Voici les questions sans préparation 2008 qu'à bien voulu nous fournir HEC. Suivent quelques bribes de correction à usage interne. En fait ce ne sont pas des corrections mais des pistes. Les solutions ne sont pas optimales. Il doit aussi rester quelques erreurs mais c'est la loi du genre non ?

EXERCICES SANS PRÉPARATION 2008

Question 1 HEC 2008 S1 F1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n strictement supérieur ou égal λ on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général N_n.

Question 2 HEC 2008 S2 F2

u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

Q1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda\, u$.

Q2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u - \mathrm{Id}_E$ est inversible et déterminer son inverse.

Question 3 HEC 2008 S3 F1

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.

Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

Q1. Calculer P_1, P_2 et P_3.

Q2. Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Question 4 HEC 2008 S4 F2

f est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$.

Q1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1-y$.

Q2. f est-elle continue en $(1,1)$?

Q3. Justifier l'existence de $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\mathrm{Min}} f(x,y)$ et $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\mathrm{Max}} f(x,y)$ et déterminer leur valeur.

Question 5 HEC 2008 S5 F3

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels qui converge ver ℓ.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dbinom{n}{0}u_0 + \dbinom{n}{1}u_1 + \dbinom{n}{2}u_2 + \cdots + \dbinom{n}{n}u_n\right)$. On se propose de montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Q1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}\right) = 0$.

Q2. Montrer le résultat pour $\ell = 0$.

Q3. Étudier le cas général.

Question 6 HEC 2008 S6 F1

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement postif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\left(e^{-n\,\theta}\sum_{k\leqslant n\,x}\frac{(n\,\theta)^k}{k!}\right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$! !

Question 7 HEC 2008 S7 F2

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère n variable aléatoires à densité, de même loi que et indépendantes X_1, X_2, ..., X_n. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\big(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\big)$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

Q1. Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(F(x))^j\,(1-F(x))^{n-j}$.

Q2. En déduire que Y_k admet une densité que l'on explicitera sans signe $\sum$.

Question 8 HEC 2008 S8 F2

Q1. $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $x \to (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. On note P la partie régulière de ce développement limité.

Q2. Montrer que $P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.

Q3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est à dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.

Montrer que l'équation $B^2 = I_n + A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n) admet au moins une solution.

Question 9 HEC 2008 S9 F1

U est une variable aléatoire définie sur un espace probablilsé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et $q \in]0,1[$.

Déterminer la loi de la variable alétaoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Question 10 HEC 2008 S10 F1

Représenter dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des point de coordonnées (a,b) telles que $a > 0$, $b > 0$ et la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{1+b^n}$ converge.

Question 11 HEC 2008 S11 F1

$n \in [\![2, +\infty[\![$. Déterminer les polynômes de degré n, divisible par $X+1$ et dont les restes dans la division euclidienne par $X+2$, $X+3$, ..., $X+n+1$ sont égaux.

Question 1 HEC 2008 S1 F1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n strictement supérieur ou égal λ on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général N_n.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n \in]\lambda, +\infty[$. $nN_n = \mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$. $(nN_n)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

indépendance

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(nN_n = k) = P(\{X_{1,n} = 0\} \cap \{X_{2,n} = 0\} \cap \dots \{X_{k-1,n} = 0\} \cap \{X_{k,n} = 1\}) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n}$

$nN_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Notons F_n la fonction de répartition de N_n.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{n}[$, $F_n(x) = 0$. Nous retiendrons que $\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_n(x) = 0$.

Soit $x \in [\frac{1}{n}, +\infty[$. $F_n(x) = P(N_n \leqslant x) = P(nN_n \leqslant nx) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant nx} P(nN_n = k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} P(nN_n = k)$

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}\, \frac{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}}{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}$$

Notons que si $x \in]0, \frac{1}{n}[$, $\mathrm{Ent}(nx) = 0$ donc $F_n(x) = 0$ et $1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)} = 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$\mathrm{Ent}(nx) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (nx)\left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda x$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\mathrm{Ent}(nx) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right) = -\lambda x$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{\mathrm{Ent}(nx) \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite de terme général N_n converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

R

Question 2 **HEC 2008 S2** $\boxed{\textbf{F2}}$

u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

Q1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda\, u$.

Q2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u -$ Id_E est inversible et déterminer son inverse.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 $\exists a \in E$, $a \neq 0_E$ et $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(a)$. $u(a) \in \mathrm{Im}\, u$ donc :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u(a) = \lambda a$.
Soit $x \in E$. $u(x) \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(a)$. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $u(x) = \alpha a$.
$u^2(x) = \alpha u(a) = \alpha \lambda a = \lambda (\alpha a) = \lambda u(x)$.
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $u^2(x) = \lambda u(x)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u^2 = \lambda u$.
Remarque.. Si λ n'est pas nul, $\frac{1}{\lambda} u$ est une projection.

Q2 $\lambda \neq 1$. $X^2 - \lambda X$ est un polynôme annulateur de u ayant pour zéros 0 et λ.
$\mathrm{Sp}\, u \subset \{0, \lambda\}$. donc $1 \notin \mathrm{Sp}\, u$. $u - \mathrm{Id}_E$ est injectif donc bijectif car
$\dim E < +\infty$. $\underline{u - \mathrm{Id}_E \text{ est inversible}}$.

Soit $x \in E$. Posons $y = (u - \mathrm{Id}_E)^{-1}(x)$. $(u - \mathrm{Id}_E)(y) = x$. $u(y) - y = x$.

$$\begin{cases} u(y) - y = x \\ u^2(y) - u(y) = u(x) \end{cases} \quad \begin{cases} y = u(y) - x \\ (\lambda - 1) u(y) = u(x) \end{cases} ; \quad y = \frac{1}{\lambda - 1} u(x) - x.$$

$\forall x \in E$, $(u - \mathrm{Id}_E)^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda - 1} u(x) - x$.

$$\underline{(u - \mathrm{Id}_E)^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1} u - \mathrm{Id}_E.}$$

R

Question 3 **HEC 2008 S3** $\boxed{\textbf{F1}}$

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.

Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

Q1. Calculer P_1, P_2 et P_3.

Q2. Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1. Notons pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, F_i l'événement la pièce donne face au $i^{\text{ème}}$ lancer.

- $P_1 = 1$
- $P_2 = 1 - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
- $P_3 = 1 - P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3) - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Q2. Notons S_n l'événement ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des n premiers lancers. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ est un système complet d'événements

$P(S_{n+2}) = P(F_1 \cap S_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2 \cap S_{n+2}) + \underbrace{P(P_1 \cap P_2 \cap S_{n+2})}_{=0}$.

$P(S_{n+2}) = P(F_1) \underbrace{P_{F_1}(S_{n+2})}_{P(S_{n+1})} + P(P_1 \cap F_2) \underbrace{P_{P_1 \cap F_2}(S_{n+2})}_{P(S_n)} = \frac{1}{2} P(S_{n+1}) + \frac{1}{4} P(S_n)$

$\underline{\underline{P_{n+2} = \frac{1}{2} P_{n+1} + \frac{1}{4} P_n}}$. L'équation caractéristique associée à

cette récurrence linéaire d'ordre 2 est $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{4} = 0$.

Ses deux racines sont : $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Notons que $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right| < 1$.

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 0$.

$\underline{\underline{\text{Exercice}}}$.. Notez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$

n ou $n-1$!!

R

Question 4 **HEC 2008 S4** $\boxed{\text{F2}}$

f est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$.

Q1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1-y$.

Q2. f est-elle continue en $(1,1)$?

Q3. Justifier l'existence de $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\operatorname{Min}} f(x,y)$ et $\underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\operatorname{Max}} f(x,y)$ et déterminer leur valeur.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $(x,y) \in [0,1]^2$. Si $(x,y)=(1,1)$: $0 \leq 0 = f(x,y) = 1-1 = 1-y$.

Supposons $(x,y) \neq (1,1)$. $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq \frac{1-x}{1-y}$ et $1-y \geq 0$

Alors $0 \leq f(x,y) \leq 1-y$.

$\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $0 \leq f(x,y) \leq 1-y$.

Q2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (1-y) = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{X\to(1,1)} f(X) = 0 = f(1,1)$. f est continue en $(1,1)$

Q3 * f est continue sur $[0,1]^2 - \{(1,1)\}$ (fonction rationnelle) et continue en $(1,1)$.

f est continue sur $[0,1]^2$.

* • $[0,1]^2$ est fermé comme produit de deux fermés de $\mathbb{R}$.

• $[0,1]^2$ est borné (si $(x,y) \in [0,1]^2$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}$).

f est donc continue sur le fermé borné $[0,1]^2$ donc $m = \underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\operatorname{Min}} f(x,y)$ et $M = \underset{(x,y)\in[0,1]^2}{\operatorname{Max}} f(x,y)$ existent.

* $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $f(x,y) \geq 0 = f(1,1)$. $m = 0$.

Notons que l'ensemble des points de $[0,1]^2$ qui réalisent m est $\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x=0$ ou $x=1$ ou $y=0$ ou $y=1\}$.

* $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) > 0$ donc $M > 0 = m$. Supposons que M soit réalisé en $A = (a,b)$.

Alors $A = (a,b)$ appartient à l'ouvert $]0,1[^2$ et f est de classe C^1 sur cet ouvert. Alors $\nabla f(A) = (0,0)$.

$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{b(1-b)}{(1-ab)^2} \left[(1-2a)(1-ab) - a(1-a)(-b)\right]$. Or $b \neq 0$ et $b \neq 1$.

$0 = (1-2a)(1-ab) - a(1-a)(-b) = 1 - ab - 2a + 2a^2b + ab - a^2b = 1 - 2a + a^2b$.

R

$1-2a+a^2b=0$. De même $\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0$ donc $1-2b+ab^2=0$.

Par soustraction $0=-2a+a^2b+2b-ab^2=2(b-a)-ab(b-a)=(2-ab)(b-a)$.

Or $ab\neq 2$ donc $a=b$. Alors $1-2a+a^3=0$.

$0=(a-1)(a^2+a-1)=(a-1)\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]=(a-1)\left(a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt5}{2}\right)$.

Or $a\in]0,1[$ donc $a=\frac{\sqrt5-1}{2}$ et $b=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

f possède un maximum sur $]0,1[^2$ et $\left(\frac{\sqrt5-1}{2},\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ est le seul point qui peut réaliser ce maximum.

Alors le maximum de f sur $]0,1[^2$ et sur $[0,1]^2$ est $f\left(\frac{\sqrt5-1}{2},\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$.

Posons $\alpha=\frac{\sqrt5-1}{2}$. $\alpha^3-2\alpha+1=\alpha^2+\alpha-1=0$.

$M=f\left(\frac{\sqrt5-1}{2},\frac{\sqrt5-1}{2}\right)=\frac{\alpha^2(1-\alpha)(1-\alpha)}{1-\alpha^2}=\frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{\alpha}=\alpha(1-\alpha)^2=\alpha^3-2\alpha^2+\alpha$.

$M=2\alpha-1-2\alpha^2+\alpha=3\alpha-1-2(1-\alpha)=5\alpha-3=\frac{5(\sqrt5-1)}{2}-3=\frac{5\sqrt5-11}{2}\simeq 0,09$!

$\min_{(x,y)\in[0,1]^2} f(x,y)=0$ et $\max_{(x,y)\in[0,1]^2} f(x,y)=\frac{5\sqrt5-11}{2}$.

Question 5 **HEC 2008 S5** $\boxed{\text{F3}}$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels qui converge ver ℓ.

On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\dfrac{1}{2^n}\left(\binom{n}{0}u_0+\binom{n}{1}u_1+\binom{n}{2}u_2+\cdots+\binom{n}{n}u_n\right)$. On se propose de montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ.

Q1. Montrer que $\forall k\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)=0$.

Q2. Montrer le résultat pour $\ell=0$.

Q3. Étudier le cas général.

Q1 Soit $k\in\mathbb{N}$. $\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{n^k}{k!}=\dfrac{1}{k!}\dfrac{1}{2^n}n^k$. $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ donc par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{k!}\dfrac{1}{2^n}n^k\right)=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)=0$.

Q2 Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$. $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0\Rightarrow |u_n|<\varepsilon/2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Soit $n\in[\![n_0+1,+\infty[\![$.

$|v_n|=\dfrac{1}{2^n}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k\right|\leqslant\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|u_k|=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n}{k}|u_k|+\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n}\binom{n}{k}|u_k|$ ← pour éviter n_0-1 si $n_0=0$!

$|v_n|\leqslant\underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}|u_k|}_{w_n}+\dfrac{\varepsilon}{2}\,\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n}\binom{n}{k}\leqslant w_n+\dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{1}{2^n}\underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{2^n}\leqslant w_n+\dfrac{\varepsilon}{2}$

D'après Q1 $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ (combinaison linéaire de n_0+1 suites qui convergent vers 0).

Alors $\exists p\in[\![n_0+1,+\infty[\![,\ \forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ w_n<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ |v_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+,\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p\Rightarrow|v_n|<\varepsilon$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0=\ell$.

Q3 Posons $\forall n\in\mathbb{N},\ u'_n=u_n-\ell$ et $v'_n=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u'_k$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u'_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v'_n=0$.

Or $\forall n\in\mathbb{N},\ v'_n=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(u_k-\ell)=v_n-\ell\,\dfrac{1}{2^n}\overbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}^{2^n}=v_n-\ell$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-\ell)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$.

R

Question 6 **HEC 2008 S6** $\boxed{\textbf{F1}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement postif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\,\theta}\sum_{k\leqslant n\,x}\frac{(n\,\theta)^k}{k!}\right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$!!

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \dfrac{X_n - n\theta}{n}$.

X_n possède une espérance et une variance qui valent $n\theta$.

Alors T_n possède une espérance et une variance. $E(T_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_n) - n\theta\right) = 0$ et

$V(T_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{\theta}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$0 \leq P(|T_n - 0| \geq \varepsilon) = P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\theta}{n\varepsilon^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta}{n\varepsilon^2} = 0$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(P(|T_n - 0| \geq \varepsilon)\right) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Q2 Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, la somme est nulle et la suite converge vers 0. Supposons que $x \in]0,+\infty[- \{\theta\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = e^{-n\theta}\displaystyle\sum_{k\leq nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}$.

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(nx)} P(X_n = k) = P(X_n \leq nx) = P\left(\frac{X_n - n\theta}{n} \leq x - \theta\right)$.

1er cas.. $x - \theta < 0$. Alors $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \leq x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geq \theta - x\right\}$

Alors $0 \leq u_n \leq P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geq \theta - x\right)$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2ème cas.. $x - \theta > 0$ $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right\} \subset \left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \geq x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geq x - \theta\right\}$.

$0 \leq P\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right) = 1 - u_n \leq P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geq x - \theta\right)$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\theta}\sum_{k\leq nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}$$

Exercice.. Noter que cela donne la convergence en loi de $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ vers θ.

Question 7 **HEC 2008 S7** $\boxed{\textbf{F2}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère n variable aléatoires à densité, de même loi que et indépendantes X_1, X_2, ..., X_n. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant.

On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

Q1. Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j}$.

Q2. En déduire que Y_k admet une densité que l'on explicitera sans signe $\sum$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons T_x le nombre de variables aléatoires X_i ayant des valeurs inférieures à x. $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(x))$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ Alors $P(Y_k \leqslant x) = P(T_x \geqslant k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}$.

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(Y_k \leqslant x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}.$$

Q2 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Notons F_k la fonction de répartition de Y_k. $F_k = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j (1-F)^{n-j}$.

* F est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_k est continue sur $\mathbb{R}$.
* f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors F est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'(x) = f(x)$.

Ainsi F_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$. Ceci achève de montrer que Y_k est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus D,\ F_k'(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$

f_k est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_k' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors f_k est une densité de Y_k qu'il convient de simplifier.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Effectuons le changement d'indice $j \leftarrow j-1$ dans la seconde somme.

ou n !

$$f_k(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j\, f(x)(F(x))^{j-1}(1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (F(x))^{j-1}(n-j+1)\, f(x)(1-F(x))^{n-j}$$

$$f_k(x) = \binom{n}{k} k\, f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} f(x)\, F(x)^{j-1}(1-F(x))^{n-j}\underbrace{\left[j\binom{n}{j} - (n-j+1)\binom{n}{j-1}\right]}_{\alpha_j}$$

Soit $j \in [\![k+1, n]\!]$.

$$\alpha_j = j\frac{n!}{j!(n-j)!} - (n-j+1)\frac{n!}{(n-j+1)!(j-1)!} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} - \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} = 0.$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = k\binom{n}{k} f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}$.

Remarque.- Si la loi des X_i est uniforme sur $[0,1]$, Y_k suit une loi bêta de première espèce.