f(x)\rangle = {}^t(AX)SX$ car SX est la matrice de $f(x)$ dans $\mathcal{B}$ et AX est la matrice de $g(x)$ dans $\mathcal{B}$.

$\langle f(x), g(x)\rangle = {}^t(SX)AX = {}^tX\,{}^tS\,AX \underset{\uparrow}{=} {}^tXSAX = {}^tXASX$. $\underline{\langle f(x), g(x)\rangle = {}^tXASX.}$

S est symétrique $\uparrow$ $SA = AS$ car $f \circ g = g \circ f$.

$\langle g(x), f(x)\rangle = {}^t(AX)SX = {}^tX\,{}^tA\,SX \underset{\uparrow}{=} -{}^tXASX = -\langle f(x), g(x)\rangle = -\langle g(x), f(x)\rangle$.

A est antisymétrique

Ainsi $\langle g(x), f(x)\rangle = 0$ ou $\underline{\langle f(x), g(x)\rangle = 0}$.

$\|(f-g)(x)\|^2 = \|f(x)-g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), g(x)\rangle + \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2$.

$\|(f+g)(x)\|^2 = \|f(x)+g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), g(x)\rangle + \|g(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2$. Alors :

$\uparrow \langle f(x), g(x)\rangle = 0$.

$\|(f-g)(x)\|^2 = \|(f+g)(x)\|^2$, $\|(f-g)(x)\| \geqslant 0$ et $\|(f+g)(x)\| \geqslant 0$.

Ainsi $\|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$.

$\underline{\forall x \in E,\ \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|.}$

Question 9 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$

Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?

Nous noterons Ω l'ensemble des bijections des n personnes sur les n places de la file.

Nous prendrons $\mathcal{T}$ égale à $\mathcal{P}(\Omega)$. P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Soit $m \in [\![0, n-2]\!]$. Notons A_m l'événement Jean et Paul sont séparés par m personnes.

$$P(A_m) = \frac{\text{card } A_m}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n!}\,\text{card } A_m = \frac{1}{n!}\left[(n-(m+1)) \times 2 \times (n-2)!\right]$$

choix de la place de la première personne du duo Jean et Paul

Choix de Pierre ou de Jean sur la première place qui avait été trouvée.

choix de la place des $n-2$ autres personnes sur les $n-2$ places restantes.

Ainsi $P(A_m) = \dfrac{2(n-(m+1))}{n(n-1)}$. La probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes est $2\,\dfrac{n-(m+1)}{n(n-1)}$ pour tout m dans $[\![0, n-2]\!]$. Notons que $P(A_m) = 0$ si $m \notin [\![0, n-2]\!]$!!

Remarque.. On aurait pu s'intéresser uniquement à la place de Jean et Paul dans la file.
Alors $\text{card } \Omega = \binom{n}{2}$, $\text{card } A_m = n-(m+1)$. On retrouve le résultat...

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes entre Jean et Paul.

On cherche $E(X)$, non ??

$X(\Omega) = [\![0, n-2]\!]$ et $\forall m \in [\![0, n-2]\!]$, $P(X=m) = P(A_m) = \dfrac{2(n-m-1)}{n(n-1)}$.

$X(\Omega)$ étant fini, $E(X)$ existe. $E(X) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-2} m\,P(X=m)$.

$$E(X) = \sum_{m=0}^{n-2} m\left(\frac{2(n-m-1)}{n(n-1)}\right) = \frac{2}{n(n-1)}\left[(n-1)\sum_{m=0}^{n-2} m - \sum_{m=0}^{n-2} m^2\right]$$

$$E(X) = \frac{2}{n(n-1)}\left[(n-1)\frac{(n-2)(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)(2(n-2)+1)}{6}\right] = \frac{2(n-2)(n-1)}{6(n)(n-1)}\left[3(n-1) - (2n-3)\right]$$

$$E(X) = \frac{2(n-2)}{6n} \times \big(\underbrace{3n-3-2n+3}_{n}\big) = \frac{2(n-2)}{3} = \frac{n-2}{3}.$$

Ainsi le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul est $\dfrac{n-2}{3}$.

Question 10 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}^-}$ **Arthur SEZILLE**

On jette indéfiniment et de manière indépendante une pièce équilibrée et on définit l'événement E : "on obtient sur deux tours consécutifs le même résultat (pile-pile ou face-face)".

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro du tour où l'événement E se réalise pour la première fois.

Trouver la loi de X et son espérance.

Déjà vu à l'ECSP en 2011.

---

dans la suite nous noterons P_i (resp. F_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face)... pour tout i dans $\mathbb{N}^*$.

$X(\Omega) = [\![2, +\infty [\![$. à quelques abus près...

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = P\big((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{2k-3} \cap F_{2k-2} \cap P_{2k-1} \cap P_{2k}) \cup$

$(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{2k-3} \cap P_{2k-2} \cap F_{2k-1} \cap F_{2k})\big)$. Par incompatibilité et indépendance il vient :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4)\dots P(P_{2k-3})P(F_{2k-2})P(P_{2k-1})P(P_{2k})+$

$P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4)\dots P(F_{2k-3})P(P_{2k-2})P(F_{2k-1})P(F_{2k})$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{1}{2^{2k-1}}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$P(X=2k+1) = P\big((F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{2k-1} \cap P_{2k} \cap P_{2k+1}) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{2k-1} \cap F_{2k} \cap F_{2k+1})\big)$.

Par incompatibilité et indépendance on obtient encore :

$P(X=2k+1) = P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4)\dots P(F_{2k-1})P(P_{2k})P(P_{2k+1}) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4)\dots P(P_{2k-1})P(F_{2k})P(F_{2k+1})$.

Ainsi $P(X=2k+1) = 2 \times \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k}}$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=2k) = \frac{1}{2^{2k-1}}$ et $P(X=2k+1) = \frac{1}{2^{2k}}$.

Ainsi $\underline{\underline{\forall k \in [\![2, +\infty [\![, \; P(X=k) = \frac{1}{2^{k-1}}}}$.

Posons $Y = X-1$. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=k) = P(X=k+1) = \frac{1}{2^{k+1-1}} = \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2}$.

Y suit alors une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

Alors $E(Y)$ existe et vaut 2. Comme $X = Y+1$, $\underline{\underline{E(X) \text{ existe et vaut } 3}}$.

<u>Exercice</u> .. Reprendre l'exercice avec une pièce qui donne pile avec la probabilité p ($p \in]0,1[$).

- On s'attachera à bien justifier l'existence de $E(X)$.

- <u>Réponses</u>. On pose $q = 1-p$.

  → $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = 2k) = (p^2+q^2)(pq)^{k-1}$.

  → $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = 2k+1) = (pq)^k$.

  → $E(X) = \dfrac{2+pq}{1-pq}$.

R.

Question 11 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}^+}$

On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes). Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

Déjà donné en 2009

Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier as.

$X(\Omega) = [\![1, 29]\!]$.

Soit $k \in [\![1, 29]\!]$. $P(X=k) = \dfrac{28 \times 27 \times \cdots \times (28-(k-2)) \times 4}{32 \times 31 \times \cdots \times (32-(k-1))}$

choix des $k-1$ premières cartes qui ne sont pas des as.

choix de la dernière carte qui est un as.

choix des tirages possibles des k premières cartes

$$P(X=k) = \frac{(32-k)!}{(32)!} \times \frac{28!}{(28-k+1)!} \times 4 = \frac{4 \times 28!}{(32)!} \times \frac{(32-k)!}{(29-k)!}.$$

$$P(X=k) = \frac{4!\,(28)!}{(32)!} \times \frac{1}{3!} \times \frac{(32-k)!}{(29-k)!} = \frac{1}{\binom{32}{4}} \times \binom{32-k}{3}.$$

$$X(\Omega) = [\![1, 29]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1, 29]\!],\ P(X=k) = \frac{\binom{32-k}{3}}{\binom{32}{4}}.$$

__Remarques 1.__ - On peut retrouver ce résultat de la manière suivante.

Soit $k \in [\![1, 29]\!]$. $P(X=k) = \dfrac{\binom{32-k}{3} \times 4!\,(28)!}{\binom{32}{4} \times 4!\,(28)!}$ $\begin{matrix}(*)\\(**)\end{matrix}$

On considère que l'on retourne toutes les cartes.

$*$ $\binom{32-k}{3}$ choix de la place des trois derniers as parmi les $32-k$ dernières places

$4!$ choix des as sur leurs places

$(28)!$ choix des cartes qui ne sont pas des as sur les 28 places déjà choisies.

$**$ $\binom{32}{4}$ choix de la place des 4 as

$4!$ choix des as sur leurs places.

$(28)!$ choix des cartes qui ne sont pas des as sur les 28 places déjà choisies.

Notons que l'on aurait pu écrire directement $P(X=k)=\dfrac{\binom{32-k}{3}}{\binom{32}{4}}$ en distinguant simplement les as des autres cartes.

<u>Remarques 2.</u>– $\sum_{k=1}^{29} P(X=k)=1$ donc $\sum_{k=1}^{29}\binom{32-k}{3}=\binom{32}{4}$ c'est-à-dire :

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\dots+\binom{31}{3}=\binom{32}{4}$. On retrouve une formule classique… A moins que l'on se serve de cette formule pour vérifier $\sum_{k=1}^{29}P(X=k)=1$…

Au choix !!

(*) $E(X)=\sum_{k=1}^{29} k\,P(X=k)=\sum_{k=1}^{29} k\times\dfrac{\binom{32-k}{3}}{\binom{32}{4}} \underset{i=32-k}{=} \dfrac{1}{\binom{32}{4}}\sum_{i=3}^{31}(32-i)\binom{i}{3}$.

E(X) existe car X est finie.

$$E(X)=\frac{1}{\binom{32}{4}}\left[\sum_{i=3}^{31}(33)\binom{i}{3}-\sum_{i=3}^{31}\underbrace{(i+1)\binom{i}{3}}_{4\times\binom{i+1}{4}}\right].$$

$$E(X)=\frac{1}{\binom{32}{4}}\left(33\underbrace{\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\dots+\binom{31}{3}\right]}_{\binom{32}{4}}-4\underbrace{\left[\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\dots+\binom{32}{4}\right]}_{\binom{33}{5}}\right).$$

$$\underline{\underline{E(X)=33-4\times\frac{\binom{33}{5}}{\binom{32}{4}}=33-4\times\frac{33}{5}=\frac{33}{5}}}.$$

Le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour avoir le 1er as est $\frac{33}{5}$

<u>Exercice.</u> On tire sans remise toutes les boules d'une urne contenant a boules blanches et b boules noires ($a\geq 1$ et $b\geq 1$). $r\in [\![1,a]\!]$. X_r est la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la r-ième boule blanche. Trouver la loi de X_r et son espérance.

<u>Réponse.</u>– $X_r(\Omega)=[\![r,b+r]\!]$ et $\forall k\in[\![r,b+r]\!]$, $P(X=k)=\dfrac{\binom{k-1}{r-1}\binom{a+b-k}{a-r}}{\binom{a+b}{a}}$. $E(X_r)=r\,\dfrac{a+b+1}{a+1}$.

Notons que pour $r=1$, $a=4$ et $b=28$ on retrouve les résultats de l'exercice précédent.

27.11.2013

2.

Question 12 **ESCP 2013** $\boxed{\text{F1}}$ **ADELINE**

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Trouver la loi et l'espérance de la variable aléatoire $Y = (-1)^X$.

$\boxed{\text{rappel : } X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$

$Y(\Omega) = \{-1, 1\}$.

$$P(Y=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda}.$$

Rappelons que $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ et $e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}$.

$1+(-1)^k = \begin{cases} 2 \text{ si } k \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors $e^{\lambda} + e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 + (-1)^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \times 2.$

Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$.

donc $P(Y=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \times e^{-\lambda} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$.

$P(Y=-1) = 1 - P(Y=1) = 1 - \frac{1+e^{-2\lambda}}{2} = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}$.

$\underline{\underline{Y(\Omega) = \{-1, 1\},\ P(Y=1) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2} \text{ et } P(Y=-1) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}.}}$

$E(Y) = (-1) P(Y=-1) + (1) P(Y=1) = -\frac{1-e^{-2\lambda}}{2} + \frac{1+e^{-2\lambda}}{2} = \frac{-1+e^{-2\lambda}+1+e^{-2\lambda}}{2} = e^{-2\lambda}.$

$\underline{\underline{E(Y) = e^{-2\lambda}.}}$

12.11.2013

R.

Question 13 ESCP 2013 $\boxed{\text{F1}}$ Sofyan FORTAS, Nassim ELOUARZADI, Germain GAUTHIER, Perrine GAYET

a est un réel strictement positif. $n_0 = \text{Ent}\,(a) + 1$.

Pour tout n dans $[\![n_0, +\infty [\![$, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$.

Étudier la convergence en loi de la suite $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)_{n \geqslant n_0}$.

Déjà vu à l'ECSP en 2009 et 2011.

Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$. Soit F_n la fonction de répartition de $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

$Y_n(\Omega) = \{ \frac{k}{n} ; k \in \mathbb{N}^* \}$.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = P(X_n \leq nx) \underset{\substack{\uparrow \\ nx < 1}}{=} 0$.

Soit $x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$.

$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = P(X_n \leq nx) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\text{Ent}(nx)} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{\text{Ent}(nx)} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{k-1} \times \frac{a}{n}$.

$F_n(x) = \dfrac{a}{n} \times \dfrac{1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}}{1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)} = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{n}[\\ 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, +\infty[. \end{cases}$

Pour faciliter le passage à la limite faisons la remarque suivante.

Soit $x \in]0, \frac{1}{n}[$. Rappelons que $F_n(x) = 0$.

Notons que $nx \in]0, 1[$ et qu'ainsi $\text{Ent}(nx) = 0$.

Alors $1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^0 = 1 - 1 = 0 = F_n(x)$.

Finalement $\forall x \in]0, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0 = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$ et ceci pour tout

élément n de $[\![n_0, +\infty[\![$.

Clairement $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $n \in [\![n_0,+\infty[\![$.

$F_n(x) = 1 - \left(1-\frac{a}{n}\right)^{\text{Ent}(nx)} = 1 - e^{\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}$ (car $1-\frac{a}{n} > 0$ puisque $n \geqslant n_0 = \text{Ent}(a)+1$).

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right) = 1$ donc $\ln\left(1-\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(nx) = +\infty$ ($x>0$) donc $\text{Ent}(nx) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.

Ainsi $\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (nx)\left(-\frac{a}{n}\right) = -ax$.

Par continuité de la fonction exponentielle on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)} = e^{-ax}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - e^{\text{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}\right) = 1 - e^{-ax}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ 1-e^{-ax} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$ ... ou

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 1-e^{-ax} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$

Ainsi la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

Question 14 ESCP 2013 F1 Robin MISSIRIAN

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (m, μ) pour que $P(Y \leqslant X) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

- Y suit la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.
- X suit la loi normale d'espérance m et de variance σ^2. le cours indique alors que $-X$ suit la loi normale d'espérance $-m$ et de variance σ^2.
- X et Y sont indépendantes donc Y et $-X$ sont indépendantes.

le théorème de stabilité sur les lois normales permet de dire que $Y+(-X)$ suit la loi normale d'espérance $\mu+(-m)$ et de variance $\sigma^2+\sigma^2$

Ainsi $Y-X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu-m, \left(\sqrt{2\sigma^2}\right)^2\right)$.

notons que $\dfrac{Y-X-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}}$ suit la loi normale centrée réduite dont nous noterons ϕ la fonction de répartition. rappelons que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ strictement croissante.

$$P(Y\leqslant X) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(Y-X\leqslant 0) \geqslant \phi(0) \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-X-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}} \leqslant \frac{0-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \geqslant \phi(0).$$

$$P(Y\leqslant X) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \phi\left(\frac{0-(\mu-m)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \geqslant \phi(0)$$

$$P(Y\leqslant X) \geqslant \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} -\frac{\mu-m}{\sqrt{2\sigma^2}} \geqslant 0 \Leftrightarrow -(\mu-m)\geqslant 0 \Leftrightarrow m-\mu\geqslant 0 \Leftrightarrow m\geqslant\mu.$$

ϕ bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ strictement croissante.

Ainsi $P(Y\leqslant X) \geqslant \frac{1}{2}$ si et seulement si $m\geqslant\mu$.

Remarque.— Ceci vaut encore pour une variance de Y quelconque (et non égale à celle de X).

Question 15 **ESCP 2013** $\boxed{\textbf{F1}^-}$ **Baptiste GUERIN**

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Q1. X est une variable aléatoire, il existe un réel c tel que $P(\text{Ent}\,(X) < c) = 1$.

Q2. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, X est une variable aléatoire possédant une espérance alors $f(X)$ possède une espérance.

Q3 Oubliée ?

Q1 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi normale centrée réduite. Soit Φ sa fonction de répartition. Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

Soit c un réel quelconque. $\{\text{Ent}(X)<c\} \subset \{X-1<c\} = \{X<c+1\}$. Alors :

$P(\text{Ent}(X)<c) \leqslant P(X<c+1) = P(X\leqslant c+1) = \Phi(c+1) < 1$.

$\forall c\in\mathbb{R}$, $P(\text{Ent}(X)<c) < 1$. <u>La proposition de Q1 est fausse.</u>

Q2 Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=t^2$. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t\in[1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- g est positive sur $\mathbb{R}$.
- g est continue sur $[1,+\infty[$ et sur $]-\infty,1[$. Ainsi g est continue au moins sur $\mathbb{R}-\{1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- g est nulle sur $]-\infty,1[$ donc $\int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt$ converge et vaut 0.

  $\forall A\in[1,+\infty[$, $\int_1^A g(t)\,dt = \int_1^A \frac{2}{t^3}\,dt = \left[-t^{-2}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^2}$. $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A g(t)\,dt = 1$.

  Alors $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1. donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Ceci achève de montrer que <u>g est une densité de probabilité</u>.

$t\mapsto t\,g(t)$ est nulle sur $]-\infty,1[$ donc $\int_{-\infty}^{1} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut 0.

$t\mapsto t\,g(t)$ est continue <u>sur</u> $[1,+\infty[$. $\forall A\in[1,+\infty[$, $\int_1^A t\,g(t)\,dt = \int_1^A \frac{2}{t^2}\,dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A}$.

$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A t\,g(t)\,dt = 2$. $\int_1^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut 2.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut 2. Notons, mais c'est inutile, que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ est absolument convergente.

Ainsi $E(X)$ possède une espérance qui vaut 2.

$f(X) = X^2$. $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^2 g(t) = \frac{2}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t} dt$ diverge.

Ceci suffit pour dire que $E(X^2)$ n'existe pas.

Ainsi $f(X)$ n'a pas d'espérance.

Par conséquent la proposition de $\varphi 2$ est fausse.

Exercice .. Etudier $\varphi 1$ et $\varphi 2$ avec des variables aléatoires discrètes.