1

ANALYSE

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ est convergente.

On pose alors, pour tout $x \in D$: $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$

2. a) Montrer que pour tout $x \in D$: $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \dfrac{1}{x}$

b) Montrer que pour tout $x \in D$: $\dfrac{1}{2x} \leq \varphi(x) \leq \dfrac{1}{x}$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

c) Soit ψ une application définie sur D et qui vérifie :

- pour tout $x \in D$: $\psi(x) + \psi(x+1) = \dfrac{1}{x}$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$.

On pose $d = \varphi - \psi$.
Montrer que d est 2–périodique. En déduire que d est identiquement nulle sur D.

3. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\varphi\big(k + \frac{1}{2}\big) + \varphi\big(k - \frac{1}{2}\big)$

En posant $u_k = (-1)^k \varphi\big(k + \frac{1}{2}\big)$ et en utilisant $u_k - u_{k-1}$, exprimer $\varphi\big(n + \dfrac{1}{2}\big)$, puis $\varphi(n+1)$ en fonction de n.

4. En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sont convergentes et calculer leurs sommes respectives.

Solution :

1. Au voisinage de 0, $\dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est équivalente à $\dfrac{1}{t^{1-x}}$. L'intégrale converge donc sur $[0,1]$ si et seulement si $x>0$. Ainsi la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Pour tout $x>0$:

$$\varphi(x)+\varphi(x+1)=\int_0^1 \frac{t^x+t^{x-1}}{1+t}dt=\int_0^1 t^{x-1}dt=\frac{1}{x}$$

b) Pour $t\in[0,1]$, $1\leqslant 1+t\leqslant 2$ donne :

$$\frac{1}{2x}\leqslant\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt\leqslant\frac{1}{x}$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0}$

c) La fonction φ vérifie les mêmes conditions que la fonction ψ. Si $d=\varphi-\psi$, il vient, pour tout $x>0$, $d(x+1)+d(x)=0$, donc $d(x+2)-d(x)=0$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d(x+2n)-d(x)=0$. La fonction d tendant vers 0 en l'infini, il reste à prendre la limite lorsque n tend vers l'infini pour conclure que pour tout $x>0, d(x)=0$.

3. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi\big(k+\frac{1}{2}\big)+\varphi\big(k-\frac{1}{2}\big)=\dfrac{2}{2k-1}$

Ainsi pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$u_k-u_{k-1}=\frac{2(-1)^k}{2k-1},\ \text{et } u_n-u_0=\sum_{k=1}^n(u_k-u_{k-1})=2\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{2k-1}$$

Or, par le changement de variable $t=u-2$, puis $u=\tan v$:

$$u_0=\varphi\big(\tfrac{1}{2}\big)=\int_0^1\frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}=2\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$\boxed{\varphi\big(n+\frac{1}{2}\big)=2(-1)^n\Big[\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\Big]}$$

De même pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(k+1)+\varphi(k)=\dfrac{1}{k}$. On pose alors : $v_k=(-1)^k\varphi(k)$ et un calcul analogue au calcul précédent donne :

$$v_n-v_1=\sum_{k=2}^n(v_k-v_{k-1})=\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k}$$

Or : $v_1=\varphi(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$

ce qui donne : $\boxed{\varphi(n+1)=(-1)^n\Big[\ln 2-\sum_{k=1}^n\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\Big]}$

4. On déduit de la question 2. b que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sont convergentes et que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2}$$

Exercice 2.

On considère une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs et deux nombres réels u_0 et v_0. On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence en posant pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + \alpha_n v_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} - \alpha_n u_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n^2 + v_n^2 = (u_0^2 + v_0^2) \prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k^2)$$

2. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont de même nature (c'est-à-dire que l'une converge si et seulement si l'autre converge).

b) En déduire que si $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, alors ces deux suites divergent.

3. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n réels positifs. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leq \mathrm{e}^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

4. On suppose dans cette question que la série $\sum \alpha_n^2$ converge.

a) Montrer que la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n^2 + v_n^2$ est bornée.

b) En déduire que la suite (w_n) est convergente.

5. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha_n = 2^{-n}$

a) Pour $n \geqslant 1$, exprimer u_n en fonction de $u_0, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$.

b) Pour $n \geqslant 1$, exprimer v_n en fonction de $v_0, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

c) On suppose que $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Solution :

1. Avec les relations de récurrence, il vient :

$$\begin{cases} u_k^2 = u_{k-1}^2 + \alpha_k^2 v_{k-1}^2 + 2\alpha_k u_{k-1} v_{k-1} \\ v_k^2 = v_{k-1}^2 + \alpha_k^2 u_{k-1}^2 - 2\alpha_k u_{k-1} v_{k-1} \end{cases}$$

D'où l'on tire : $u_k^2 + v_k^2 = (1 + \alpha_k^2)(u_{k-1}^2 + v_{k-1}^2)$

et par suite on a bien :

$$\boxed{u_n^2 + v_n^2 = (1 + \alpha_n^2) \ldots (1 + \alpha_1^2)(u_0^2 + v_0^2)}$$

Remarque : On peut aussi poser $z_n = u_n + iv_n$ et exprimer z_k en fonction de z_{k-1}, la formule proposée traduit alors en fait une égalité de modules...

2. a) Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
Comme on a $v_n = \dfrac{1}{\alpha}(u_n - u_{n-1})$, on en déduit que la suite (v_n) converge vers 0, la relation $v_n = v_{n-1} - \alpha u_{n-1}$ implique alors que $\ell = 0$. Les deux suites convergent vers 0.
On montrerait la même chose en supposant au départ que la suite (v_n) converge.

b) Supposons $(u_0, v_0) \neq (0,0)$ et que l'une des suites converge, alors les deux suites convergent vers 0 et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n^2 + v_n^2) = 0$.
Or $u_n^2 + v_n^2 = (1+\alpha^2)^n(u_0^2 + v_0^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la contradiction est claire.
Les deux suites sont donc divergentes.

3. On sait que pour $x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$, soit $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. On obtient l'inégalité demandée par simple multiplication.

4. a) On a $(1+\alpha_n^2)\dots(1+\alpha_1^2) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2} \leqslant \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2} = A$.
On déduit alors de la question 1. : $u_n^2 + v_n^2 \leqslant A(u_0^2 + v_0^2)$, la suite $(w_n) = (u_n^2 + v_n^2)$ est donc majorée.

b) Le résultat de la question 1. montre également que la suite $(u_n^2 + v_n^2)$ est croissante, elle est donc convergente.

5. a) Comme $u_k - u_{k-1} = \alpha_k v_{k-1}$, on en déduit :

$$u_n = u_0 + v_0 + \frac{1}{2}\,v_1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\,v_{n-1}$$

b) Comme $v_k - v_{k-1} = -\alpha_k u_{k-1}$, on en déduit :

$$v_n = v_0 - \big(u_0 + \frac{1}{2}\,u_1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\,u_{n-1}\big)$$

c) On a $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. La série de terme général α_k^2 étant ici convergente, on sait que la suite $(u_n^2 + v_n^2)$ est bornée. Les suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont donc bornées et les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{1}{2^n}u_n$ et $\dfrac{1}{2^n}v_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes.
Des résultats a) et b) on déduit alors la convergence des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction $f \in E$, on définit une nouvelle fonction $\Phi[f]$ par, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\Phi[f](x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1. Justifier que $\Phi[f] \in E$.

2. a) On note $\Phi^0 = Id$ et pour tout n entier tel que $n \geqslant 1, \Phi^n = \Phi \circ \Phi^{n-1}$.
Calculer $\big(\Phi^n[f]\big)^{(p)}(0)$ (dérivée d'ordre p en 0 de $\Phi^n[f]$), pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

b) En déduire une expression de $\Phi^n[f]$ à l'aide d'une seule intégrale.

3. Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$. Justifier que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \Phi^n[f](x)$ converge.

4. Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, il existe une unique fonction $g \in E$ telle que :

$$g - \Phi[g] = f$$

Solution :

1. $\Phi[f]$ n'est autre que la primitive de f qui s'annule en 0 (car f est continue). Elle est donc dérivable sur $[0,1]$ et *a fortiori* continue. Ainsi $\Phi[f] \in E$, pour tout $f \in E$.

2. a) La fonction $\Phi[f]$ est caractérisée par : $(\Phi[f])' = f$ et $\Phi[f](0) = 0$, donc :

$$\begin{cases} \Phi[f](0) = 0 \\ (\Phi[f])'(0) = f(0) \end{cases}$$

Supposons que pour un certain $k \geqslant 0$, $\Phi^k[f]$ soit caractérisée par :

$$\begin{cases} \Phi^k[f](0) = 0 \\ (\Phi^k[f])' = \Phi^{k-1}[f] \end{cases}$$

Alors $\Phi^{k+1}[f](x) = \displaystyle\int_0^x \Phi^k[f](t)\,dt$ vérifie :

$$\begin{cases} \Phi^{k+1}[f](0) = 0 \\ (\Phi^{k+1}[f])' = \Phi^k[f] \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier $p \geqslant 0$:

$$(\Phi^k[f])^{(p)} = (\Phi^{k-1}[f])^{(p-1)} = \cdots = \begin{cases} 0 & \text{si } p < k \\ f(0) & \text{si } p = k \end{cases}$$

b) La formule de Taylor avec reste intégral nous donne, pour tout entier naturel n, et tout $x \in [0,1]$:

$$\Phi^n[f](x) = \sum_{p=0}^{n-1} (\Phi^n[f])^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!} + \int_0^x (\Phi^n[f])^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ou, pour $n \geqslant 1$:

$$\Phi^n[f](x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

3. Pour tout $x \in [0,1]$:

$$|\Phi^n[f](x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \leqslant \frac{1}{n!} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

qui est le terme général d'une série convergente. Les théorèmes de comparaison des séries à terme positifs permettent de conclure à la convergence de la série $\sum \Phi^n[f](x)$.

4. Procédons par analyse/synthèse. Supposons que g soit solution de l'équation $g - \Phi[g] = f$. Alors pour tout $k \geqslant 0$, $\Phi^k[g] - \Phi^{k+1}[g] = \Phi^k[f]$.

Sommons ces relations pour k dans $\{0,1,\ldots,n\}$. Il vient, par télescopage :

$$g-\Phi^{n+1}[g]=\sum_{k=0}^{n}\Phi^k[f]$$

Par la question précédente, pour tout $x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi^{n+1}[g](x)=0$. Donc, si g existe, alors $g=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi^k[f]$.

Posons alors $g=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi^k[f]$. La fonction g existe d'après la question 3.

Montrons que g vérifie l'équation $g-\Phi[g]=f$. À cet effet, notons, pour $n\geqslant 0$, $g_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\Phi^k[f]$. On sait que pour tout $x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}g_n(x)=g(x)$ et que :

$$g_n-\Phi[g_n]=\Phi^0[f]-\Phi^{n+1}[f]=f-\Phi^{n+1}[f]$$

On conclut par le fait que pour tout $x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi^{n+1}[f](x)=0$.

Montrons enfin la continuité de g sur $[0,1]$. Notons $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Soit $x\in[0,1]$, $h\in\mathbb{R}$ tel que $x+h\in[0,1]$. Alors :

$$\begin{aligned}|g(x+h)-g(x)|&\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\int_0^{x+h}\frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt-\int_0^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt\Big|\\&\qquad+|f(x+h)-f(x)|\\|g(x+h)-g(x)|&\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{(n-1)!}\left(\int_0^{x}((x+h-t)^{n-1}-(x-t)^{n-1})\,dt\right)\\&\qquad+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{(n-1)!}\left(\int_x^{x+h}(x+h-t)^{n-1}\,dt\right)+|f(x+h)-f(x)|\\|g(x+h)-g(x)|&\leqslant|f(x+h)-f(x)|+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{n!}\left[(-h^n+(x+h)^n-x^n)+h^n\right]\\&\leqslant|f(x+h)-f(x)|+M\left[\mathrm{e}^{-h}-1+\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^{x}+h(\mathrm{e}^{h}-1)\right]\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque h tend vers 0 par continuité de f et de la fonction exponentielle.

Ainsi $g=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Phi^k[f]$ est l'unique solution de l'équation proposée.

Exercice 4.

Soit F la fonction définie par : $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F.

2. Étudier le sens de variation de la fonction F.

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

4. a) Justifier, pour $x\in D$, la convergence des intégrales :

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\,du$$

Montrer que $G(x) = -\ln x + G(1) + I + o(1)$, en déduire que $G(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t+1}dt$$

et déduire du a) que $H(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c) Calculer la dérivée de la fonction $g(t) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$ et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t}\Big)dt$$

d) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution :

1. La fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim g_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}$.

- si $x < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} tg_x(t) = +\infty$, ce qui entraîne que l'intégrale n'existe pas.
- si $x = 0$, $f_x(t) \sim \dfrac{1}{t}$, ce qui entraîne que l'intégrale n'existe pas.
- si $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g_x(t) = 0$, ce qui entraîne l'existence de l'intégrale.

Le domaine de définition D de F est donc $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction F est strictement décroissante sur D, puisque si $0 < x < y$, alors, pour tout $t > 0$: $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} > \dfrac{\mathrm{e}^{-yt}}{\sqrt{1+t^2}}$ et la continuité des fonctions à intégrer permet de conclure à l'inégalité **stricte** pour les intégrales : $F(x) > F(y)$

3. On a : $0 \leqslant F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

4. a) Comme $x > 0$, $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est continue sur $[x, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle. De plus $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2\,\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} = 0$ entraîne l'existence de $G(x)$, pour tout $x \in D$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}-1}{u}$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$ et admet un prolongement par continuité en 0 par 1 (faire un DL). Le réel I existe donc.

Calculons $G(x)+\ln x - G(1) - I$. Par la relation de Chasles et $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$, il vient :

$$G(x)+\ln x - G(1) - I = -\int_0^x \frac{e^{-u}-1}{u}\,du$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}-1}{u}$ étant continue sur $[0,1]$, elle y est majorée par une constante $M>0$, et :

$$|G(x)+\ln x - G(1) - I| \leqslant Mx = o(1)$$

On a donc $G(x)+\ln x = C + o(1) = O(1) = o(\ln x)$ au voisinage de 0^+.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus , $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\,\frac{e^{-xt}}{t+1} = 0$, pour tout $x \in D$. D'où l'existence de H sur D.

Effectuons le changement de variable affine $u = t+1$. Il vient :

$$H(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x(u-1)}}{u}\,du = e^x G(x)$$

On conclut en remarquant que $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^x = 1$.

c) Un calcul immédiat donne : $g'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, d'où :

$$J = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t}\Big)\,dt = \Big[\ln\Big(\frac{t+\sqrt{1+t^2}}{1+t}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \ln 2$$

d) Remarquons que :

$$|F(x)-H(x)| = \Big|\int_0^{+\infty} e^{-xt}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t}\Big)\,dt\Big| \leqslant J = \ln 2$$

Donc $F(x)+\ln x = o(\ln x)$, *i.e.* :

$$\boxed{F(x) \underset{(0^+)}{\sim} -\ln x}$$

Exercice 5.

On pose pour tout couple (x,y) de réels strictement positifs :

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(x.e^t+1)(y.e^t+1)}.$$

1. a) Vérifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.

b) Pour $x>0$, calculer $f(x,x)$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs distincts.

a) Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a,b) tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$ on ait :

$$\frac{1}{(x.\mathrm{e}^t+1)(y.\mathrm{e}^t+1)} = \frac{a}{x.\mathrm{e}^t+1} + \frac{b}{y.\mathrm{e}^t+1}.$$

On exprimera a et b en fonction de x et y.

b) En déduire la valeur de $f(x,y)$.

3. Etudier l'existence de dérivées partielles pour f.
La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition ?

Solution :

1. a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{(x\mathrm{e}^t+1)(y\mathrm{e}^t+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\star$ Au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{xy}$, fonction dont l'intégrale converge.

$\star$ Au voisinage de $-\infty$, $g(t) \sim \mathrm{e}^t$, fonction dont l'intégrale converge également.

Les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives permettent de conclure : $f(x,y)$ est bien défini pour $x>0$ et $y>0$.

b) Comme $x>0$, on peut écrire :

$$f(x,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t\,dt}{(x\mathrm{e}^t+1)^2} = \frac{1}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^t\,dt}{(x\mathrm{e}^t+1)^2}$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^t}{(x\mathrm{e}^t+1)^2}$ est $t \mapsto \dfrac{-1}{x\mathrm{e}^t+1}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{f(x,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t\,dt}{(x\mathrm{e}^t+1)^2} = \frac{1}{x}}$$

2. a) En réduisant au même dénominateur, on obtient :
$1 = (ay+bx)\mathrm{e}^t + (a+b) = 1$. Les fonctions $(t \mapsto 1, t \mapsto \mathrm{e}^t)$ étant indépendantes, ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$$

D'où :

$$a = \frac{x}{x-y}, \qquad b = \frac{y}{y-x}$$

b) Une primitive de $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{x\mathrm{e}^t+1}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x\mathrm{e}^t+1)$. Ceci permet de calculer $f(x,y)$. Pour tout $x \neq y$, on obtient :

$f(x,y) = \dfrac{1}{x-y} \lim\limits_{A\to+\infty, B\to-\infty} \left[\ln\left(\dfrac{x.\mathrm{e}^t+1}{y.\mathrm{e}^t+1}\right)\right]_B^A = \dfrac{1}{x-y}(\ln\dfrac{x}{y} - \ln 1)$. Soit :

$$\boxed{x \neq y \implies f(x,y) = \frac{\ln x - \ln y}{x-y}}$$

3. Pour tout $x \neq y$, on a immédiatement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{1}{x}(x-y) - \ln x + \ln y}{(x-y)^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}(y-x) - \ln y + \ln x}{(x-y)^2}$$

En (a,a), on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a - \frac{h}{a}}{h^2}$$

Or un développement limité de $\ln(a+h) = \ln a + \ln(1+\dfrac{h}{a})$ au voisinage de 0 donne :

$$\ln(a+h) = \ln a + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + o(h^2)$$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = -\frac{1}{2a^2}$$

Par un calcul identique, ou par symétrie des rôles de x et y, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) = -\frac{1}{2a^2}$$

Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de son domaine.

$\star$ On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si et seulement si les dérivées partielles $(x,y)\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y)\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur D.

Il est évident qu'en tout point (x,y) avec $x>0, y>0, x\neq y$, ces fonctions sont continues comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour $x \neq y$, on a :

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{x}(y-x) - \frac{1}{2x^2}(y-x)^2 + o((y-x)^2)$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2x^2} + o(1)$$

Ainsi, lorsque (x,y) tend vers (a,a) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to -\frac{1}{2a^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,a)$$

Le calcul est identique pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Ceci nous assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On note g ce prolongement.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$, à coefficients entiers et dont on précisera les degrés, telle que pour tout entier naturel n et tout réel strictement positif x on ait :

$$g^{(n)}(x) = P_n\big(\frac{1}{x}\big)g(x).$$

4. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. On définit le type `poly=ARRAY[0..20]OF INTEGER ;`
On désire faire calculer à l'ordinateur le polynôme P_{10}.

a) Soit A une variable de type `poly`. Ecrire une procédure permettant de modifier les coefficients de A, de sorte que s'il y a au départ dans A les coefficients de P_n, ceux-ci soient remplacés par ceux de P_{n+1}.

b) A l'aide de cette procédure, écrire un programme permettant de calculer et d'afficher les coefficients de P_{10}.

Solution :

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On pose donc $g(0) = 0$.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et :
$\star$ pour $x > 0, g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\exp(-1/x)$
$\star$ pour $x < 0, g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\exp(1/x)$
On a alors (limite classique) $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$ et g étant continue en 0, par théorème, g est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, avec $g'(0) = 0$.
Finalement g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons, par récurrence sur n, l'existence de P_n, à coefficients entiers, avec $\deg P_n = 2n$:
$\star$ Comme $g^{(0)}(x) = g(x)$, la propriété est vraie au rang 0, avec $P_0 = 1$.
$\star$ Supposons le résultat acquis pour un certain rang n. Alors :

$$\forall\, x > 0, g^{(n)}(x) = P_n\big(\frac{1}{x}\big)g(x)$$

On en déduit :

$$\forall\, x > 0, g^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\big(\frac{1}{x}\big)g(x) + P_n(x)g'(x)$$

i.e. :

$$\forall\, x > 0, g^{(n+1)}(x) = \big[-\frac{1}{x^2}P_n'\big(\frac{1}{x}\big) + P_n(x)\frac{1}{x^2}\big]g(x)$$

Ce qui donne le résultat au rang $n+1$, avec $P_{n+1}(x) = x^2\big(P_n(x) - P_n'(x)\big)$ et P_{n+1} est de degré $2n + 2 = 2(n+1)$ et est bien à coefficients entiers.
On conclut donc par le principe de récurrence.

4. Par limites classiques, on a pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = 0$.

On procède de même sur $\mathbb{R}^-$, ou, mieux, on invoque la parité de g qui montre que $g^{(n)}$ a même parité que n.
Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$ et par itération du théorème précédent, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout n, $g^{(n)}(0) = 0$.

5. a) et b)

```
Program ESCP06 ;
Uses Crt ;
Type poly=Array[0..20] of Longint ; Var P :poly ; i,k : Integer ;
Procedure rangsuivant (Var A :poly) ;
  Var i : Integer ; B :poly ;
  Begin
    B[0] :=0 ; B[1] :=0
  For i :=0 to 18 do B[i+2] :=A[i]-(i+1)*A[i+1] ;
  For i :=0 to 20 do A[i] :=B[i] ;
  End ;
Begin
  For k :=0 to 20 do P[k] :=0 ;
  P[0] :=1
  For k :=1 to 10 do rangsuivant(P) ;
  For i :=0 to 20 do write(P[i], ' ') ;
End.
```

Exercice 7.

1. a) Montrer que si x est un réel de $]-1,1[$ et n un entier naturel non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

b) En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

c) Soit $y \in [\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}[$. On pose $u = \dfrac{y-1}{y+1}$. Montrer que :

$$\ln(y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$$

d) Compléter, en langage `Pascal`, l'écriture de la fonction :

`FUNCTION Serie(y : REAL) : REAL ;`

qui rend comme résultat : $2\sum\limits_{n=0}^{6} \dfrac{u^{2n+1}}{2n+1}$ où $u = \dfrac{y-1}{y+1}$.

2. a) Montrer que tout réel strictement positif x s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = 2^k \times \sqrt{2} \times y$$

avec k entier relatif et $y \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}[$.

b) Dans un programme en `Pascal`, on a déclaré deux constantes `R2` et `L2` contenant des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et de $\ln 2$. Dans les sous-programmes à compléter ci–dessous, il est demandé de n'utiliser que les quatre opérations de base $(+, -, \times, /)$.

i) Compléter l'écriture de la procédure :

```
PROCEDURE Decompose(x : REAL ; VAR k : INTEGER ; VAR y : REAL) ;
```

qui pour $x > 0$ détermine k et y définis en a).

ii) Compléter l'écriture de la fonction :

```
FUNCTION LnApprox(x : REAL) : REAL ;
```

qui, pour $x > 0$ renvoie comme résultat une valeur approchée de $\ln x$ obtenue à partir de l'écriture de x vue en a) et utilisant `Decompose` et `Serie`.

Solution :

1. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$

Comme $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$, on a le résultat souhaité.

b) Pour tout t compris entre 0 et x, on a $\left|\dfrac{t^n}{1-t}\right| \leqslant \dfrac{|x|^n}{1-|x|}$, d'où

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x)}$

c) L'application f définie sur $[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par $f(y) = \dfrac{y-1}{y+1} = 1 - \dfrac{2}{y+1}$ est continue et strictement croissante, donc réalise une bijection de son domaine de définition sur $[f(1/\sqrt{2}), f(\sqrt{2})] = [-(\sqrt{2}-1)^2, (\sqrt{2}+1)^2[$.
De plus f^{-1} est définie sur ce domaine par $f^{-1}(u) = \dfrac{1+u}{1-u}$.
Donc si $y \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et $u = f(y)$, on a $u \in [-(\sqrt{2}-1)^2, (\sqrt{2}+1)^2[\subset]-1, 1[$ et donc :

$$\ln y = \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \ln(1+u) - \ln(1-u)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^{k-1}+1)u^k}{k}$$

Soit

$$\boxed{\ln y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.u^{2n+1}}{2n+1}}$$

d) On utilise l'algorithme de Horner.

```
Function Serie(y :real) : real ;
Const n=6 ; Var u,u2,aux : real ; i : integer ;
Begin
  u := (y-1)/(y+1) ; u2 := Sqr(u) ; aux := 1/(2*n+1) ;
  For i := (n-1) Doxnto 0 do aux := aux*u2+1/(2*i+1) ;
  Serie := aux*2*u ;
End ;
```

Remarque : on peut montrer que sur le domaine considéré, l'erreur commise en remplaçant $\ln y$ par `Serie(y)` est majorée par 5.10^{-13}.

2. a) *Analyse* : si $x = 2^k\sqrt{2}.y$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, alors $2^k \leqslant x < 2^{k+1}$ et donc nécessairement $k = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor$ et $y = \frac{x}{2^k\sqrt{2}}$.

Synthèse : soit $x > 0$, posons $k = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor$ et $y = \frac{x}{2^k\sqrt{2}}$, alors on a : $k \in \mathbb{Z}$ et $2^k \leqslant x < 2^{k+1}$, donc $y \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
Ce qui donne l'existence et l'unicité cherchées.

b) i) On encadre, par essais successifs, x entre deux puissances successives de 2 : il y a deux cas à envisager selon la position de x par rapport à 1.

```
Procedure Decompose(x : Real ; Var k : Integer ; Var y : Real) ;
Var z : Real ;
Begin
  If x>=1
    Then Begin
    k := 0 ; z := x ;
    While(z>=2) Do Begin z :=z/2 ; k := k+1 End ;
    End
  Else
    Begin
    k :=-1 ; z := 2*x ;
    While (z<1) Do Begin z :=z*2 ; k := k-1 End ;
    End
  y :=z/R2 ;
End ;
```

ii) `Function Lnapprox(x :Real) :Real ;`

```
Var k : Integer ; y : Real ;
Begin
  Decompose(x,k,y) ;
  Lnapprox := (k+1/2)*L2+serie(y) ;
```

```
End ;
```

Exercice 8.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = u_1 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes sont supérieurs ou égaux à $\dfrac{3}{2}\cdot$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire quant à sa limite éventuelle ?

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 1$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{5}{3}\cdot$

4. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_n \geqslant 1$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$:

$$u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-2}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}} + 1}\cdot$$

5. Déduire des résultats précédents que, quand n tend vers $+\infty$, $u_n = \mathcal{O}(n)$, $n = \mathcal{O}(u_n)$ et $u_{n+1} \sim u_n$.

Solution :

1. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante : « n appartient au domaine de définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u_n \geqslant 3/2$ »

$\star$ $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées par définition.

$\star$ Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1} \implies \mathcal{P}_{n+2}$. En effet, par hypothèse, u_n et u_{n+1} sont positifs ; l'image de $n+2$ par la suite u est donc définie et :

$$u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_{n+1}u_n} \geqslant 1 + \frac{3}{2} \geqslant \frac{3}{2}$$

On conclut, par le principe de récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{3}{2}$.

2. Montrons le résultat demandé par récurrence sur n.

- $u_0 = u_1 = 3/2$ et $u_2 = 5/2 \geqslant u_1$.
- $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{u_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_{n-1}}) \geqslant 0$, en utilisant l'hypothèse de récurrence $u_{n-1} \geqslant u_n \geqslant u_{n+1}$, on en déduit $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.

On conclut que la suite (u_n) est croissante.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Alors $\ell \geqslant 3/2$. La suite $(u_nu_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle, vers ℓ^2, et par continuité de la fonction racine, la suite $(\sqrt{u_nu_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell| = \ell$. On en déduit que $\ell = 1 + \ell$, ce qui est absurde.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, mais comme elle est croissante, elle tend vers l'infini.

3. a) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = 1 - u_n + \sqrt{u_n u_{n-1}} = 1 - \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}) \leqslant 1$$

par croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la fonction racine carrée.
D'autre part $u_1 - u_0 = 0 < 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 1$.

b) On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1+u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} \leqslant 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - u_n = 1 - u_n + \sqrt{u_{n+1} u_n} = 1 + \sqrt{u_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}) \geqslant 1$$

pour les mêmes raisons que précédemment.

b) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_{n-1}}(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-2}}) = \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-2}}}(u_n - u_{n-2})$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}}} + \sqrt{\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{5/3}+1}$$

puisque $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \dfrac{5}{3}$, et $\dfrac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \leqslant 1$.

5. $\star$ En sommant terme à terme les inégalités $u_{k+1} - u_k \leqslant 1$, pour tout k de $\{0, 1, \dots, n-1\}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_0 + n$. Ce qui entraîne que $u_n = \mathcal{O}(n)$, pour n tendant vers l'infini.

$\star$ $u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{5/3}+1}$ donne pour $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant u_2 + (n-2)\dfrac{1}{\sqrt{5/3}+1}$ et donc $n = \mathcal{O}(u_n)$ pour n tendant vers l'infini.

$\star$ Par les questions 1., 2., 3. a), on obtient $1 \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{u_n}$, ce qui entraîne que $u_{n+1} \sim u_n$, pour n tendant vers l'infini.

Exercice 9.

1. Soit $f : [0, +\infty[\; \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

a) Montrer que f est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel $h > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$h \sum_{n=1}^{N} f(nh) \leqslant \int_0^{Nh} f(x)\,dx \leqslant h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh).$$

c) En déduire que, pour tout réel $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$ converge et que :

$$-hf(0)+h\sum_{n=0}^{+\infty}f(nh)\leqslant\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty}f(nh)$$

d) Montrer que, quand h tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}f(nh)\sim\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$$

2. a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}t^{n^2}$ converge pour tout réel $t\in\,]-1,1[$.

b) Montrer que, quand t tend vers 1 par valeurs inférieures, $\sum_{n=0}^{+\infty}t^{n^2}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$.

Solution :

1. a) $\star$ Supposons qu'il existe a tel que $f(a)<0$, alors $\forall\,t\geqslant a, f(t)\leqslant f(a)$ et donc : $\forall\,x\geqslant a$, $\int_a^x f(t)\,dt\leqslant\int_a^x f(a)\,dt=(x-a)f(a)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$, ce qui contredit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$.

$\star$ Ainsi f est décroissante et positive, donc admet une limite $\ell\geqslant 0$ en $+\infty$. Supposons que $\ell>0$, alors $\int_0^x f(t)\,dt\geqslant\int_0^x \ell\,dt=\ell x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, ce qui contredit à nouveau la convergence de l'intégrale. Bref :

$$\boxed{f\text{ est positive de limite nulle en }+\infty}$$

b) Par décroissance de f :

$$hf\big((n+1)h\big)\leqslant\int_{nh}^{(n+1)h}f(t)\,dt\leqslant hf(nh)$$

En sommant, il vient bien :

$$\boxed{h\sum_{n=1}^{N}f(nh)\leqslant\int_0^{Nh}f(x)\,dx\leqslant h\sum_{n=0}^{N-1}f(nh)}$$

c) Soit $I=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$. Comme $f\geqslant 0$, $\int_0^{Nh}f(t)\,dt\leqslant I$, donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}f(nh)\leqslant\frac{I}{h}}$$

La série de terme général $f(nh)$ étant à termes positifs, elle converge. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, il vient :

$$-hf(0)+h\sum_{n=0}^{+\infty}f(nh)\leqslant\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty}f(nh)$$

d) Ainsi $I \leqslant h \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh) \leqslant I + f(0)h$ et, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{h\to 0^+} h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) = I}$$

Si $f \neq 0$, on a $I > 0$ et : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh) \underset{(h\to 0^+)}{\sim} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Le résultat reste banalement vrai si f est la fonction nulle !

2. a) Soit $t \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|t^{n^2}| \leqslant |t|^n$, donc la série de terme général t^{n^2} est (absolument) convergente.

b) On écrit alors, pour $t \in]0,1[$: $t^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2 \ln t} = \mathrm{e}^{-(n\sqrt{-\ln t})^2}$.

Or la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'intégrale convergente, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieures, $-\ln t$ tend vers 0 par valeurs supérieures. On peut donc appliquer ce qui précède et :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{-\ln t}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-t}}}$$

Exercice 10.

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

On considère une fonction continue $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dont on suppose que :

(i) : $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge ou (i') : $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t)$ existe et est réelle (on la note alors ℓ),

et que :

(ii) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge ou (ii') : $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} f(t)$ existe et est réelle (on la note alors L).

1. a) Montrer que, pour tous réels x et y vérifiant $0 < x < y$,

$$\int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du$$

b) Montrer que, si (i) est vraie, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du = 0$,

et que, si (i') est vraie, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,du = 0$.

c) Montrer que, si (ii) est vraie, alors $\displaystyle\lim_{y\to +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du = 0$, et que, si (ii') est vraie, alors $\lim\limits_{y\to+\infty}\displaystyle\int_{ay}^{by}\frac{f(u)-L}{u}\,du=0.$

d) Déduire des résultats précédents que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$ converge et déterminer dans chaque cas sa valeur.

2. Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$?

Solution :

1. a) $\displaystyle\int_x^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt=\int_x^y\frac{f(at)}{t}\,dt-\int_x^y\frac{f(bt)}{t}\,dt$

A l'aide de changements de variable linéaires :

$\displaystyle\int_x^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt=\int_{ax}^{ay}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{bx}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du$

puis, par la relation de Chasles :

$$\int_x^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt=\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du$$

b) $\star$ Si i) est vraie , alors $\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,du=\int_{ax}^{1}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{bx}^{1}\frac{f(u)}{u}\,du$, et en faisant tendre x vers 0 les deux termes ont la même limite, donc la différence a pour limite 0.

$\star$ Si i') est vraie, alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)-\ell}{u}\,du\right| &\leqslant \int_{ax}^{bx}\frac{|f(u)-\ell|}{u}\,du\leqslant \max_{[ax,bx]}|f(u)-\ell|\int_{ax}^{bx}\frac{du}{u}\\ &\leqslant \max_{[ax,bx]}|f(u)-\ell|\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Or, comme f est continue, $\max\limits_{[ax,bx]}|f(u)-\ell|$ est un nombre de la forme $|f(c_x)-\ell|$, avec $c_x\in[ax,bx]$, nombre qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Il en est donc de même de $|f(c_x)-\ell|$ et, par conséquent :

$$\lim_{x\to0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)-\ell}{u}\,du=0$$

c) $\star$ De la même façon, si ii) est vraie, on peut écrire :

$\displaystyle\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du=\int_{ay}^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{by}^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,du$ et ces deux intégrales étant de limite nulle lorsque y tend vers $+\infty$ (restes d'intégrales convergentes), il vient :

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du=0$$

⋆ Si ii') est vraie, alors :

$$\left|\int_{ay}^{by} \frac{f(u)-L}{u}\,du\right| \leqslant \int_{ay}^{by} \frac{|f(u)-L|}{u}\,du \leqslant \max_{[ay,by]} |f(u)-L| \int_{ay}^{by} \frac{du}{u}$$
$$\leqslant \max_{[ay,by]} |f(u)-L| \ln \frac{b}{a}$$

Or, comme f est continue, $\max\limits_{[ay,by]} |f(u)-L|$ est un nombre de la forme $|f(c_y)-L|$, avec $c_y \in [ay,by]$, nombre qui tend vers $+\infty$ lorsque y tend vers $+\infty$. Donc $|f(c_y)-L|$ a pour limite 0 et, par conséquent :

$$\lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(u)-L}{u}\,du = 0$$

d) Il suffit de mettre les résultats précédents « bout à bout » en remarquant que, pour toute valeur de K : $\displaystyle\int_{au}^{bu} \frac{K}{t}\,dt = K \ln \frac{b}{a}$. D'où :

⋆ Si i) et ii) sont vraies $I = 0$;

⋆ Si i') et ii) sont vraies $I = \ell \ln \dfrac{b}{a}$;

⋆ Si i) et ii') sont vraies $I = -L \ln \dfrac{b}{a}$;

⋆ Si i') et ii') sont vraies $I = (\ell - L) \ln \dfrac{b}{a}$.

2. Dans le cas présent, les hypothèses i') et ii') sont vérifiées, donc :

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt \text{ converge et vaut } \ln \frac{b}{a}}$$

(Ces intégrales sont appelées intégrales de Frullini.)

Exercice 11.

Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points de coordonnées (x,y) tels que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^y}\,dt$ converge.

Solution :

Comme $t^x = \mathrm{e}^{x\ln t}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+t^y}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

- pour t au voisinage de 0^+ :

  si $y > 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim t^x$. L'intégrale converge si et seulement si $x > -1$.

  si $y = 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim \dfrac{t^x}{2}$. L'intégrale converge si et seulement si $x > -1$.

  si $y < 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim \dfrac{1}{t^{y-x}}$. L'intégrale converge si et seulement si $y - x < 1$.

- pour t au voisinage de $+\infty$:

  si $y > 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim \dfrac{1}{t^{y-x}}$. L'intégrale converge si et seulement si $y - x > 1$.

  si $y = 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim \dfrac{t^x}{2}$. L'intégrale converge si et seulement si $x < -1$.

  si $y < 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim t^x$. L'intégrale converge si et seulement si $x < -1$.

En conclusion, l'intégrale I existe si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}$ convergent, soit :

$(y > 0$ et $x > -1$ et $y > x + 1)$ ou
$(y < 0$ et $x < -1$ et $y < x + 1)$.

La représentation graphique s'en déduit.

Exercice 12.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$.

1. Vérifier que l'intégrale I_n converge.

2. Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
En déduire les valeurs de I_{2n+1} et de I_{2n}, puis de $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$.

3. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx$$

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx$$

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sqrt{n}.I_n \leqslant I_{n+1}$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} C_{2n}^n \leqslant 1$$

En déduire un équivalent de C_{2n}^n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. En admettant la formule de Stirling : $n! \underset{(\infty)}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$, retrouver le résultat précédent.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto x^n.\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2.x^n.\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$, ce qui entraîne l'existence de $I_n, n \in \mathbb{N}$, par comparaison avec une intégrale de référence de Riemann.

2. Il suffit de faire une intégration par parties sur un intervalle de la forme $[0,A]$, puis de faire tendre A vers l'infini, pour obtenir $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

Par une récurrence descendante, il vient :

$$I_{2n+1} = 2nI_{2n-1} = \cdots = 2^n n! I_1 = 2^n n!$$

car : $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = 1$

De même :

$$I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = \frac{(2n)(2n-1)}{(2n)} I_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n)!}{2^n n!} I_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

car : $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$

Enfin :

$$\boxed{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n!)}{(2^n n!)^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

3. a) Soit $A > 0$.

$$\int_0^A x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \left[\frac{-1}{n}x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\right]_0^A + \int_0^A x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}, dx$$

En faisant tendre A vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx$$

b) Par convergence de toutes les intégrales suivantes, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx - \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx \\
&\quad = \int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx - \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}x$, il vient, pour $A > 0$:

$$\int_0^A x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{A\sqrt{n}} n^{-\frac{n+2}{2}} t^{n+1}.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1}$$

De même : $\displaystyle\int_0^A x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{A\sqrt{n}} n^{-\frac{n+1}{2}} t^n.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = n^{-\frac{n+1}{2}} I_n$$

ce qui donne finalement :

$$n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx$$

c) On a :

$$I_{n+1} - \sqrt{n} I_n = \frac{1}{2} n^{\frac{n+2}{2}} \int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx \geqslant 0$$

Donc $\sqrt{n} I_n \leqslant I_{n+1}$. L'autre inégalité est évidente.

4. D'après ce qui précède :

$$0 \leqslant \sqrt{(2n-1)2n} I_{2n-1} \leqslant \sqrt{2n} I_{2n} \leqslant I_{2n+1}$$

donc :

$$\sqrt{(2n-1)2n}\,\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \leqslant \sqrt{2n}\,\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant 1$$

Mais :

$$\sqrt{(2n-1)2n}\,\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{\sqrt{(2n-1)2n}}{2n} = \sqrt{1-\frac{1}{2n}}$$

donc :

$$\sqrt{1-\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}\mathrm{C}_{2n}^n \leqslant 1$$

Ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n\pi}}{4^n}\mathrm{C}_{2n}^n = 1$, et $\mathrm{C}_{2n}^n \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.

5. Si l'on admet la formule de Stirling, il vient :

$$n! \sim \mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}, \quad (2n)! \sim \mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{C}_{2n}^n = \frac{(2n!)}{(n!)^2} \sim \frac{\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\mathrm{e}^{-2n} n^{2n} 2\pi n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}}$$

Exercice 13.

Soit f une fonction réelle, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, convexe et de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que f' est croissante sur cet intervalle.

2. Soit k un entier naturel. Exprimer $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(x-k-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx$ en fonction de $f(k), f(k+1)$ et de $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

3. Montrer que : $\dfrac{f(k)+f(k+1)}{2} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

4. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{2}f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) \geqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

5. Montrer que :
$$\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx \leqslant \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8}$$
[On remarquera que $x \mapsto \dfrac{1}{2}\Big((x-k)^2-(x-k)-\dfrac{1}{4}\Big)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x-k-\frac{1}{2}$].

6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$\tfrac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \frac{f'(n)-f'(1)}{8}$$

Solution :

1. C'est une question de cours : pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ on a équivalence entre le convexité sur un intervalle et la positivité de la dérivée seconde de f sur cet intervalle.

2. Effectuons une intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx &= \Big[\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f(x)\Big]_k^{k+1}-\int_k^{k+1}f(x)\,dx\\ &= \frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\int_k^{k+1}f(x)\,dx\end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable $u=x-k-\dfrac{1}{2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx$, puis partageons à l'aide de la borne intermédiaire 0,
on obtient :
$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx &= \int_0^1 uf'\big(u+k+\tfrac{1}{2}\big)\,du\\ &= \int_0^{1/2} u\big(f'(k+1/2+u)-f'(k+1/2-u)\big)\,du\end{aligned}$$
On conclut à la positivité par la croissance de la fonction f' et le résultat 2. donne l'inégalité souhaitée :
$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2} \geqslant \int_k^{k+1}f(x)\,dx$$

4. Il suffit de sommer, pour $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, les inégalités :
$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2} \geqslant \int_k^{k+1}f(x)\,dx$$
pour obtenir, pour $n\geqslant 1$:
$$\tfrac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n) \geqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

5. Intégrons de nouveau par parties :

$$\int_k^{k+1} \big(x-k-\tfrac{1}{2}\big) f'(x)\,dx = \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8} - \int_k^{k+1} \frac{1}{2}\big((x-k)^2-(x-k)+\tfrac{1}{4}\big) f''(x)\,dx$$

On conclut en remarquant que $x \mapsto \big((x-k)^2-(x-k)+\frac{1}{4}\big) f''(x)$ est positive sur l'intervalle $[k, k+1]$.

5. En sommant pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ les précédentes inégalités, et en utilisant :

$$\int_k^{k+1} \big(x-k-\tfrac{1}{2}\big) f'(x)\,dx = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x)\,dx$$

on obtient, pour $n \geqslant 1$:

$$\tfrac{1}{2} f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \tfrac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \frac{f'(n)-f'(1)}{8}$$

Exercice 14.

1. Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout réel $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on ait :

$$P\big(\frac{1}{\tan^2 t}\big) = Q\big(\frac{1}{\tan^2 t}\big)$$

Montrer que P et Q sont égaux.

2. a) Pour tout entier naturel n, montrer qu'il existe un polynôme P_n vérifiant, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(\sin t)^{2n+1} P_n\big(\frac{1}{\tan^2 t}\big) = \sin[(2n+1)t]$$

(on pourra développer $(\cos t + i \sin t)^{2n+1}$ à l'aide de la formule du binôme).

b) Montrer que le polynôme P_n est unique.

c) Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

3. a) Montrer que P_n admet n racines réelles distinctes que l'on déterminera.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Calculer u_n.

Solution :

1. Comme la fonction $\tan^2$ prend une infinité de valeurs, le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul.

2. a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(2n+1)t = \operatorname{Im}\big((\cos t + i\sin t)^{2n+1}\big)$. On développe par la formule du binôme et la partie imaginaire provient des termes d'indices impairs, soit puisque $i^{2k+1} = i(-1)^k$:

$$\sin(2n+1)t = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(\cos t)^{2(n-k)}(-1)^k(\sin t)^{2k+1}$$

et pour t non congru à 0 modulo π :

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)t &= (\sin t)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k\Big(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\Big)^{n-k}\\ &= (\sin t)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k\Big(\frac{1}{\tan^2 t}\Big)^{n-k}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{n-k}}$$

b) L'unicité du polynôme P_n résulte de la question 1.

c) On voit que P_n est de degré n et de coefficient dominant $\mathrm{C}_{2n+1}^{1} = 2n+1$.

3. a) On sait que pour t non congru à 0 modulo π :

$$P_n\Big(\frac{1}{\tan^2 t}\Big) = \frac{\sin(2n+1)t}{(\sin t)^{2n+1}}$$

Comme $\sin(2n+1)t$ est nul pour $t = \dfrac{k\pi}{n+1}$, avec k entier relatif, les nombres $\dfrac{1}{\tan^2(k\pi/2n+1)}$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, sont tous des zéros de P_n et par stricte monotonie de $\dfrac{1}{\tan^2}$ sur $]0,\pi/2[$, ces nombres sont deux à deux distincts. On vient donc de trouver les n zéros du polynôme P_n (qui est un polynôme de degré n).

b) On peut donc factoriser $P_n(X)$, soit :

$$P_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\Big(X - \frac{1}{\tan^2(k\pi/2n+1)}\Big)$$

Le réel u_n représente la somme des zéros de P_n. En développant la dernière expression de P_n, le nombre $-(2n+1)u_n$ est égal à l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans P_n. Soit :

$$\boxed{u_n = \frac{-\mathrm{C}_{2n+1}^{3}}{-(2n+1)} = \frac{2n(2n-1)}{6}}$$

Exercice 15.

1. Soit P la fonction polynomiale définie par $P(t) = t^5 - t + 1$.

a) Combien P admet–elle de racines réelles ?

b) Montrer que P n'admet pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

On désigne par a la racine réelle de P.

2. On définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{4}{P(t)}\, dt$$

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Déterminer le sens de variation de F et sa convexité.

c) Etudier les limites de F aux bornes de son domaine de définition.

3. a) Déterminer un équivalent simple de F au voisinage $+\infty$.

b) Déterminer, en fonction de a, un équivalent simple de F au voisinage de a.

Solution :

1. a) On a facilement $P'(t) = 5t^4 - 1$ qui s'annule pour $t = \pm 5^{-1/4}$. Ce ne sont pas des racines de P car autrement, en remplaçant t^4 par $\frac{1}{5}$ dans $t^5 - t + 1 = t.t^4 - t + 1$, il viendrait $t = \frac{5}{4}$!

b) Les variations de P se déterminent aisément, et P admet un minimum local en $t = 5^{-1/4}$, minimum qui vaut $m = 5^{-5/4}(5^{5/4} - 4) > 0$ et un maximum local en $t = -5^{-1/4}$, ce maximum local étant *a fortiori* positif. Comme $\lim\limits_{t \to -\infty} P(t) = -\infty$, on en déduit que P admet une unique racine réelle a et a est tel que $a < -5^{-1/4}$.

c) Le calcul fait en a) montre que les racines complexes de P' ne sont pas racines de P, et les racines complexes de P sont toutes simples.

2. a) Comme a est racine simple de P, $P(t) \sim C(t-a)$ au voisinage de a, la valeur de C étant sans importance ici, ce qui entraîne que l'intégrale $\displaystyle\int_a^A \frac{4\,dt}{P(t)}$ diverge. Donc $\mathcal{D}_F =]a, +\infty[$

b) F est une fonction continue et dérivable (car $t \mapsto \dfrac{4}{P(t)}$ est continue sur $\mathcal{D}_F$) et pour tout $x > a$:

$$F'(x) = -\frac{4}{x^5 - x + 1} < 0, \quad F''(x) = \frac{4(5x^4 - 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$$

L'étude de la convexité de F est alors sans problème.

c) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ comme reste d'intégrale convergente,

et $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = +\infty$, car au voisinage de a^+, $\dfrac{4}{P(t)} \sim \dfrac{4}{(t-a)Q(a)}$ avec $Q(a) > 0$.

3. a) Intuitivement, comme au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4}{P(t)} \sim \dfrac{4}{t^5}$, on peut penser qu'au voisinage de $+\infty$:

$$F(x) \sim \int_x^{+\infty} \frac{4\,dt}{t^5} = \frac{1}{x^4}$$

Montrons–le !

$$\left|F(x) - \frac{1}{x^4}\right| \leqslant \int_x^{+\infty} \left|\frac{4t-4}{t^5(t^5-t+1)}\right| dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^8} = \frac{1}{7x^7} = o(x^{-4})$$

(en effet la fonction à intégrer est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $\dfrac{4}{t^9}$, donc pour x assez grand elle est majorée par $\dfrac{1}{t^8}$ sur $[x,+\infty[$)

b) On sait que $P(t) = (t-a)Q(t)$ d'où $P'(a) = Q(a)$. On a également : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4}{P(t)}\,dt = F(0)$. On a alors, pour x tel que $a < x \leqslant 0$:

$$\int_x^0 \frac{4}{P(t)}\,dt - \int_x^0 \frac{4}{(t-a)Q(a)}\,dt = 4\int_x^0 \frac{Q(a)-Q(t)}{Q(a)(t^5-t+1)}\,dt$$

et

$$4\int_x^0 \frac{Q(a)-Q(t)}{Q(a)(t^5-t+1)}\,dt = -4\int_x^0 \frac{Q(t)-Q(a)}{(t-a)} \times \frac{1}{Q(a)Q(t)}\,dt$$

Cette dernière intégrale converge, et est même faussement impropre, lorsque x est au voisinage de a (car $\displaystyle\lim_{t\to a} \frac{Q(t)-Q(a)}{(t-a)} = Q'(a)$). Finalement :

$$\lim_{x\to a^+} \Big(F(x) - F(0) + \frac{4}{Q(a)}\ln(x-a)\Big) = K$$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x) = +\infty$:

$$\boxed{F(x) \underset{(a^+)}{\sim} -\frac{4}{Q(a)}\ln(x-a) = \frac{-4\ln(x-a)}{5a^4-1}}$$

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout t et pour tout s de l'intervalle $[0,1]$, on a :

$$|\ln^2(1+t) - \ln^2(1+s)| \leqslant 2|t-s|$$

Dans la suite de cet exercice, g est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 1.

2. a) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}$.

On pose pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Big[\ln^2\big(1+\frac{k+t}{n}\big) - \ln^2\big(1+\frac{k}{n}\big)\Big]$$

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt = 0$$

3. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $\left(\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt\right)_n$ en fonction de $\int_0^1 g(t)\,dt$.

Solution :

1. C'est simplement l'inégalité des accroissements finis, que l'on applique à la fonction $f : t \mapsto \ln^2(1+t)$, en remarquant que $f'(t) = \dfrac{2\ln(1+t)}{1+t}$ et que l'on a :

$$\forall t \in [0,1], |f'(t)| \leqslant 2\ln 2 < 2$$

2. a) g est continue sur $[0,1]$, donc bornée sur ce segment :

$$\exists M, \forall t \in [0,1], |g(t)| \leqslant M$$

Puis : $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| = |f(t - \lfloor t \rfloor)| \leqslant M$.

b)
$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt\Big| &\leqslant \int_0^1 |u_n(t)|.|g(t)|\,dt \\
&\leqslant \frac{M}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big|\int_0^1 |\ln^2(1+\frac{k+t}{n}) - \ln^2(1+\frac{k}{n})\Big|\,dt \\
&\leqslant \frac{2M}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 |\frac{k+t}{n} - \frac{k}{n}|\,dt = \frac{2M}{n}\int_0^1 t\,dt \\
&\leqslant \frac{M}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. a) En intégrant par parties ($t \mapsto t+1$ est une primitive de $t \mapsto 1$) :

$$\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt = \Big[(t+1)\ln^2(1+t)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$$

Sachant que $u \mapsto u\ln u - u$ est une primitive de $u \mapsto \ln u$, on conclut aisément :

$$\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt = 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt &= \frac{1}{n}\int_0^n g(y)\ln^2\left(1+\frac{y}{n}\right)dy \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} g(y)\ln^2\left(1+\frac{y}{n}\right)dy
\end{aligned}$$

et, en posant $y = k+T$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt &= \frac{1}{n}\int_0^1 g(T)\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k+T}{n}\right)\Big)\,dT \\
&= \int_0^1 g(T)\,dT \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k}{n}\right) + \int_0^1 u_n(T)g(T)\,dT
\end{aligned}$$

Le deuxième terme a pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini et on reconnaît dans le premier terme une somme de Riemann.

Ce terme a donc pour limite $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt$ lorsque n tend vers l'infini. Soit :

$$\boxed{\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2)\int_0^1 g(t)\,dt}$$

Exercice 17.

1. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x_k^2 - 2\sum_{k=2}^{n}(k-1)x_k x_{k-1} = nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2$$

2. On considère une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n^2$ soit convergente. On définit une suite (A_n) par$A_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a) Exprimer, pour $k \geqslant 1$, a_k en fonction de A_k et de A_{k-1}.

b) En utilisant la première question, montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} a_k A_k$$

c) Montrer que :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)^2 \leqslant 4\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)$$

3. En déduire que la série de terme général A_k^2 est convergente.

Solution :

1. Il suffit de développer l'expression située à droite :

$$nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2 = nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} kx_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} kx_{k+1}^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} kx_k x_{k+1}$$

En regroupant et en décalant l'indice de sommation pour les termes rectangles, il vient bien :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x_k^2 - 2\sum_{k=2}^{n}(k-1)x_k x_{k-1} = nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2$$

2. a) $nA_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = (n-1)A_{n-1} + a_n$, donc :

$$\forall\, n \geqslant 1, a_n = nA_n - (n-1)A_{n-1}$$

b) On a, d'après 1. : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)A_k^2 \geqslant 2\sum_{k=2}^{n}(k-1)A_k A_{k-1}$, soit :

$2\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\big(kA_k-(k-1)A_{k-1}\big) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2$, ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} a_kA_k$$

c) On sait (inégalité de Cauchy-Schwarz) que :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_kA_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)$$

et donc :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)^2 \leqslant 4\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)$$

3. Si les a_k sont tous nuls, il en est de même des A_k et la propriété est banale. Sinon, il existe k_0 tel que A_{k_0} soit non nul, et $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2$ est strictement positif à partir du rang k_0 et en divisant par $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2$:

$$\forall n \geqslant k_0,\ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

D'où la convergence de la série proposée, puisque cette série est à termes positifs de sommes partielles majorées. On a de plus :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}$$

Remarque : on peut montrer que cette majoration est optimale, c'est-à-dire que l'on ne peut pas remplacer 4 par un nombre plus petit...

Exercice 18.

Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout x réel et pour tout $h > 0$, on a :

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}$$
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}$$

En déduire que pour tout x réel et pour tout $h > 0$:

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}$$

2. Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

3. On suppose que g est une fonction de classe C^3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g et g''' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On note :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|, M_3 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'''(x)|$$

En appliquant l'inégalité de Taylor sur les segments $[x, x+1]$ et $[x, x+2]$, à un ordre suffisant, montrer de même que g' et g'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Il s'agit simplement de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f, à l'ordre 1, soit entre les points x et $x+h$, soit entre les points x et $x-h$.

En sommant ces deux inégalités, il vient :

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| &\\ &\leqslant |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| + |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \\ &\leqslant M_2 h^2.\end{aligned}$$

Ainsi : $2h|f'(x)| \leqslant M_2h^2 + 2M_0$ et : $\boxed{|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}}$

2. $\star$ Si $M_2 = 0$, f'' est la fonction nulle, donc f est affine et comme f est bornée, f est constante. On a donc $f' = 0$, soit $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 0$, et la propriété énoncée est banale.

$\star$ Si $M_2 \neq 0$, une étude rapide de la fonction $h \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$ montre que cette fonction est minimale pour $h = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, le minimum valant $\sqrt{2M_0M_2}$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

3. On a de même :

$$|g(x+1) - g(x) - g'(x) - \frac{1}{2}g''(x)| \leqslant \frac{M_3}{6}$$

$$|g(x+2) - g(x) - 2g'(x) - 2g''(x)| \leqslant \frac{8M_3}{6}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} g'(x) + \frac{1}{2}g''(x) = \alpha \\ 2g'(x) + 2g''(x) = \beta \end{cases}$$

avec $|\alpha| \leqslant \dfrac{M_3}{6} + 2M_0$ et $|\beta| \leqslant \dfrac{4M_3}{3} + 2M_0$.

Le système précédent donne $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de α et β, ce qui prouve que $g'(x)$ et $g''(x)$ sont bornées indépendamment de x.

Exercice 19.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On lui associe la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{x_k}{x_k + 1}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers un réel λ tel que $0 \leqslant \lambda < 1$.

2. Donner un exemple de suite (x_n) pour laquelle on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Montrer que $\lambda \neq 0$ si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ converge.

4. On suppose que la suite (x_n) est définie par :

$$\begin{cases} x_0 > 1 \\ x_{n+1} = x_n^2,\ n \geqslant 0 \end{cases}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

1. $x_k + 1$ n'est jamais nul, donc la suite est bien définie.
Cette suite est à termes strictement positifs, et $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{x_{k+1}}{x_{k+1}+1} < 1$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante, minorée par 0 : elle converge et sa limite λ vérifie $0 \leqslant \lambda < \dfrac{x_0}{x_0+1} < 1$.

2. Prenons par exemple la suite x définie par $x_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n$. On a bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ et pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. La suite u converge vers $\lambda > 0$ si et seulement si la suite $\ln u$ converge vers $\ln \lambda$.
Or : $\ln(u_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} [\ln(x_k) - \ln(x_k+1)] = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x_k}\right)$.
Comme x_k tend vers $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right) \sim \dfrac{1}{x_k}$ et la série dont le terme général est $\ln\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)$ converge si et seulement si la série de terme général $\dfrac{1}{x_k}$ converge.
D'où le résultat.

4. $\star$ Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_0)^{2^n}$ et :

$$\prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{k=0}^{n} (x_0)^{2^k} = x_0^{\sum_{k=0}^{n} 2^k} = x_0^{2^{n+1}-1}.$$

On vérifie alors, par récurence, que :

$$\prod_{k=0}^{n} (x_k+1) = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} (x_0)^j = \frac{x_0^{2^{n+1}} - 1}{x_0 - 1}$$

En conséquence : $\boxed{u_n = \dfrac{x_0^{2^{n+1}-1}(x_0-1)}{x_0^{2^{n+1}} - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x_0-1}{x_0}}$

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \, , \, \rangle$ et la norme associée $|| \, ||$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est–à–dire vérifiant pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Pour tout $(h, x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ fixé, on définit la fonction $\varphi_{h,x}$ de la variable réelle t par :

$$\varphi_{h,x}(t) = f(x + th)$$

1. a) Montrer que $\varphi_{h,x}$ est une fonction dérivable et convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire que :

$$\varphi'_{h,x}(0) \leqslant \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0)$$

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a :

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x), y - x \rangle \leqslant f(y) - f(x)$$

où $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$ représente le gradient de f au point x.

3. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et que $\overrightarrow{\text{grad}} f(0) = 0$.
On suppose également que f est strictement convexe, c'est–à–dire qu'elle vérifie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, tels que $x \neq y$, pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, f(0) \leqslant f(x)$, puis que si $x \neq 0$, alors $f(x) > 0$.

b) Montrer que $\displaystyle\inf_{\{x \in \mathbb{R}^n, ||x||=1\}} f(x)$ existe. On note cette valeur α. Montrer que $\alpha > 0$.

c) Montrer que pour tout $||x|| > 1$, on a $f(x) \geqslant \alpha ||x||$. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{||x|| \to +\infty} f(x)$.

Solution :

1. a) $\star$ $\varphi_{x,h}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\varphi'_{x,h}(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th), \text{ avec } h = (h_1, \ldots, h_n)$$

$\star$ Soit $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,h}\big(\lambda t + (1-\lambda)u\big) &= f\big(x + \lambda th + (1-\lambda)uh\big) \\
&= f\big(\lambda(x + th) + (1-\lambda)(x + uh)\big) \\
&\leqslant \lambda f(x + th) + (1-\lambda)f(x + uh) \\
&\leqslant \lambda \varphi_{x,h}(t) + (1-\lambda)\varphi_{x,h}(u)
\end{aligned}$$

et $\varphi_{x,h}$ est bien convexe.

b) Par convexité, la corde joignant les points d'abscisses $t=0$ et $t=1$ se trouve au-dessus de la tangente au point d'abscisse $t=0$, ce qui s'écrit :

$$\varphi'_{x,h}(0) \leqslant \varphi_{x,h}(1) - \varphi_{x,h}(0)$$

2. Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leqslant f(x+h) - f(x)$$

Soit, avec $h = y - x$: $\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leqslant f(y) - f(x)$, ou encore :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x)}$$

3. a) En prenant $x = 0$ dans la relation précédente :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant f(y)$$

S'il existait un point $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0$, alors par convexité stricte, on aurait :
$f(\frac{1}{2}\,0 + \frac{1}{2}\,x) < \frac{1}{2}\,f(0) + \frac{1}{2}\,f(x)$, soit $f(\frac{1}{2}\,x) < \frac{1}{2}\,f(x) = 0$, en contradiction avec $f(u) \geqslant 0$ pour tout u.

b) La fonction f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^n$, donc $\inf_{||x||=1} f(x)$ existe et sa valeur α est positive ou nulle.
Comme $\{x/||x|| = 1\}$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ et f continue, α est une valeur atteinte et donc $\alpha > 0$

c) Soit x tel que $||x|| > 1$, alors $\lambda = \dfrac{1}{||x||} \in]0,1[$ et $f(\lambda x) < \lambda f(x)$.

Par conséquent :
$\alpha \leqslant f\big(\dfrac{x}{||x||}\big) < \dfrac{1}{||x||}\,f(x)$, soit $f(x) \geqslant \alpha.||x||$ et :

$$\boxed{\lim_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Exercice 21.

Soit $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout $P \in E$, on définit :

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x)$$

$$G : x \mapsto F'(x)\sin x - F(x)\cos x$$

où $P^{(j)}(x)$ désigne la dérivée $j^{\text{ème}}$ de P.

1. Calculer $G'(x)$, dérivée de G. En déduire que :

$$\int_0^{\pi} P(x)\sin(x)\,dx = F(0) + F(\pi)$$

2. On suppose que π est un nombre rationnel, c'est–à–dire qu'il s'écrit sous la forme $\pi = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \dfrac{1}{n!}X^n(p-qX)^n$.

a) Montrer que pour tout $j \in \{0, \dots n-1\}, P_n^{(j)}(0) = 0$.

b) Calculer pour tout $j \geqslant 0, P_n^{(n+j)}(0)$.

On note alors F_n l'application associée à P_n comme défini au début de cet exercice.

c) Montrer que $F_n(0) \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $P_n(\pi - x) = P_n(x)$. En déduire que $F_n(\pi) \in \mathbb{Z}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)\,dx$$

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1, I_n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c) En déduire que l'hypothèse faite au début de la question 2. est absurde. Conclusion ?

Solution :

1. Des calculs simples donnent :

$$F''(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}P^{(2k)}(x)$$

et :

$$G'(x) = (F''(x) + F(x))\sin x = P(x)\sin x$$

Donc :

$$\int_0^\pi P(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi G'(x)\,dx = G(\pi) - G(0) = F(\pi) + F(0)$$

2. a) 0 est racine de multiplicité n de P. Aussi, pour tout j élément de $\{0, \dots, n-1\}$, $P^{(j)}(0) = 0$.

b) On a $P(x) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^{n-k}p^{n-k}q^k x^{n+k}$. Aussi, pour tout $j \geqslant 0$:

$$P^{(n+j)}(0) = \mathrm{C}_n^j p^{n-j}q^j\frac{(n+j)!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

c) Ainsi : $F(0) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

d) On a, avec $\pi = p/q$:

$$n!P(\pi - X) = (\pi - X)^n(p - q(\pi - X))^n = \frac{(p-qX)^n}{q^n}(qX)^n = n!P(X)$$

Donc $P_n(\pi - x) = P(x)$, et par dérivation $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, d'où $F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le polynôme P est dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Il vérifie donc le résultat de la question 1. Aussi $I_n = F(0) + F(\pi)$.
Par la question 2. b) $F(0) \in \mathbb{Z}$ et par la question 2. d), $F(\pi) \in \mathbb{Z}$. Ainsi $I_n \in \mathbb{Z}$.
Mais sur l'intervalle $[0, \pi]$ et en supposant que $\pi = p/q$, $t \mapsto P(t)\sin t \geqslant 0$. Ainsi $I_n \in \mathbb{N}$. Par continuité de cette dernière fonction, qui n'est pas la fonction nulle, on a même :

$$\boxed{I_n \in \mathbb{N}^*}$$

b) De plus

$$|I_n| \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^\pi x^n(p-qx)^n\,dx \leqslant \frac{\pi \times \pi^n \times p^n}{n!}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, puisque l'on sait même qu'il s'agit du terme général d'une série convergente..

c) Une suite d'entiers strictement positifs ne peut tendre vers 0. L'hypothèse de la rationnalité de π conduit à une absurdité.
Conclusion : $\boxed{\pi \text{ est un nombre irrationnel}}$

Exercice 22.

On considère le triangle numérique suivant, où chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne supérieure entre lesquels il est placé :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \dots \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \dots & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & 16 & & \dots & & \\
& & & 12 & & 20 & & 28 & & \dots & & & \\
& & & & 32 & & 48 & & \dots & & & & \\
& & & & & 80 & & \dots & & & & &
\end{array}$$

1. Ecrire une fonction Pascal de deux variables n et k, avec $k \leqslant n$ permettant de calculer le $(k+1)^{\text{ème}}$ terme de la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne et l'utiliser pour faire calculer à l'ordinateur le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n.

2. Soit $(a_k)_k$ une suite de nombres et soit $n \in \mathbb{N}$. On construit, selon le modèle précédent, le triangle numérique d'ordre n, obtenu en mettant sur la première ligne les nombres :

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

a. Montrer l'égalité : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}$

b. Montrer, par récurrence sur n que le nombre inscrit à la pointe de ce triangle est

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k$$

c. En déduire la valeur du nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n de la première question.

Solution :

1.
```
Program ESCP23 ; uses crt ;
Var : n :integer
Function f(n,k :integer) :integer ;
  Begin
  If n=0 then f := k Else f := f(n-1,k)+f(n-1,k+1) ;
End ;
Begin
  Readln(n) ; Writeln(f(n,0)) ;
  Readkey
End.
```

2. a)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a_k &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}) a_k + a_{n+1}\\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a_{k+1} + a_{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_{k+1}\end{aligned}$$

b) Soit H_n la propriété : « si la première ligne du triangle est $b_0, b_1, \ldots, b_n$, alors le nombre inscrit à la pointe du triangle est $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k b_k$, ceci quel que soit le contenu de la première ligne du triangle ».

$\star$ Pour $n = 0$, le nombre cherché est clairement a_0, qui est bien égal à $\sum\limits_{k=0}^{0} \mathrm{C}_0^k a_k$.

$\star$ Si le résultat est vrai à un certain ordre n, alors si $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ sont les nombres de la première ligne, on a sur l'avant-dernière ligne les deux nombres obtenus à partir de $a_0, \ldots, a_n$ et à partir de $a_1, \ldots, a_{n+1}$, c'est-à-dire, par l'hypothèse de récurrence : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_{k+1}$.

En faisant la somme de ces deux nombres, on obtient le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre $n+1$, soit, d'après la question précédente : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a_k$.

Ceci prouve H_{n+1} et on conclut par le principe de récurrence.

Remarque : on peut aussi chercher directement combien de fois a_k se retrouve dans la sommation définissant le nombre écrit à la pointe du triangle, ce qui revient à chercher le nombre de chemins joignant a_k à la pointe, sachant que chaque élément du chemin, en remontant depuis la pointe, est formé de traits joignant un élément d'une ligne à l'élément de la ligne précédente immédiatement à sa gauche, ou immédiatement à sa droite. On voit ainsi qu'il existe C_n^k chemins possibles,...

c) Dans notre cas particulier, on doit calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k$.

Or : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum\limits_{k=1}^{n} n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = n.2^{n-1}$

$$\boxed{\text{Le nombre écrit à la pointe du triangle d'ordre } n \text{ est } n.2^{n-1}}$$

Exercice 23.

Une machine fonctionne avec deux combustibles, dont les quantités respectives (positives !) sont exprimées en m^3 et notées x et y. La puissance de la machine est :

$$P(x,y) = \frac{kxy}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

où k est un réel strictement positif.

1. Déterminer (x,y) pour que la puissance de la machine soit maximale.

2. Les combustibles valent tous deux a euros le m^3. Déterminer (x,y) pour que le rapport $\dfrac{\text{puissance}}{\text{prix}}$ soit maximal. Pour cela, on pourra procéder comme suit :

poser $f(t) = \dfrac{t}{(1+t)^2}$, $g(x,y) = \dfrac{f(x)f(y)}{x+y}$ pour $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $(x,y) \neq (0,0)$ et montrer que :

a) en posant $g(0,0) = 0$, g est continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$;

b) pour tout $R > 0$, on a : $\max(x,y) \geqslant R \implies g(x,y) \leqslant \dfrac{1}{16.R}$ et en déduire que : $\max(x,y) \geqslant 2 \implies g(x,y) \leqslant g(1,1)$;

c) g admet un maximum sur $[0,2]\times[0,2]$ atteint en un point de $]0,2[\times]0,2[$ et déterminer ce maximum.

Solution :

1. Posons $f(t) = \dfrac{t}{(1+t)^2}$, on a $P(x,y) = kf(x)f(y)$, pour tout $(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(t) = \dfrac{1-t}{(1+t)^3}$.

La fonction f passe par un maximum pour $t=1$, ce maximum valant $\dfrac{1}{4}$.

Par conséquent P passe par un maximum au point $(1,1)$, ce maximum valant $\dfrac{k}{16}$.

2. Le rapport puissance/prix vaut $Q=\dfrac{k}{a}g(x,y)$, donc Q est maximal lorsque g est maximal.

a) Comme $0\leqslant(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x-2\sqrt{xy}+y$, on a $2\sqrt{xy}\leqslant x+y$ et :

$$0\leqslant g(x,y)=\frac{xy}{(1+x)^2(1+y)^2(x+y)}\leqslant\frac{xy}{x+y}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{xy}$$

D'où : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0$.

b) Comme $g(x,y)=f(x)f(y)\dfrac{1}{x+y}$, on a :

$$(x\geqslant R\text{ ou }y\geqslant R)\implies g(x,y)\leqslant f(x)f(y)\frac{1}{R}\leqslant\frac{1}{16.R}$$

Avec $g(1,1)=\dfrac{1}{32}$, on en déduit : $\max(x,y)\geqslant 2\implies g(x,y)\leqslant g(1,1)$.

c) S'il y a un maximum, il est donc atteint en un point de $W=[0,2]\times[0,2]$. La fonction g étant continue sur W et W étant un fermé borné, la fonction g admet un maximum sur W.

Pour tout t de $[0,2]$, on a $g(t,0)=g(0,t)=0$ et $g(t,2)=g(2,t)\leqslant g(1,1)$. Le maximum ne peut donc être atteint qu'en un point de l'ouvert $W'=\,]0,2[\times]0,2[$, domaine sur lequel g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Ainsi le maximum de g est atteint en un point critique de g appartenant à W'.

On trouve :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{y(y-xy-2x^2)}{(1+y)^2(1+x)^3(x+y)^2}$$

et de façon symétrique :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x-xy-2y^2)}{(1+x)^2(1+y)^3(x+y)^2}$$

Les éventuels points critiques vérifiant $x>0,y>0$ sont donc solutions du système :

$$(S):\begin{cases}y-xy-2x^2=0\\x-xy-2y^2=0\end{cases}$$

Avec $x>0$ et $y>0$, on a :

$$(S)\iff\begin{cases}y-xy-2x^2=0\\(x-y)(1+2(x+y))=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=x\\x-3x^2=0\end{cases}\iff x=y=\frac{1}{3}$$

Il n'y a qu'un point critique dans W', ce point est donc nécessairement le point où g atteint son maximum sur W, donc sur ${\mathbb{R}_+}^2$.

Le rapport puissance/prix est maximal pour $x=y=\dfrac{1}{3}$, ce maximum valant $\dfrac{27k}{528a}$.

Exercice 24.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geqslant 2$. On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt \qquad S_p = \int_0^{p\pi} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt$$

1. Justifier l'existence de I_n.

2. On suppose dans cette question, que n est un entier impair fixé. Montrer que les suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $p \in \mathbb{N}$ par $a_p = S_{2p}$ et $b_p = S_{2p+1}$ sont adjacentes et de limite commune I_n.

3. Montrer que $I_n > 0$, pour tout $n \geqslant 2$.

4. a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{t} \leqslant 1$ et que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $[0,1]$.

b) Soit $a \in]0,1[$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^1 \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt = 0$.

5. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 2$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} (-1)^n I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 + (\frac{-\sin x}{x})^{N-1}}{1 + \frac{\sin x}{x}} \big(\frac{\sin x}{x}\big)^2 dx$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n I_n$ converge et trouver une expression de sa somme à l'aide d'une intégrale.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité par 1 en $t = 0$.
De plus, pour tout $n \geqslant 2$ et $t \geqslant 1$, $\left|\big(\frac{\sin t}{t}\big)^n\right| \leqslant \dfrac{1}{t^n}$. Ce qui prouve que I_n existe pour tout $n \geqslant 2$.

2. On a, par imparité de n :

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{\pi} (-1)^{nk} \big(\frac{\sin t}{t+k\pi}\big)^n dt$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{\pi} (-1)^{k} \big(\frac{\sin t}{t+k\pi}\big)^n dt$$

Or, pour $t \in [0,\pi]$: $\dfrac{\sin t}{t+(k+1)\pi} \leqslant \dfrac{\sin t}{t+k\pi} \leqslant \dfrac{\sin t}{t+(k-1)\pi}$, ce qui montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p} \leqslant S_{2p+2} \leqslant S_{2p+3} \leqslant S_{2p+1}$.
Enfin :

$$0 \leqslant S_{2p+1} - S_{2p} = \int_0^{\pi} \big(\frac{\sin t}{t+2p\pi}\big)^n dt \leqslant \frac{\pi}{(2p\pi)^n}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, ce qui permet de conclure.

3. Si n est pair le résultat est évident, par positivité de l'intégrale. Si n est impair, la question précédente donne :

$$I_n \geqslant a_1 = \int_0^{\pi} (\sin t)^n \Big(\frac{1}{t^n} - \frac{1}{(t+\pi)^n}\Big)\, dt > 0$$

4. a) Une étude élémentaire de $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ donne :

- f est continue sur $]0,1]$, et se prolonge en 0 par 1.
- f est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout t dans cet intervalle

$f'(t) = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2}$. La dérivée en 0 s'obtient par $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = 0$. Le signe de f' sur $[0,1]$ est celui de son numérateur ou celui de $t - \tan t$ qui est négatif sur $[0,1]$. Ainsi la fonction f est décroissante sur $[0,1]$.

Les inégalités $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{t} \leqslant 1$ sont maintenant évidentes.

b) Par la question précédente, si $0 < a \leqslant t \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{t} \leqslant \dfrac{\sin a}{a} < 1$, et

$$\int_a^1 \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^n dt \leqslant (1-a)\Big(\frac{\sin a}{a}\Big)^n$$

ce qui donne le résultat souhaité.

5. Chacune des intégrales I_n étant convergente, la somme étant finie, il vient par calcul de somme de série géométrique :

$$\sum_{n=2}^{N} (-1)^n I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 + (\frac{-\sin x}{x})^{N-1}}{1 + \frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx$$

que l'on peut également écrire sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\frac{-\sin x}{x})^{N-1}}{1+\frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x + \sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (en 0 elle se prolonge par continuité par $1/2$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+\sin x} = 1$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx$ existe.

La seconde intégrale existe donc également. Montrons qu'elle tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$\star$ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} \Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)^2$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, soit M un majorant de cette fonction.

$\star$ On écrit, pour tout a tel que $0 < a < 1$:

$$\int_0^{+\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx = \int_0^{a} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx + \int_a^{1} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx + \int_1^{+\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx$$

Or :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{N-1} dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{N-1}} dx = \frac{1}{N-2}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et inférieure à 1 :

$$\int_0^a \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{N-1} dx \leqslant a$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisi $a < \varepsilon/3$, puis N tel que $\dfrac{1}{N-2} < \varepsilon/3$, et tel que

$$\int_a^1 \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{N-1} dx < \varepsilon/3$$

(par la question 4.b)

$\star$ Alors pour N assez grand, l'intégrale est majorée en valeur absolue par $M\varepsilon$, ce qui prouve bien qu'elle est de limite nulle.

Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} (-1)^n I_n$ converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

Exercice 25.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On s'intéresse aux suites $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les trois conditions suivantes (notées conditions (C)) :

(1) $P_0(X) = 1$

(2) $P_1 \neq 0$

(3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$.

1. Montrer que la suite (P_n) définie par $P_n(X) = \dfrac{X^n}{n!}$ vérifie les conditions (C).

2. On considère la suite (P_n) définie par $P_0(X) = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$P_n(X) = \frac{X(X+n)^{n-1}}{n!}$$

a) Vérifier que pour tout $n \geqslant 1, P_n'(X) = P_{n-1}(X+1)$ (P_n' désigne le polynôme dérivé de P_n).

b) En déduire que cette suite (P_n) vérifie les conditions (C).

3. Soit u une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet un développement limité à tout ordre en 0 et telle que $u(0) = 0, u'(0) \neq 0$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ donné. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\varepsilon_n(x, t)$ telle que :

$$\mathrm{e}^{xu(t)} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)t^k + t^n\varepsilon_n(x,t)$$

avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon_n(x,t) = 0$.

b) Montrer que la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie vérifie les conditions (C).

c) Expliciter les polynômes P_n lorsque $u(t) = \ln(1+t)$.

Solution :

1. Les conditions (1) et (2) sont immédiatement vérifiées. Quant à la condition (3) :

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k} = P_n(x+y)$$

2. a) Il suffit de calculer la dérivée de P_n :

$$P_n'(x) = \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}(x+n+(n-1)x) = \frac{(x+1)(x+n)^{n-2}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x+1)$$

b) Les conditions (1) et (2) sont immédiatement vérifiées. Quant à la condition (3), effectuons une récurrence :

$$P_n'(x+y) = P_{n-1}(x+y+1) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x+1)P_{n-1-k}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}'(x)P_{n-1-k}(y)$$

Effectuons le changement d'indice $i = k+1$; il vient :

$$P_n'(x+y) = \sum_{i=1}^{n} P_i'(x)P_{n-i}(y)$$

Fixons y et intégrons par rapport à x :

$$P_n(x+y) - P_n(y) = \sum_{i=1}^{n} (P_i(x) - P_i(0))P_{n-i}(y)$$

On conclut avec $P_i(0) = 0$ pour $i \geqslant 1$ et $P_n(y) = P_n(y)P_0(x)$.

3. Écrivons le DL à l'ordre $n \geqslant 1$ de la fonction u, soit :

$$u(t) = a_1t + a_2t^2 + \cdots a_nt^n + o(t^n) = Q_n(t) + o(t^n)$$

L'application $t \mapsto xu(t)$ s'annule en $t = 0$; cela entraîne que $t \mapsto \mathrm{e}^{xu(t)}$ admet un DL en 0 à l'ordre n, obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}(Q_k(t))^k$.

L'unicité de chaque polynôme P_n est déduite de l'unicité du DL.

b) À l'ordre 1, $\mathrm{e}^{xu(t)} = \mathrm{e}^{xa_1t+o(t)} = 1 + a_1xt + t\varepsilon_1(x,t)$.

Donc $P_0 = 1$ et $P_1(X) = a_1X \neq 0$, car $a_1 \neq 0$.

De plus, comme $\mathrm{e}^{(x+y)u(t)} = \mathrm{e}^{xu(t)}\mathrm{e}^{yu(t)}$, la relation (3) se déduit de l'unicité du DL et de la définition du produit de polynômes.

c) Pour $u(t) = \ln(1+t)$, on a $u(0) = 0, u'(0) = 1$ et :

$$\mathrm{e}^{xu(t)} = (1+t)^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} P_k(x)t^k + t^n\varepsilon_n(x,t)$$

avec :

$$P_0(X) = 1, \text{ et pour tout } k \geqslant 1, P_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

2

ALGÈBRE

Exercice 1.

Soit $s \in \mathbb{N}, s \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre s à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^s$, on pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{s} x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^s$, on note $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne de x.
Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

1. On suppose dans cette question que $s = 4$, et on considère la matrice :

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer ${}^tP$ et P^2.

b) Déterminer les valeurs propres de P et les sous-espaces propres associés. Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous–espace de $\mathbb{R}^4$ que l'on déterminera.

2. On revient maintenant au cas général (s quelconque). Montrer que la matrice $P \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si on a $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

3. Soient P et Q deux matrices de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ représentant chacune une projection orthogonale. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^s$:

$$||Px||^2 + ||Qx||^2 \leqslant ||x||^2 \qquad (*)$$

a) Montrer que $PQ = QP = 0$.

b) En déduire que $P + Q$ est la matrice d'une projection orthogonale.

4. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$, n matrices représentant chacune une projection orthogonale de $\mathbb{R}^s$ et telles que $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.

Montrer que pour toute partie non vide E de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum\limits_{k \in E} P_k$ est la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^s$.

5. On se place à nouveau dans $\mathbb{R}^4$ et on considère la matrice :

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que Q est la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

b) Montrer que P et Q vérifient la relation $(*)$, où P est la matrice de la première question. Que peut-on dire de $P + Q$?

Solution :

1. a) On trouve ${}^tP = P^2 = P$.

b) P est une matrice de projecteur (non dégénéré), ses valeurs propres sont donc 0 et 1.

L'image de P est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et est engendrée par le vecteur $(1 - 1, 1, 1)$.

Le noyau de P est l'hyperplan H d'équation $x - y + z + t = 0$ (regarder les lignes de P). Cet hyperplan est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(1 - 1, 1, 1)$ et P est le projecteur orthogonal sur H.

2. $\star$ On $P^2 = P$ si et seulement si P représente un projecteur.

$\star$ P est une matrice symétrique si et seulement si elle représente, dans la base canonique de $\mathbb{R}^s$, un endomorphisme admettant une base orthonormée de vecteurs propres.

Donc une matrice de projecteur est symétrique si et seulement si $\mathrm{Im}\, P$ et $\mathrm{Ker}\, P$ (qui sont les sous-espaces propres) sont orthogonaux, donc si et seulement si P est une matrice de projecteur orthogonal.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}^s$, appliquons $(*)$ au vecteur Px :

$$||P^2x||^2 + ||QPx||^2 = ||Px||^2 + ||QPx||^2 \leqslant ||Px||^2$$

Donc $||QPx||^2 \leqslant 0$ et $QPx = 0$. On montre de même que $PQx = 0$:

$$\boxed{PQ = QP = 0}$$

b) $\star$ P et Q sont symétriques, il en est de même de $P + Q$.

$\star$ $(P+Q)^2 = P^2 + Q^2 + PQ + QP = P^2 + Q^2 = P + Q$.
Donc $P+Q$ est une matrice de projecteur orthogonal.

4. Comme $P_1, \dots, P_n$ sont n matrices de projections orthogonales telles que l'on ait $P_1 + \cdots + P_n = I$, il vient :

$$\begin{aligned}
||P_1x||^2 + \cdots + ||P_nx||^2 &= \langle P_1x, P_1x\rangle + \cdots + \langle P_nx, P_nx\rangle \\
&= \langle x, {}^tP_1P_1x\rangle + \cdots + \langle x, {}^tP_nP_nx\rangle \\
&= \langle x, P_1^2x\rangle + \cdots + \langle x, P_n^2x\rangle = \langle x, (P_1 + \cdots + P_n)x\rangle \\
&= ||x||^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $k \neq \ell$, on a sûrement $||P_kx||^2 + ||P_\ell x||^2 \leqslant ||x||^2$ et donc $P_kP_\ell = 0$.
Il s'ensuit que : $(\sum\limits_{k\in E} P_k)^2 = \sum\limits_{k\in E} P_k^2 = \sum\limits_{k\in E} P_k$, donc $\sum\limits_{k\in E} P_k$ est une matrice de projection.
Comme $\sum\limits_{k\in E} P_k$ est encore symétrique, il s'agit même d'une projection orthogonale.

5. a) On vérifie que ${}^tQ = Q^2 = Q$.

b) Pour $m = (x, y, z, t)$ on obtient après calculs :
$$||Pm||^2 + ||Qm||^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - \frac{1}{4}(x - y - z - t)^2 \leqslant ||x||^2.$$
Donc $P+Q$ est une matrice de projecteur orthogonal, ce qui se vérifie facilement directement.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout x réel : $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
Déterminer le degré de T_n.

2. a) Montrer que l'application :
$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que la famille $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire. Déterminer la norme de T_n.

Solution :

1. $T_0(\cos x) = \cos(0.x) \implies T_0 = 1$;
$T_1(\cos x) = \cos(1.x) \implies T_1 = X$;
Supposons la famille construite jusqu'à un certain rang $n \geqslant 1$, on a :
$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos x \cos(nx)$$
On peut donc prendre $T_{n+1}(X) = 2XT_n(x) - T_{n-1}(X)$

Enfin si $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = Q_n(\cos x) = \cos(nx)$, les polynômes T_n et Q_n concident en tout point de $[-1, 1]$, donc $T_n - Q_n$ a une infinité de zéros et est le polynôme nul, ce qui prouve l'unicité.

2. a) La fonction à intégrer est continue sur $]-1, 1[$ et la convergence de l'intégrale pour la borne 1, résulte de la règle de Riemann, puisqu'il existe M tel que :

$$\frac{|P(t)Q(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{M}{(1-t)^{1/2}}$$

On procède de même pour la borne -1.

Ceci étant dit, il est clair que l'application proposée est bilinéaire et symétrique.

Enfin $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geqslant 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si la fonction à intégrer est nulle sur $]-1, 1[$, donc que si P est le polynôme nul.
On a bien défini ainsi un produit scalaire.

b) Par le changement de variable $t = \cos u$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nu)\cos(ku)}{|\sin u|} \sin u\, du = \int_0^{\pi} \cos(nu)\cos(ku)\, du.$$

On a : $\cos(nu)\cos(ku) = \frac{1}{2}\big(\cos((n+k)u) + \cos((n-k)u)\big)$.

$\star$ Si $k \neq n$, l'intégration se fait sans problème et l'intégrale est nulle :

La famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale

$\star$ Si $k = n = 0$, l'intégrale vaut π et $||T_0|| = \sqrt{\pi}$.

$\star$ Si $k = n \neq 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2nu))\, du = \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$\boxed{||T_0|| = \sqrt{\pi}\,;\, \forall n \geqslant 1, ||T_n|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Exercice 3.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire usuel.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer les produits matriciels ${}^tX\,Y$ et $X\,{}^tY$.

2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $B = X\,{}^tY$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
On précisera également son noyau et son rang.

3. Montrer réciproquement que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 peut s'écrire sous la forme $M = X\,{}^tY$, avec X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Sont-ils uniques ?

4. On considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients :

$$a_{i,j} = \delta_{i,j} + x_i\,y_j \quad \text{où} \quad \begin{cases} \delta_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À quelle condition (nécessaire et suffisante) portant sur X et Y la matrice A est-elle inversible ? Expliciter alors son inverse.

Solution :

1. Un calcul immédiat donne : ${}^tX.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle X, Y\rangle$

et :
$$X.{}^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

2. La matrice $B = X\,{}^tY$ est de rang 1 (toutes ses colonnes sont proportionnelles à la première colonne X). Ainsi $\dim \operatorname{Ker} B = n - 1$ et 0 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension $(n-1)$.
De plus $\operatorname{Im} B = \operatorname{Vect}(X)$, et : $BX = X\,{}^tYX = \langle X, Y\rangle X$.
Notons qu'un vecteur propre de B associé à une éventuelle valeur propre non nulle est nécessairement un vecteur de l'image de B.
Ainsi, si $\langle X, Y\rangle \neq 0$, on obtient une base de vecteurs propres de B en complétant une base de $\operatorname{Ker} B$ par X et B est diagonalisable, les valeurs propres étant 0 et $\langle X, Y\rangle$.
En revanche, si $\langle X, Y\rangle = 0$, 0 est l'unique valeur propre de B et B n'est pas diagonalisable.

B est diagonalisable si et seulement si $\langle X, Y\rangle \neq 0$.

3. Si M est une matrice de rang 1, toutes ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ sont proportionnelles à une même colonne X, soit $C_i = y_i X$. On a alors

$$M = X\,{}^tY, \text{ avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas unicité, puisque si (X, Y) est solution, pour tout $\alpha \neq 0$, $(\alpha X, Y/\alpha)$ est également solution.

4. On a immédiatement $A = I + B$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et $1 + \langle X, Y\rangle$, et A est inversible et seulement si $\langle X, Y\rangle + 1 \neq 0$ (car dans ce cas 0 n'est pas valeur propre de A).

On a $B^2 = \langle X,Y\rangle B$, donc $(A-I)^2 = \langle X,Y\rangle (A-I)$, d'où :

$$A^2 - (\langle X,Y\rangle + 2)A = -(\langle X,Y\rangle + 1)I$$

et
$$\boxed{A^{-1} = \frac{(\langle X,Y\rangle + 2)I - A}{\langle X,Y\rangle + 1}}$$

Exercice 4.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, on dit que la suite (A_n) converge si les quatre suites réelles (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) sont convergentes. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n & \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n & \lim\limits_{n\to\infty} d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

est alors appelée limite de la suite (A_n).

Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose pour tout n entier naturel :

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} M^k = I_2 + M + \cdots + M^n$$

où I_2 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui converge vers A et P une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la suite (PA_n) converge vers PA. Que peut-on dire de la suite (A_nP) ?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer, pour n entier naturel, $S_n(P^{-1}AP)$ en fonction de $S_n(A)$ et de P.

b) En déduire que la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge si et seulement si la suite $\big(S_n(P^{-1}AP)\big)$ converge.

3. Soit u un endomorphisme non diagonalisable de $\mathbb{R}^2$ admettant une valeur propre a.

a) Préciser l'ensemble des valeurs propres de u et la dimension de l'espace propre de u associé à la valeur propre a.

b) Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre a et e_2 un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $B = (e_1, e_2)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$. Justifier l'existence d'un tel vecteur e_2 et montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^*$ tel que la matrice de u dans la base B soit égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer alors la matrice de u dans la base $C = (be_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

4. Soit a un réel et T la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n.

b) En déduire que la suite $\big(S_n(T)\big)$ est convergente si et seulement si $a \in]-1,1[$ et calculer alors la limite de cette suite.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant au moins une valeur propre réelle.

a) Montrer que $\big(S_n(A)\big)$ est convergente si et seulement si les valeurs propres de A appartiennent toutes à $]-1,1[$.

b) Calculer, pour n entier naturel, $(I_2 - A)S_n(A)$ et en déduire que, lorsque la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge, sa limite est égale à l'inverse de la matrice $I_2 - A$.

Solution :

1. Soit $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Alors : $PA_n = \begin{pmatrix} pa_n + qc_n & pb_n + qd_n \\ ra_n + sc_n & rb_n + sd_n \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{pmatrix} = PA.$
On montre de même que (A_nP) converge vers AP.

2. a) Pour tout entier k, $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ et donc :
$$S_n(P^{-1}AP) = P^{-1}S_n(A)P.$$

b) $\star$ Si la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge vers $S(A)$, alors $\big(P^{-1}S_n(A)P\big)$ converge vers $P^{-1}S(A)P$.
$\star$ On obtient l'implication réciproque en remarquant que si $A' = P^{-1}AP$, alors on a : $A = P'^{-1}A'P'$, avec $P' = P^{-1}$.

3. a) Comme u n'est pas diagonalisable, a est sa seule valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

b) e_1 est propre, donc non nul et (e_1) est une famille libre, que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.La matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, mais le fait que u ait a pour unique valeur propre impose $c = a$ et le fait que u ne soit pas diagonalisable impose $b \neq 0$. Donc $\mathcal{C} = (be_1, e_2)$ est encore une base et $M_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

4. Par récurrence, ou par la formule du binôme : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

b) Ainsi $S_n(T) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^n a^k & \sum\limits_{k=1}^n ka^{k-1} \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^n a^k \end{pmatrix}$ et $\big(S_n(T)\big)$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$ et on a alors :
$$\lim_{n\to\infty} S_n(T) = \begin{pmatrix} (1-a)^{-1} & (1-a)^{-2} \\ 0 & (1-a)^{-1} \end{pmatrix}$$

5. a) Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $c = 0$ si A est diagonalisable et $c = 1$ si $a = b$ et A non diagonalisable.

Notons que a et b sont les valeurs propres de A et que $\big(S_n(A)\big)$ converge si et seulement si $\big(S_n(T)\big)$ converge.

Si $c = 0$, $S_n(T) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} a^k & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} a^k \end{pmatrix}$

Si $c = 1$, $a = b$ et le calcul a été fait en 4. b).

Dans tout les cas $\big(S_n(A)\big)$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$ et $-1 < b < 1$.

b) Facilement, par télescopage : $(I_2 - A)S_n(A) = I_2 - A^{n+1}$.

Si la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge, alors $A^{n+1} = S_{n+1}(A) - S_n(A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et :

$(I_2 - A)S(A) = \lim\limits_{n\to\infty} [(I_2 - A)S_n(A)] = I_2$, ce qui prouve que $I_2 - A$ est inversible (on le savait car 1 n'est pas valeur propre de A) et que :

$$S(A) = (I_2 - A)^{-1}$$

Exercice 5.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ.

En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Solution :

1. On remarque que la matrice A (donc l'endomorphisme associé φ) est de rang 2 (les deux premières colonnes sont indépendantes, les autres étant proportionnelles à la seconde).

L'image $\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension 2 ; une base est, par exemple : $(e_1, \sum\limits_{i=1}^{n} e_i)$.

Par le théorème du rang, le noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension $(n-2)$. En utilisant les colonnes de A, la famille $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \ldots, e_2 - e_n)$ forme une base de ce noyau.

2. Ainsi 0 est valeur propre de A, et le sous-espace propre qui lui est associé est $\operatorname{Ker} A$ de dimension $(n-2)$.

Les vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres non nulles sont dans $\operatorname{Im}\varphi$ (puisque $\varphi(x) = \lambda x, \lambda \neq 0$).

Soit (e_1, v), avec $v = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ la base de $\operatorname{Im}\varphi$ précédemment déterminée, et ψ l'endomorphisme de $\operatorname{Im}\varphi$ induit par φ.

On a $\psi(e_1) = v, \psi(v) = v + (n-1)e_1$. Donc $M = M_{(e_1,v)}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de ψ sont $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$ et on peut prendre pour vecteurs propres associés $(\lambda_i - 1)e_1 + v$.

Ces valeurs propres et ces vecteurs propres sont les éléments propres de φ manquants.

La matrice A est donc diagonalisable, ce que l'on savait depuis le début de l'exercice, puisqu'elle est symétrique réelle.

Exercice 6.

1. Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$.
Soit f un endomorphisme symétrique de E.
On note α la plus petite valeur propre réelle de f et ω la plus grande valeur propre réelle de f.

1. a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\alpha\,\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant \omega\,\|x\|^2$.

b) Existe-t-il un vecteur non nul x de E qui vérifie $\big\langle x, f(x)\big\rangle = \omega\,\|x\|^2$?
Est-il vrai que si r est un réel tel que, pour tout $x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle \leqslant r\,\|x\|^2$, alors $r \geqslant \omega$?

Répondre aux questions analogues concernant α.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de réels,

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i + x_{i+1})^2 + x_n^2$$

et

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

3. Soient un entier $n \geqslant 2$ et un réel k.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & k & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note α la plus petite valeur propre de A et ω la plus grande valeur propre de A.

a) Montrer que $k-2 \leqslant \alpha$ et que $\omega \leqslant k+2$.

b) Montrer ensuite que $\alpha \leqslant k-1$ et que $\omega \geqslant k+1$.

On cherchera une colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tXAX \leqslant (k-1)\,{}^tXX$ et une colonne non nulle $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\ R)$ telle que ${}^tYAY \geqslant (k+1)\,{}^tYY$.

Solution :

1. a) Comme f est un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ et $\langle x, f(x)\rangle = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i$.

Ainsi : $\alpha ||x||^2 = \alpha \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i \leqslant \omega \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = \omega ||x||^2$, soit :

$$\alpha ||x||^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant \omega ||x||^2$$

b) Si x est un vecteur propre associé à la valeur propre ω, on a :

$$\langle x, f(x)\rangle = \langle x, \omega x\rangle = \omega ||x||^2$$

La réponse est «oui», car si cela est vrai pour tout vecteur x, cela est vrai en particulier pour un vecteur propre x associé à ω et on a alors $\omega ||x||^2 \leqslant r ||x||^2$, *i.e.* $r \geqslant \omega$.

De même, si x est propre pour la valeur propre α, alors $\langle x, f(x)\rangle = \langle x, \alpha x\rangle = \alpha ||x||^2$ et si, pour tout x, $\langle x, f(x)\rangle \geqslant r ||x||^2$, alors $r \leqslant \alpha$.

2. Il suffit de développer les seconds membres et on retrouve bien les premiers membres.

3. a) $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, A traduit un endomorphisme symétrique u. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, en notant X la matrice colonne associée au vecteur x, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, u(x)\rangle &= {}^tXAX = k \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\\ &= (k-2) \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 + x_n^2 \geqslant (k-2) \sum_{i=1}^n x_i^2.\end{aligned}$$

On en conclut donc que $\alpha \geqslant k-2$ (cf. 1. b)).

De même :

$$\begin{aligned}\langle x, u(x)\rangle &= k \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\\ &= (k+2) \sum_{i=1}^n x_i^2 - (x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2 + x_n^2) \leqslant (k+2) \sum_{i=1}^n x_i^2.\end{aligned}$$

On en conclut donc que $\omega \leqslant k+2$ (cf. 1. b)).

b) $\star$ Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, on a ${}^tXAX = 2k-2$ et ${}^tXX = 2$. Ainsi, si x est le vecteur associé à X, on a $\langle x, u(x)\rangle = (k-1)\|x\|^2$, ce qui prouve que $\alpha \leqslant k-1$.

De même la considération de la colonne $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et du vecteur y associé donne $\langle y, u(y)\rangle = (k+1)\|y\|^2$, ce qui prouve que $\omega \geqslant k+1$.

Exercice 7.

Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un espace vectoriel euclidien E muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par les familles $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ de E.
On suppose de plus que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle$ et on pose pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $z_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle e_i$, où la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
1. Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Montrer l'équivalence des deux assertions :
  i) la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée.
  ii) la famille $(z_1,\dots,z_p)$ est liée.
2. En déduire que $\dim F = \dim G$.

Solution :

1. *i*) $\Rightarrow$ *ii*). S'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ réels non tous nuls tels que $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j x_j = 0$, par bilinéarité du produit scalaire, on a :
$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j z_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j\rangle e_i = 0$$
et la famille $(z_1,\dots,z_p)$ est liée.

ii) $\Rightarrow$ *i*). Sil existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ réels non tous nuls tels que $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j z_j = 0$, alors :
$$0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j\rangle e_i$$
Donc, par liberté de $(e_1,\dots,e_n)$: $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \langle x_i, \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j x_j\rangle = 0$, d'où :

$\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j\rangle = 0$ et $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i = 0$: la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée.

2. Une famille est libre si et seulement si elle n'est pas liée.
On vient donc de démontrer, à la numérotation des vecteurs près, qu'une sous-famille de $(x_1,\dots,x_n)$ est libre si et seulement si la sous-famille correspondante de $(z_1,\dots,z_n)$ est libre et donc si et seulement si la sous-famille correspondante de $(y_1,\dots,y_n)$ l'est également, puisque $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, \langle x_i,x_j\rangle = \langle y_i,y_j\rangle$ et donc les calculs sont les mêmes avec la famille $(y_1,\dots,y_n)$.
Ainsi les familles $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ ont le même rang et $\dim F = \dim G$.

Exercice 8.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ donné et $P(X) = (X-\lambda)^k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que P est divisible par son polynôme dérivé P'.

b) Réciproquement, soit $P \in E$ divisible par son polynôme dérivé P'. Déterminer la forme de P.

2. Soit u l'application définie sur E par, pour tout $P \in E$:
$$u(P)(X) = (X^2+1)P'(X) - nXP(X)$$

a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution :

1. a) On a : $P' = k(X-\lambda)^{k-1}$ et P est divisible par P', le quotient étant $\dfrac{1}{k}(X-\lambda)$.

b) Si P est divisible par P', le quotient Q est du premier degré et $P = QP'$.
$\star$ Si $\deg P = 1$, alors P' est un polynôme constant et on a bien P' qui divise P.
$\star$ Supposons donc $n = \deg P \geqslant 2$, d'où $\deg P' = n-1 \geqslant 1$, et soient $z_1, z_2, \dots, z_k$ les racines de P' d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \dots \alpha_k$.
Comme P' est un facteur de P, les nombres $z_1, z_2, \dots, z_k$ sont encore racines de P, donc d'ordres de multiplicité $\alpha_1+1, \dots \alpha_k+1$.
Par conséquent $(\alpha_1+1)+\cdots+(\alpha_k+1) = \alpha_1+\cdots+\alpha_k+k \leqslant n$, alors que $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = n-1$. On en déduit $k \leqslant 1$ et comme $k \geqslant 1$, on a $k=1$ et $\alpha_1 = n-1$.

Ainsi P admet une unique racine à l'ordre n et est de la forme $\beta(X-\lambda)^n$.

2. a) La linéarité de u est évidente et pour $k \leqslant n$:

$$u(X^k) = (X^2+1)kX^{k-1} - nX^{k+1} = (k-n)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

$\star$ Si $k < n$, $u(X^k)$ est de degré $k+1$, donc appartient à E ;
$\star$ si $k = n$, $u(X^n) = nX^{n-1} \in E$.
Ainsi, par linéarité, l'image par u de tout élément de E est encore un élément de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons d'ailleurs que si $\deg P < n$, alors $\deg u(P) = \deg P + 1$ et donc les éventuels polynômes propres sont de degré exactement n.

b) Soit λ une valeur propre (donc a priori complexe) de u et P un polynôme propre associé. On a :

$$u(P) = \lambda P, \text{ i.e. } (X^2+1)P'(X) = (nX+\lambda)P(X) \quad (*)$$

$\star$ Si $nX+\lambda$ divise X^2+1, alors $\lambda = ni$ ou $\lambda = -ni$.

• Si $\lambda = -ni$, il reste $(X+i)P'(X) = nP(X)$, P' divise P et d'après la première question P est de degré n et admet $-i$ pour unique racine (car $-i$ est racine de P !) :

$$-ni \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{(-ni)}(u) = \operatorname{Vect}((X+i)^n)$$

• De la même façon :

$$ni \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{(ni)}(u) = \operatorname{Vect}((X-i)^n)$$

$\star$ Si $nX+\lambda$ ne divise pas X^2+1, alors $(*)$ montre que i et $-i$ sont racines de P et P est divisible par X^2+1. Désignons alors par k, avec $1 \leqslant k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ le plus grand entier tel que $(X^2+1)^k$ divise P :

$$P(X) = (X^2+1)^k Q(X), \text{ avec } Q(i) \neq 0 \text{ ou } Q(-i) \neq 0$$

La relation $(*)$ devient : $(X^2+1)Q'(X) = [(n-2k)X+\lambda]Q(X)$.

• Si $Q(i) \neq 0$ alors $\lambda = -(n-2k)i$ et $(X+i)Q'(X) = (n-2k)Q(X)$. On déduit alors de la première question que $-i$ est l'unique racine de Q, cette racine étant d'ordre $n-2k$:

$$-(n-2k)i \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{(-(n-2k)i)}(u) = \operatorname{Vect}((X^2+1)^k(X+i)^{n-2k})$$

• Si $Q(-i) \neq 0$, on obtient de même :

$$(n-2k)i \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{((n-2k)i)}(u) = \operatorname{Vect}((X^2+1)^k(X-i)^{n-2k})$$

c) Finalement les valeurs propres de u sont $-ni, -(n-2)i, \ldots, (n-2)i, ni$, donc sont au nombre de $n+1$. Comme E est de dimension $n+1$, on en déduit que u est diagonalisable.

Exercice 9.

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme euclidienne de x.
Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.

b) Montrer que $[\mathrm{Im}(A)]^\perp \subset \mathrm{Ker}({}^tA)$.

c) En déduire que $\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.

2. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le noyau de ${}^tA$.

b) Montrer que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme : $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.
On pose alors $x'' = u(x)$. Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Déterminer la matrice B associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

c) Montrer que AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A.

d) Calculer BA. Que constatez-vous ?

3. Reprendre la construction et les calculs précédents pour une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Solution :

1. Notons par une même lettre un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et la matrice colonne canoniquement associée.

a) Soit $y \in \mathrm{Im}\, A$, il existe $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $y = Ax$. Si u est un vecteur quelconque de $\mathrm{Ker}\,{}^tA$ on a : $\langle y, u\rangle = \langle Ax, u\rangle = {}^t(Ax)u = {}^tx{}^tAu = \langle x, {}^tAu\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$. Donc $y \in [\mathrm{Ker}\,{}^tA]^\perp$ et :

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) \subset [\mathrm{Ker}({}^tA)]^{\perp}}$$

b) Soit $x \in [\mathrm{Im}\, A]^{\perp}$, on a pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^p$: $\langle x, Ay\rangle = 0$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^p, \langle {}^tAx, y\rangle = 0$ et ${}^tAy$ est orthogonal à $\mathbb{R}^p$ et est donc le vecteur nul, *i.e.* $y \in \mathrm{Ker}({}^tA)$:

$$\boxed{[\mathrm{Im}(A)]^{\perp} \subset \mathrm{Ker}({}^tA)}$$

c) Le résultat b) donne, par passage à l'orthogonal : $[\mathrm{Ker}({}^tA)]^{\perp} \subset \mathrm{Im}(A)$ et grce à a) :

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}({}^tA)]^{\perp}}$$

2. a) ${}^tA$ est clairement de rang $p-1$, donc son noyau est de dimension 1. La première colonne de ${}^tA$ étant nulle, son noyau est la droite engendrée par le premier vecteur de la base canonique $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$. Son image est engendrée par les vecteurs colonnes de ${}^tA$, donc en fait par $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$.

b) Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i$. Pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a : $Ae_i = \dfrac{1}{i}\, e_{i+1}$ et donc :

$$x = x_1 e_1 + \sum_{i=2}^{p} x_i e_i = x_1 e_1 + A\big(\sum_{i=1}^{p-1} i x_{i+1} e_i\big)$$

On a bien $x' = x_1 e_1 \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' = \sum\limits_{i=1}^{p-1} i x_{i+1} e_i \in \mathrm{Im}({}^tA)$.

L'application $x \mapsto x''$ est clairement linéaire et :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & p-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AB = \mathrm{diag}(0, 1, \ldots, 1)$, qui est bien la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_p)$.

d) De même $BA = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0)$ qui est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1}) = \mathrm{Im}({}^tA) = (\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$.

3. Si A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
D'après 1. on a $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}({}^tA) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^p$. On peut écrire $x = x' + Ay$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $y \in \mathbb{R}^p$.
Le vecteur y s'écrit $y = u + x''$, avec $u \in \mathrm{Ker}\, A$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.
On obtient donc $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.
Si $x = x' + Ax'' = x'_1 + Ax''_1$ sont deux telles décompositions, on a :

$$x'_1 - x' = A(x'' - x''_1)$$

D'où $x_1' - x_1 = 0$, car $\mathrm{Ker}({}^tA)$ et $\mathrm{Im}\,A$ sont supplémentaires, donc d'intersection réduite au vecteur nul.
Ainsi $x'' - x_1'' \in \mathrm{Ker}\,A$ et comme ce vecteur appartient aussi à $\mathrm{Im}({}^tA) = [\mathrm{Ker}\,A]^{\perp}$, il s'agit du vecteur nul.
Finalement la décomposition est bien unique et u est bien une application.
La linéarité de u est évidente.

Par construction : $ABx = AB(x' + Ax'') = Ax'' = p_{\mathrm{Im}\,A}(x)$, donc $AB = P_{\mathrm{Im}\,A}$.
D'autre part, $x = y' + y''$, avec $y' \in \mathrm{Ker}\,A$ et $y'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$. On en tire :
$BAx = BAy'' = y'' = p_{\mathrm{Im}({}^tA)}(x)$, soit $BA = P_{\mathrm{Im}\,{}^tA}$.

Exercice 10.

Soit E l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant :

$$P(X)P(X+1) = -P(X^2) \qquad (*)$$

1. Trouver les polynômes constants vérifiant la relation $(*)$.

2. On suppose désormais que $P \in E$ a un degré supérieur ou égal à 1.

a) Soit α une racine (éventuellement complexe) de P. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \alpha^{2^p}$ est également racine de P. Que peut-on conclure sur le module de α ?

b) Montrer que si α est racine de P, alors $(\alpha - 1)^2$ est également racine de P.

c) Quelles sont les racines possibles de P ?

d) Montrer que P est de la forme $P(X) = -X^n(X-1)^n$, avec $n \geqslant 1$.

3. a) Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) La famille des polynômes $\big([X^n(X-1)^n]^{(n)}\big)_{n \geqslant 1}$ est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

(On rappelle que $S^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme S)

Solution :

1. Si P est un polynôme constant C la relation $(*)$ est équivalente à $C^2 + C = 0$, soit $C = 0$ ou $C = -1$.

2. a) Supposons que $P(\alpha) = 0$. La relation $(*)$ entraîne alors que $P(\alpha^2) = 0$, donc en itérant ce processus, $P(\alpha^4) = 0$, et par une récurrence immédiate $P(\alpha^{2^p}) = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$. En effet, P admettant un nombre fini de racines distinctes, il existe $p > q$ tels que $\alpha^{2^p} = \alpha^{2^q}$ soit $\alpha = 0$ ou $\alpha^{2^p - 2^q} = 1$, ce qui entraîne $|\alpha| = 1$.

b) Utilisons la relation $(*)$ avec $0 = P(\alpha - 1)P(\alpha) + P((\alpha - 1)^2)$, ce qui entraîne que $(\alpha - 1)^2$ est racine de P. En appliquant la question 2.a, il vient $\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$

En conclusion, si $P(\alpha) = 0$, alors :

$$\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} |\alpha| = 1 \\ \text{et} \\ |\alpha - 1| = 1 \end{array} \right.$$

c) La troisième condition se réécrit $|e^{it} - 1| = 1$, avec $t \in [0, 2\pi[$. Or :

$$e^{it} - 1 = e^{it/2}(2i \sin \frac{t}{2}) \text{ et donc } |e^{it} - 1| = 2 \sin \frac{t}{2}$$

et :

$$|e^{it} - 1| = 1 \implies \sin(t/2) = 1/2, \text{ soit } t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Par suite $\alpha = -j$ ou $\alpha = -j^2$.

L'ensemble des racines **possibles** de P est donc $S = \{0, 1, -j, -j^2\}$. Or si $-j$ est racine, $(-j)^2 = j^2$ également, ce qui n'est pas le cas. De même avec $-j^2$. Ainsi :

$$S \subset \{0, 1\}$$

d) Ainsi, P est de la forme $P(X) = \lambda X^p (X - 1)^q$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $p, q \in \mathbb{N}$. Écrivons alors la relation $(*)$ pour un tel polynôme :

$$\lambda^2 X^p (X - 1)^q (X + 1)^p X^q + \lambda X^{2p} (X^2 - 1)^q = 0$$

ou :

$$X^p (X - 1)^q \left[\lambda (X + 1)^p X^q + X^p (X + 1)^q\right] = 0$$

donc :

$$\lambda (X + 1)^p X^q + X^p (X + 1)^q = 0$$

Comme les termes de degré $(p+q)$ doivent se simplifier, il vient $\lambda = -1$, puis en substituant à X la valeur 1 : $2^q = 2^p$, soit $p = q$.

Réciproquement les polynômes de la forme $-X^n(X - 1)^n$ sont solutions de $(*)$.

3. a) C'est quasiment une question de cours.

b) Soit pour tout $n \geqslant 1$, $P_n(X) = X^n (X-1)^n$. C'est un polynôme de degré $2n$, et $0, 1$ sont des racines de multiplicité n.

Soit $n > m$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_n^{(n)}(t) P_m^{(m)}(t)\, dt &= \left[P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m+1)}(t)\, dt \\ &= -\int_0^1 P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m+1)}(t)\, dt\end{aligned}$$

car 0 et 1 sont des racines de $P_n^{(n-1)}(t)$. En recommençant ce processus n fois, on obtient :

$\displaystyle\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_m^{(m)}(t)\,dt = (-1)^n\int_0^1 P_n(t)P_m^{(m+n)}(t)\,dt = 0$, puisque $P_m^{(m+n)}$ est le polynôme nul.

La famille donnée est donc orthogonale pour ce produit scalaire. Par contre elle n'est pas orthonormée, car :

$$\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n(2n)!\int_0^1 t^n(t-1)^n\,dt$$

Notons $I(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^p(t-1)^q\,dt$. Une intégration par parties donne :

$$I(p,q)=\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(t-1)^{q-1}\,dt=-\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$$

Donc :

$$I(p,q)=(-1)^q\frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\cdots\times\frac{1}{p+q}I(p+q,0)=(-1)^q\frac{q!p!}{(p+q+1)!}$$

Donc :

$$\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_n^{(n)}(t)\,dt=(2n)!\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{(n!)^2}{2n+1}\neq 1$$

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f,g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)})=\mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)$$

($g_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ désignant la restriction de g à l'image de f).

2. En déduire :

a) $\mathrm{rg}(g\circ f)=\mathrm{rg}(f)-\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)\big)$.

b) $\mathrm{rg}(g\circ f)\geqslant\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)-\dim(E)$.

($\mathrm{rg}(u)$ désignant le rang d'un endomorphisme u de E).

Solution :

1. On a :

$x\in\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}\,f})\iff x\in\mathrm{Im}\,f$ et $g_{|\,\mathrm{Im}\,f}=0\iff x\in\mathrm{Im}\,f$ et $g(x)=0$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)})=\mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)}$$

2. a) On a : $\mathrm{rg}(g\circ f)=\dim[g(f(E))]=\dim(\mathrm{Im}(g_{|\,\mathrm{Im}\,f})=\mathrm{rg}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)})$.

Par le théorème du rang, appliqué à $g_{|\,\mathrm{Im}(f)}$, il vient :

$$\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}\, f - \dim(\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)})) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f))}$$

b) Comme $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}\, g$ on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, g) = \dim E - \mathrm{rg}(g)$$

ce qui donne, en remplaçant, le résultat demandé :

$$\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(E)}$$

Exercice 12.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. A tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction :

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t)dt$$

1. a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$P(b) = \sum_{k=0}^{+\infty} (b-a)^k \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction polynôme dérivée P'.

2. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on explicitera, telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n(P)$$

(D^n désignant l'itéré $n^{\text{ème}}$ de D, *i.e.* $D^0 = Id, D^2 = D \circ D, \ldots$).

Déterminer la valeur des (a_n) en fonction de n et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$.

3. Quels sont les éléments propres de φ ?

Solution :

1. a) La série se trouvant dans le membre de droite de l'égalité est en fait une somme finie, puisque si p est le degré de P, alors pour tout $k \geqslant p+1$, $P^{(k)}(a) = 0$.

La formule demandée n'est en fait rien d'autre que la formule de Taylor pour les polynômes, formule qui est exacte, si son ordre est suffisamment grand.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t)\, dt$ existe pour tout x réel. En effet, l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t) = 0$ entraîne la convergence de l'intégrale.

En utilisant la question précédente, il vient :

$$\varphi(P)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k P^{(k)}(x)}{k!}\, dt$$

et comme la somme est finie :

$$\varphi(P)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \frac{t^k}{k!}\, dt$$

ce qui montre que $\varphi(P)$ est un polynôme.

La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

2. Par la question précédente, pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^n\, dt$$

On remarque que $a_{2n+1} = 0$, par imparité de la fonction à intégrer. Quant à a_{2n}, il suffit d'utiliser une intégration par parties (à justifier avec soin !) pour obtenir pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n} n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

3. Soit λ une valeur propre de φ ; il existe un polynôme P non nul de degré $p \geqslant 0$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$, qui se réécrit :

$$\sum_{n=0}^{p} a_n D^n(P) = \lambda P$$

Or pour tout n tel que $0 \leqslant n \leqslant p$, $\deg D^n(P) = p - n$ et $a_0 \neq 0$. Donc seul $D^0(P) = P$ est de degré p, les autres étant de degré strictement inférieur. Ainsi $\lambda = a_0$.

L'équation $\varphi(P) = \lambda P$ se réécrit :

$$\sum_{k=1}^{p} a_k P^{(k)}(x) = 0$$

Or la famille $\big(P'(x), \ldots, P^{(p)}(x)\big)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre et pour tout $k \geqslant 1, a_k = 0$, ce qui n'est pas vérifié.

La seule possibilité est que la sommation précédente n'existe pas, donc que le degré p de P soit nul, donc que P soit un polynôme constant.

Réciproquement tout polynôme constant est associé à la valeur propre a_0.

Exercice 13.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Montrer que
$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ ax+by+cz=0\}$$
est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (appelé aussi plan vectoriel) de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient P d'équation $ax+by+cz=0$ et Q d'équation $ux+vy+wz=0$ deux tels plans.
Montrer que $P=Q$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(u,v,w) = \lambda(a,b,c)$.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

4. Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est dit stable par f si $f(F) \subset F$.
Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Solution :

1. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\varphi(x,y,z) = ax+by+cz$.
C'est une application linéaire non nulle (car $(a,b,c) \neq (0,0,0)$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc φ est de rang 1, et, par le théorème du rang, $P = \operatorname{Ker}\varphi$ est bien un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

2. Si $(u,v,w) = \lambda(a,b,c)$, alors $ax+by+cz=0 \Longleftrightarrow ux+vy+wz=0$ et $P=Q$.
Réciproquement supposons que l'on ait $P=Q$.
Quitte à changer les noms des coordonnées, on peut supposer que $a \neq 0$. Alors
$$ax+by+cz=0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a}\,y - \frac{c}{a}\,z \Longleftrightarrow (x,y,z) = y(-\frac{b}{a},1,0)+z(-\frac{c}{a},0,1)$$
Les vecteurs $(-\frac{b}{a},1,0)$ et $(-\frac{c}{a},0,1)$, ou mieux $(b,-a,0)$ et $(c,0,-a)$ forment une base de P.
Si $P=Q$, ces vecteurs appartiennent aussi à Q et :
$$\begin{cases} ub-av=0 \\ uc-aw=0 \end{cases}, \text{ soit : } (u,v,w) = \frac{u}{a}\,(a,b,c).$$

3. La méthode du pivot de Gauss montre que les valeurs propres de A sont -1 et 3. La résolution des systèmes $AX = \lambda X$ donne ensuite :
$$E_{(-1)}(f) = \operatorname{Vect}(1,-1,0) \text{ et } E_{(3)}(f) = \operatorname{Vect}(1,1,0)$$

4. $\star$ Trivialement, $\{0\}$ est le seul sous-espace stable de dimension 0, et $\mathbb{R}^3$ est le seul sous-espace stable de dimension 3.

$\star$ Soit D une droite et v un vecteur directeur de D.
On a : $f(D) \subset D \Longleftrightarrow f(v) \in D \Longleftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, f(v) = \lambda v$.
Ainsi une droite est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f. Il existe donc deux droites stables par f : $E_{(-1)}(f) = \operatorname{Vect}(1,-1,0)$ et $E_{(3)}(f) = \operatorname{Vect}(1,1,0)$.

$\star$ Soit P un plan stable, $ax+by+cz=0$ une équation de P.

$(x,y,z)\in P \implies f(x,y,z)\in P$ s'écrit :

$$ax+by+cz=0 \implies (a+2b)x+(2a+b)y+(a+b+3c)z=0$$

On a $(a+2b, 2a+b, a+b+3c)\neq(0,0,0)$ et on peut appliquer les résultats de la question 2. Il existe donc $\lambda\neq 0$ tel que :

$$\begin{cases} a+2b=\lambda a \\ 2a+b=\lambda b \\ a+b+3c=\lambda c \end{cases}$$

ce qui se réécrit : ${}^tA\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$. Un calcul immédiat montre que ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que A et que ${}^tA$ admet deux droites propres engendrées respectivement par :

$$\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

Ainsi A admet deux plans stables d'équation $z=0$ et $x-y=0$.

Exercice 14.

Dans cet exercice on confondra polynôme et fonction polynôme associée.

Soit u l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe $u(P)$ défini par :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ u(P)(x)=\mathrm{e}^x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}P(t)\,dt$$

1. Montrer que $u(P)$ est bien défini. Calculer $u(X^k)$, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.

b) Soit v l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall\, P\in\mathbb{R}_n[X], v(P)=u(P)$

Montrer que v réalise un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelle est la matrice A associée à v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

3. Déterminer A^{-1}, l'inverse de A.

4. Si P est un polynôme tel que pour tout $x\in\mathbb{R}, P(x)\geqslant 0$, montrer que, pour tout x réel :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}P^{(k)}(x)\geqslant 0$$

Solution :

1. Soit P un polynôme de degré p.
L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}P(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$; de plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2.\mathrm{e}^{-t}P(t) = 0$ entraîne la convergence de l'intégrale définissant $u(P)(x)$.
La linéarité de P découle de la linéarité de l'intégrale.
Il est évident que $u(1) = 1$.
Soit $n \geqslant 1$. Une intégration par parties (d'abord sur un segment, suivie d'un passage à la limite) donne :

$$u(X^n) = X^n + nu(X^{n-1})$$

Ainsi, par récurrence :

$$u(X^n) = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \cdots + n!$$

Ceci montre que $u(P)$ est une fonction polynomiale, quel que soit le polynôme P.

2. a) La stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ a été démontrée dans la question précédente, puisque pour tout $n \geqslant 0$, $u(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) Nous venons de montrer que v est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Toujours par la question 1. la famille $\big(u(1), u(X), \ldots, u(X^n)\big)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui montre que v est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
La matrice A est triangulaire supérieure de la forme $A = (a_{i,j})$, avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{j!}{i!} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

La diagonale de A n'est formée que de 1. La seule valeur propre de A est donc 1.
Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 1 sur la diagonale *i.e.* la matrice identité ; elle serait donc égale à l'identité, ce qu'elle n'est pas.

3. Comme, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $u(X^k) = X^k + ku(X^{k-1})$, on a :

$$v^{-1}(X^k) = X^k - kX^{k-1}$$

ce qui entraîne que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$v^{-1}(P) = P - P'$$

On en déduit facilement la matrice A^{-1}, également triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux valant 1, la diagonale étant bordée d'une sur-diagonale formée des nombres $-1, -2, \ldots, -n$.

4. Posons $Q(X) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} P^{(k)}(x)$. On remarque qu'en fait cette somme est finie, ce qui montre l'existence du polynôme Q. On vérifie alors que $Q - Q' = P$,

donc que $P = v^{-1}(Q)$ ou $Q = v(P)$, ce qui donne, par la définition de u et la positivité de P, le résultat escompté.

Exercice 15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_{n^2}[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à n^2) tel que $P(A) = 0_n$.

2. On suppose $P(0) \neq 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et des coefficients de P.

3. On suppose que 0 est racine d'ordre k de P : il existe alors un polynôme Q tel que $Q(0) \neq 0$ et $P(X) = X^k Q(X)$.

Montrer que A est inversible si et seulement si $Q(A) = 0_n$.

Solution :

1. La famille $(I, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est une famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de cardinal n^2+1. C'est donc une famille liée et il existe une combinaison non triviale de ces matrices donnant 0_n, donc un polynôme P de degré inférieur ou égal à n^2 tel que $P(A) = 0_n$

2. Dire que $P(0) \neq 0$ signifie que dans la combinaison linéaire précédente le coefficient a_0 de I n'est pas nul, soit :

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0_n, \text{ avec } a_0 \neq 0$$

donc :

$$I = -\frac{1}{a_0}(a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2}) = -\frac{1}{a_0}(a_1 I + a_2 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2-1})A$$

On sait alors qu'il est inutile de vérifier l'inversibilité de l'autre côté et A est inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 I + a_2 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2-1})}$$

3. On a : $A^k Q(A) = 0_n$, avec $Q(0) \neq 0$.

- si A est inversible, alors $Q(A) = 0_n$ (on multiplie k fois à gauche par A^{-1}).
- si $Q(A) = 0_n$, on est revenu à la situation de la question 2 et A est inversible.

Exercice 16.

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension 4. On note 0 l'endomorphisme nul de E et I l'application identité de E.
On considère un endomorphisme u de E tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On pose $E_1 = \operatorname{Ker}(u^2 + u + I)$ et $E_2 = \operatorname{Ker} u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset E_1$ et que E_1 et E_2 sont stables par u.

2. Montrer que :

a) $E_1 \oplus E_2 = E$.

b) $E_1 = \operatorname{Im} u$.

c) $E_2 = \operatorname{Im}(u^2 + u + I)$.

3. a) Montrer que, pour tout vecteur non nul x de E_1, la famille $\big(x, u(x)\big)$ est libre.

b) Montrer que s'il existe deux vecteurs x et y de E_1 tels que la famille $\big(x, u(x), y\big)$ soit libre, alors la famille $\big(x, u(x), y, u(y)\big)$ est libre.

c) Quelles sont les dimensions possibles de E_1 ?

Solution :

On sait que pour tout $x \in E$:

$$(\star) \qquad (u^3 + u^2 + u)(x) = u\big((u^2 + u + Id)(x)\big) = (u^2 + u + Id)\big(u(x)\big) = 0$$

1. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $(u^2+u+I)\big(u(x)\big) = 0$, soit $y \in E_1$ et $\operatorname{Im} u \subset E_1$.

$\star$ Soit $x \in E_1$, (on a donc $(u^2 + u + Id)(x) = 0$).
Alors $(u^2 + u + I)\big(u(x)\big) = u\big((u^2 + u + Id)(x)\big) = 0$ et $u(x) \in E_1$.

$\star$ Soit $x \in E_2$, (on a $u(x) = 0$). Alors $u\big(u(x)\big) = 0$ et $u(x) \in E_2$.

2. a) Soit $x \in E$. Le vecteur x s'écrit sous la forme

$$\big(x + u(x) + u^2(x)\big) + \big(-u(x) - u^2(x)\big) = y + z.$$

La relation $(\star)$ entraîne que $y \in E_1$ et $z \in E_2$.
Enfin si $x \in E_1 \cap E_2$, alors :

$$u(x) = 0,\ (u^2 + u + Id)(x) \text{ et donc } x = Id(x) = 0$$

La somme précédente est donc directe et

$$\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$$

b) Le sous-espace vectoriel E_2 étant supplémentaire à $E_1 = \operatorname{Ker} u$, sa dimension est celle de $\operatorname{Im} u$. Mais E_1 contient $\operatorname{Im} u$; on a donc $\boxed{E_2 = \operatorname{Im} u}$.

c) La relation $(\star)$ montre que $\operatorname{Im}(u^2+u+I) \subseteq E_2$. On conclut comme dans la question précédente en utilisant les dimensions de ces deux sous-espaces : $\boxed{\operatorname{Im}(u^2 + u + I) = E_2}$.

3. a) Supposons que la famille $\big(x, u(x)\big)$ soit liée. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que λ est valeur propre réelle de u associée au vecteur propre x.
Mais $u^k(x) = \lambda^k x, k \geqslant 2$ entraîne que :

$$0 = (u^3 + u^2 + u)(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$$

Comme $x \neq 0$, il vient $\lambda = 0$ (car $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle). Donc $u(x) = 0$ et $x = (u^2 + u + Id)(x) = 0$. D'où la contradiction et :

$$\boxed{\big(x, u(x)\big) \text{ est libre}}$$

b) Supposons que la famille $\big(x, u(x), y, u(y)\big)$ soit liée. Il existe quatre scalaires a, b, c, d non tous nuls tels que $ax + bu(x) + cy + du(y) = 0$.
Comme $\big(x, u(x), y\big)$ est libre, d est non nul et quitte à diviser par d, on peut supposer $d = -1$, et :
il existe trois réels (a, b, c) non tous nuls tels que $u(y) = ax + bu(x) + c(y)$.
On a alors :

$$u^2(y) = (ac - b)x + (bc - b + a)u(x) + c^2 y$$

et

$$0 = (u^2 + u + Id)(y) = (ac - b + a)x + (bc + a)u(x) + (c^2 + c + 1)y$$

en contradiction avec $\big(x, u(x), y\big)$ libre, puisque $c^2 + c + 1 \neq 0$.

c) Par la question précédente, si $\dim E_1 \geqslant 1$ alors $\dim E_1 \geqslant 2$ et si $\dim E_1 \geqslant 3$ alors $\dim E_1 \geqslant 4$. Les dimensions possibles de E_1 sont donc $\{0, 2, 4\}$.

Exercice 17.

Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser dans une base orthonormée.

b) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

2. Soit F l'application définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F : X \mapsto AX - XB$$

a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit U un vecteur colonne propre de A et V un vecteur colonne propre de B. Calculer $F(U.{}^tV)$.

c) F est–elle un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

d) F est–elle diagonalisable ?

Solution :

1. a) b) On peut évidemment chercher les éléments propres de A et B par la technique habituelle du pivot de Gauss. On peut aussi remarquer que :

$\star$ $A = -I + 2\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = -I + 2J.$

La matrice J vérifie $J^2 = J$, donc est une matrice de projecteur (non dégénéré). Ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre associé le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ et 1, de sous-espace propre associé la droite $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Par conséquent les valeurs propres de A sont -1 et 1, avec :

$$E_{(-1)}(A) = \mathcal{P}\,;\ E_{(1)}(A) = \mathcal{D}$$

$\star$ On a $B^2 = B$, donc B représente aussi un projecteur (non dégénéré) et ses valeurs propres de sont 0 et 1, avec :

$E_{(0)}(B) = \operatorname{Ker} B$ est la droite $\mathcal{D}'$ dirigée par $(1, -2, 1)$;

$E_{(1)}(B)$ est le plan $\mathcal{P}'$ d'équation $x - 2y + z = 0$.

Comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}'$, les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, -2, 1)$ sont propres à la fois pour A et B et on complète avec le vecteur $(1, 0, -1)$ qui appartient à $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ce qui donne une base orthogonale propre à la fois pour A et B.

En normant ces vecteurs, on prend donc : $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

et $\boxed{P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-1, -1, 1)\,;\ P^{-1}BP = \operatorname{diag}(0, 1, 1)}$

2. a) Il est clair que pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F(X) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La linéarité de F résulte de la distributivité du produit sur l'addition.

b) Si $AU = \lambda U$ et $BV = \mu V$, alors $U{}^tV \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^tVB = \mu{}^tV$ (car B est symétrique), d'où :

$$\boxed{F(U{}^tV) = AU{}^tV - U{}^tVB = \lambda U{}^tV - \mu U{}^tV = (\lambda - \mu)U{}^tV}$$

Ainsi cette matrice est vecteur propre de F associée à la valeur propre $\lambda - \mu$.

c) La valeur propre 1 étant commune à A et B, F admet 0 comme valeur propre et n'est donc pas inversible.

d) A et B admettent une base orthonormée commune de vecteurs propres (U_1, U_2, U_3). Par la question précédente, les 9 matrices $U_i{}^tU_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ sont des vecteurs propres de F.

Montrons qu'elles forment une famille libre.

Supposons que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \lambda_{i,j} U_i{}^tU_j = 0$. En multipliant à droite par U_k et en remarquant que la famille est orthonormée (donc ${}^tU_kU_k = \|U_k\|^2 = 1$ et ${}^tU_jU_k = 0$ lorsque $k \neq j$), il vient :

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,k} U_i = 0$$

ce qui entraîne par la liberté de (U_1, U_2, U_3) que $\lambda_{i,k} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, et ceci quel que soit k tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.

La liberté est bien acquise et l'endomorphisme F est donc diagonalisable.

Exercice 18.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contient que des 0 sauf en position (i,j) où se trouve un 1.
On rappelle que les n^2 matrices $E_{i,j}$ forment une base de E. Enfin, on note I la matrice identité.

1. a) Trouver une matrice de E non nulle et non inversible.

b) Trouver une droite de E qui ne contient aucune matrice inversible.

2. Soit j un entier de $\{1, 2, \ldots, n^2 - n\}$. Trouver un sous-espace vectoriel de E de dimension j qui ne contient aucune matrice inversible.

3. a) Calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

b) Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n^2 - 1$. Construire une application linéaire non nulle f de E dans $\mathbb{R}$ telle que $\operatorname{Ker} f = H$.

c) Tout élément $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrivant sous la forme $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} E_{i,j}$, on note, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $X_{i,j}$ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $X_{i,j}(A) = \alpha_{i,j}$.
Soit f une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe n^2 réels $(a_{i,j})$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} X_{i,j}$.

d) Dans cette question seulement, on fait l'hypothèse que $i \neq j$ implique que $a_{i,j} = 0$. Montrer que la matrice $M = E_{n,1} + \sum\limits_{i=2}^{n} E_{i,i-1}$ est élément de H et qu'elle est inversible.

e) Dans le cas où l'hypothèse faite en d) n'est pas vérifiée, montrer que, pour un couple (i,j) à préciser, la matrice $N = I - \dfrac{f(I)}{a_{i,j}} E_{i,j}$ est dans H et que N est inversible.
Qu'en conclure ?

Solution :

1. a) Toute matrice $E_{i,j}$ est non nulle et non inversible puisque de rang 1.

b) Le sous-espace vectoriel engendré par $E_{i,j}$ est une droite. Tout élément de ce sous-espace est de la forme $\lambda E_{i,j}$ (λ réel), et est non inversible.

2. Soit F le sous-espace de E formé des matrices dont la dernière colonne ne comporte que des zéros. Cet espace est engendré par les matrices $E_{i,j}$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Il est de dimension $n(n-1)$ et ne contient aucune matrice inversible.
Pour $j \in [\![1, n^2 - n]\!]$, tout espace engendré par j matrices choisies parmi les matrices précédentes est de dimension j et ne contient *a fortiori* aucune matrice inversible.

3. a) C'est une question de cours : $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, où δ est le symbole de Kronecker, *i.e.* $\delta_{j,k}$ vaut 0 si $j \neq k$ et 1 si $j = k$.

b) Soit $(M_1, M_2, \ldots, M_{n^2-1})$ une base de H, que l'on complète avec un vecteur M_{n^2} pour obtenir une base de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par le théorème fondamental de l'algèbre linéaire il existe une application linéaire f et une seule de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(M_{n^2}) = 1$ et $\forall i \in [\![1, n^2-1]\!], f(M_i) = 0$.
Par construction même H est inclus dans $\operatorname{Ker} f$ et comme f est non nulle, $\operatorname{Ker} f$ n'est pas E tout entier. Donc :

$$\boxed{H = \operatorname{Ker} f}$$

c) $X_{i,j}$ est bien une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (elle associe à toute matrice A, son terme d'indices (i,j)).
On sait que $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = n^2$.
La famille $(X_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une famille de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de cardinal n^2.
C'est une famille libre, car si $\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}X_{i,j} = 0$, alors $\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}X_{i,j}(E_{k,\ell}) = 0$, ce qui se réduit à $\alpha_{k,\ell} = 0$.
C'est donc une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et f se décompose sur cette base.

d) L'application f définie dans la question 3. a) vérifie ici $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}X_{i,i}$.
Donc :

$$f(M) = f(E_{n,1} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i-1}) = 0 + 0 = 0$$

et $M \in H$.
La matrice M est inversible, car elle représente un endomorphisme de permutation ; en effet, si l'on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice associée dans cette base est M, alors :

$$\varphi(e_1) = e_n, \text{ et } \forall i \geqslant 2, \varphi(e_i) = e_{i-1}$$

On montre alors facilement que $\varphi^n = Id$, donc $M^n = I$ et l'inverse de M est M^{n-1}.

e) Choisissons un couple (i,j) tel que $i \neq j$ et $a_{i,j} \neq 0$.
On a alors $f(N) = f(I) - \dfrac{f(I)}{a_{i,j}} f(E_{i,j}) = f(I) - f(I) = 0$ et $N \in H$.
La matrice N est trigonale sans terme diagonal nul, donc est inversible.

En conclusion, tout sous-espace de E de dimension $n^2 - 1$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 19.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul donné.

On se place dans l'espace vectoriel E_n des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto \mathrm{e}^x.P(x)$, où P est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (donc de $\mathbb{R}_n[X]$).

1. Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il est de dimension finie. En donner une base.

2. Soit Δ l'opérateur de dérivation défini sur E_n par, pour tout $f \in E_n$:
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f'(x)$$
où f' désigne la dérivée de f.

Montrer que Δ est un automorphisme de E_n.

3. a) Montrer qu'il existe une unique fonction h de E_n telle que $\Delta^{n+1}(h) = g$, avec $g : x \mapsto \mathrm{e}^x.x^n$ (on ne cherchera pas à expliciter h).

b) Déterminer, en fonction de h et de ses dérivées successives, les applications f de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, vérifiant :
$$D^{n+1}(f) = g, \text{ et } f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$$
Où D désigne l'opérateur de dérivation sur l'ensemble des fonctions dérivables

4. Déterminer les éléments propres de Δ. Cet endomorphisme est–il diagonalisable ?

Solution :

1. Par définition, E_n est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $e_i : x \mapsto \mathrm{e}^x.x^i$, i décrivant $[\![0, n]\!]$. Ces fonctions étant clairement des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, E_n est un sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ en est un système générateur.

Enfin si $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$ est l'application nulle, alors, une exponentielle n'étant jamais nulle, on a $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0$ et tous les λ_i sont nuls.

$(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est libre, donc est une base de E_n qui est de dimension $n+1$.

2. Δ est évidemment linéaire et si $f : x \mapsto \mathrm{e}^x P(x)$, alors :
$$\Delta(f) : x \mapsto \mathrm{e}^x \big(P(x) + P'(x)\big)$$
Donc $\Delta(f) \in E_n$ et Δ est un endomorphisme de E_n.

Enfin, avec les notations précédentes : $f \in \operatorname{Ker}\Delta \Longleftrightarrow P+P'=0 \Longleftrightarrow P=0$ et $\operatorname{Ker}\Delta$ se réduit à la fonction nulle : Δ est injectif et puisque E_n est de dimension finie :

$$\Delta \in GL(E_n)$$

3. a) Δ étant un automorphisme de E_n, il en est de même de Δ^{n+1} et g admet un antécédent unique (dans E_n), par l'automorphisme Δ^{n+1}. On a d'ailleurs $h = \Delta^{-(n+1)}(g)$.

b) On cherche f sous la forme $f = h + \varphi$. Alors f convient si et seulement si :

$$D^{n+1}(\varphi) = 0 \text{ et } \forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \varphi^{(k)}(0) = -h^{(k)}(0)$$

La première relation indique que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n et, par la formule de Taylor :

$$\varphi(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

4. Soit λ une éventuelle valeur propre de Δ et f une fonction propre associée. La fonction f est de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x P(x)$, où P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

$\Delta f = \lambda f$ s'écrit : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \big(P(x) + P'(x)\big) = \lambda.\mathrm{e}^x P(x)$, soit :

$$(\lambda - 1)P = P'$$

⋆ Si $\lambda = 1$, alors P est un polynôme constant ;

⋆ Si $\lambda \neq 1$, alors P est nécessairement le polynôme nul (sinon, P et P' auraient le même degré !)

En conclusion 1 est la seule valeur propre de Δ et $E_{(1)}(\Delta) = \operatorname{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x)$.

Comme n est non nul, $\operatorname{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x) \neq E_n$ et Δ n'est pas diagonalisable.

Exercice 20.

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Un endomorphisme D de E est appelé *dérivation* dans E s'il vérifie : pour tout $(p, q) \in E^2$, $D(pq) = D(p)q + pD(q)$.

On désigne par $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des dérivations dans E.

1. Soit D une dérivation dans E et $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, avec x réel. Déterminer $D(X)$.

2. Montrer que si $a \in E$ est donné, l'application D_a de E dans E définie par, pour tout $p \in E$:

$$D_a(p) = ap - pa$$

est une dérivation.

3. Montrer que $\mathcal{D}(E)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4. Montrer que si D_1 et D_2 sont deux dérivations dans E, alors il en est de même de $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Solution :

1. Par linéarité de D : $D(X) = D(xI_2) = xD(I_2)$.
Or $D(I_2) = D(I_2 I_2) = I_2 D(I_2) + D(I_2) I_2 = 2D(I_2)$ et donc $D(I_2) = 0$, soit :
$$D(X) = 0$$

2. $\star$ D_a est linéaire de E dans E, car :
$$\forall\, p, q \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, D_a(p + \lambda q) = a(p + \lambda q) - (p + \lambda q)a = ap - pa + \lambda(aq - qa)$$
$$= D_a(p) + \lambda D_a(q)$$
et $D_a(p)$ est bien une matrice carrée d'ordre 2.
$$\star\ \forall\, p, q \in E, D_a(p)q + pD_a(q) = (ap - pa)q + p(aq - qa) = a(pq) - (pq)a$$
$$= D_a(pq)$$
Donc D_a est une dérivation sur E.

3. L'application nulle est une dérivation sur E et on vérifie facilement que si D_1 et D_2 sont deux dérivations, alors pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, $D_1 + \lambda D_2$ est une dérivation. L'ensemble des dérivations est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4. $\star$ $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ est encore un endomorphisme de E (algèbre des endomorphismes).
$\star$ Pour toutes matrices p et q de E :
$$\begin{aligned}(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(pq) &= (D_1 \circ D_2)(pq) - (D_2 \circ D_1)(pq)\\
&= D_1\big(D_2(p)q + pD_2(q)\big) - D_2\big(D_1(p)q + pD_1(q)\big)\\
&= D_1\big(D_2(p)q\big) + D_1\big(pD_2(q)\big) - D_2\big(D_1(p)q\big) - D_2\big(pD_1(q)\big)\\
&= (D_1 \circ D_2)(p)q + D_2(p)D_1(q) + D_1(p)D_2(q) + p(D_1 \circ D_2)(q)\\
&\quad -(D_2 \circ D_1)(p)q - D_1(p)D_2(q) - D_2(p)D_1(q) - p(D_2 \circ D_1)(q)\end{aligned}$$
et il reste :
$$(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(pq) = (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(p)q + p(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(q)$$
Donc $(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)$ est encore une dérivation.

Exercice 21.

Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$ et $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré strictement inférieur à n.
Soient a et b deux réels distincts.

1. a) Montrer que F_a, F_b et F définis ci-après, sont des sous–espaces vectoriels de E.
i) $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.

ii) $F_b = \{P \in E / P(b) = 0\}$.
iii) $F = \{P \in E / P(a) = P(b) = 0\}$.

b) Montrer que la famille des polynômes :

$$\big((X-a), X(X-a), X^2(X-a), \ldots, X^{n-2}(X-a)\big)$$

forme une base de F_a.

c) Déterminer une base de F.

2. Soit u l'application de E dans E définie, pour tout $P \in E$ par :

$$(u(P))(X) = P(a)X + P(b)$$

a) Montrer que u est une application linéaire.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

3. Montrer que $E = F_a + F_b$.

Solution :

1. a) $\varphi_a : P \mapsto P(a)$ est clairement une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et : $F_a = \mathrm{Ker}\,\varphi_a$, $F_b = \mathrm{Ker}\,\varphi_b$, $F = F_a \cap F_b$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ appartient à F_a si et seulement si a est racine de P, donc si et seulement si P est divisible par $(X-a)$, donc est de la forme $(X-a)Q$, avec $\deg Q \leqslant n-2$. Ainsi :

$$P \in F_a \iff \exists (a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}, P = \sum_{i=0}^{n-2} a_i (X-a) X^i$$

La famille proposée est donc génératrice de F_a. Comme elle est clairement libre (elle est à degrés échelonnés de 1 à $n-1$) c'est une base de F_a.

b) De la même façon $\big((X-a)(X-b)X^i\big)_{0 \leqslant i \leqslant n-3}$ est une base de F.

2. a) Pour tous polynômes P, Q et tout scalaire λ :

$$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(a)X + (P+\lambda Q)(b) \\ &= P(a)X + P(b) + \lambda\big(Q(a)X + Q(b)\big) \\ &= u(P) + \lambda u(Q) \end{aligned}$$

b) $\star$ $P \in \mathrm{Ker}\,u \iff P(a)X + P(b) = 0 \iff P(a) = P(b) = 0 \iff P \in F$:

$$\mathrm{Ker}\,u = F$$

$\star$ Comme $\dim \mathrm{Ker}\,u = \dim F = n-2$ et $\dim E = n$, par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\,u = 2$. Or $\mathrm{Im}\,u$ est clairement inclus dans $\mathbb{R}_1[X]$, donc :

$$\mathrm{Im}\,u = \mathbb{R}_1[X]$$

3. $\dim(F_a + F_b) = \dim F_a + \dim F_b - \dim(F_a \cap F_b)$.
Or $\dim F_a = \dim F_b = n-1$ et $\dim(F_a \cap F_b) = \dim F = n-2$, donc :

$$\dim(F_a + F_b) = n = \dim E$$

L'inclusion $F_a + F_b \subset E$ étant banale, on conclut à l'égalité.

Exercice 22.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients complexes. On note S (respectivement A) le sous–espace vectoriel de E formé des matrices symétriques, (respectivement antisymétriques).
On rappelle que ${}^tM$ désigne la matrice transposée de la matrice M et I la matrice identité de E.

Soient (α, β) deux nombres complexes donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$:

$$f(M) = \alpha M + \beta {}^tM$$

1. Montrer que $E = S \oplus A$.

2. Exprimer f à l'aide de p et q, où $q = I - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A.

3. Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de I.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E. Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de I.

5. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β.
En déduire la puissance $k^{\text{ème}}$ de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Solution :

1. $\star$ La matrice nulle est symétrique et toute combinaison linéaire de matrices symétriques est symétrique. Idem pour les matrices antisymétriques. Donc S et A sont des sous-espaces vectoriels de E.
$\star$ Seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique : $S \cap A = \{0\}$.
$\star$ Pour $M \in E$, on a : $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}$ et la première matrice est symétrique, la seconde antisymétrique : $E = S + A$.
Ainsi : $$E = S \oplus A$$

2. On a : $p(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $q(M) = \dfrac{M - {}^tM}{2}$, donc :

$$M = p(M) + q(M),\ {}^tM = p(M) - q(M)$$

Soit : $f(M) = \alpha(p(M) + q(M)) + \beta(p(M) - q(M))$:

$$f = (\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)q = (\alpha + \beta)p + (\alpha - \beta)(Id - p)$$

3. Comme $p^2 = p, q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$ (couple de projecteurs associés), on a : $f^2 = (\alpha + \beta)^2 p + (\alpha - \beta)^2 q = (\alpha + \beta)^2 p + (\alpha - \beta)^2 (Id - p)$

Ainsi :

$$\begin{cases} f = (\alpha - \beta)Id + 2\beta p \\ f^2 = (\alpha - \beta)^2 Id + 4\alpha\beta p \end{cases}$$

et, en éliminant p : $$f^2 - 2\alpha f = (\beta^2 - \alpha^2)Id.$$

4. $\star$ Si $\beta^2 \neq \alpha^2$, l'écriture précédente donne : $(f - \dfrac{2\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} Id) \circ f = Id$, ce qui prouve que f est un automorphisme et fournit f^{-1}.

$\star$ Si $\beta = -\alpha$, alors $f(I) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

$\star$ Si $\beta = \alpha$, alors pour n'importe quelle matrice M antisymétrique, on a $f(M) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

5. Par récurrence simple : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, f^k = (\alpha + \beta)^k p + (\alpha - \beta)^k q$.

Soit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f)$$

On a :

$$P = M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $A^k = M_{\mathcal{B}}(f^k) = (\alpha + \beta)^k P + (\alpha - \beta)^k Q$ et on explicite aisément les coefficients de A^k.

Exercice 23.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de dégré inférieur ou égal à n.

On considère une liste $(a_1 \ldots, a_n, a_{n+1})$ de réels deux à deux distincts et l'on définit une application ϕ de E^2 dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \phi(P, Q) = \sum_{k=1}^{n+1} P(a_k) Q(a_k)$$

1. Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur E^2.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E formée de polynômes P_k tels que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le degré de P_k soit égal à k et dont le terme de degré k soit positif.

Solution :

1. ϕ est évidemment bilinéaire et symétrique.
$\forall P \in E, \phi(P,P) = \sum_{k=1}^{n+1} P^2(a_k) \geqslant 0$ et cette expression n'est nulle que si P admet $a_1, \ldots, a_{n+1}$ pour zéros. Comme P est de degré inférieur ou égal à n, ceci ne peut se produire que pour $P = 0$.

$$\boxed{\phi \text{ est un produit scalaire}}$$

2. Il suffit d'appliquer à la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de E, et à ce produit scalaire, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 24.

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un système de vecteurs unitaires tels que, pour tout $x \in E$:

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est un système orthonormal.

2. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, x un vecteur de E et y sa projection orthogonale sur F. Montrer que $x = y$.

3. En déduire que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Solution :

1. On applique la relation pour chaque $x = e_j$:

$$||e_j||^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k \rangle^2, \text{ d'où : } \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \langle e_j, e_k \rangle^2 = 0.$$

Par conséquent : $\forall\, j \neq k, \langle e_j, e_k \rangle = 0$ et la famille, qui est normée, est bien orthonormée.

2. On a $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ et donc $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle x, e_i \rangle = ||x||^2$.

De même $||y||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = ||x||^2$.

On en déduit : $||x - y||^2 = ||x||^2 - 2\langle x, y \rangle + ||y||^2 = 0$ et $x = y$.

3. La projection orthogonale sur F est l'identité, par conséquent $F = E$ et la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soit a un réel fixé. On considère, pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'application f_k définie sur E_n par :

$$f_k(P) = P^{(k)}(a)$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P.

1. Montrer que f_k est une application linéaire de E_n dans $\mathbb{R}$.

2. On pose, pour $j \in [\![0,n]\!], Q_j(X) = (X-a)^j$. Pour tout k et pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, calculer $f_k(Q_j)$.

3. En déduire que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E_n, \mathbb{R})$.

4. Soit b un réel différent de a et m un entier tel que $0 \leqslant m \leqslant n$.
On définit l'application g de E_n dans $\mathbb{R}$ par $g(P) = P^{(m)}(b)$.
Montrer que g est linéaire et donner les coordonnées de g dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$.

Solution :

1. L'application f_k est bien définie sur E_n (une fonction polynôme est indéfiniment dérivable) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La linéarité de f_k n'est autre que la linéarité de la dérivation.

2. Si $j \neq k$, $f_k(Q_j) = 0$ (si $k > j$, alors $Q_j^{(k)}$ est le polynôme nul et si $k < j$, $Q_j^{(k)}$ contient encore le facteur $X - a$)
Tandis que pour $j = k$, il vient $f_k(Q_k) = k!$.

3. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$, on a donc en particulier :

$$\forall\, j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(Q_j) = 0,\ i.e.\ \lambda_j j! = 0$$

Ainsi tous les coefficients λ_j sont nuls et la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme cet espace est de même dimension que E, à savoir $n+1$, il s'agit d'une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

4. On applique la formule de Taylor (exacte !) au polynôme $P^{(m)}$:

$$P^{(m)}(b) = P^{(m)}(a) + \frac{b-a}{1!} P^{(m+1)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-m}}{(n-m)!} P^{(n)}(a)$$

Les coordonnées de g sont donc :

$$\boxed{(0, \ldots, 0, 1, b-a, \ldots, \frac{(b-a)^{n-m}}{(n-m)!})}$$

Les $m-1$ premières coordonnées étant nulles.

Exercice 26.

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Soit T l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $Q = T(P)$ défini par :

$$Q(X) = P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

2. Donner la matrice associée à T dans la base canonique de E.

3. Montrer que T admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

4. a) Déterminer le sous–espace propre associé à la valeur propre λ_n.

b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. Montrer que $P(1) = 0$.
On pose alors $P(X) = (X-1)^r R(X)$, avec $r \geqslant 1$ et $R(1) \neq 0$.
Préciser le degré de R.

c) En déduire le sous–espace propre associé à la valeur propre λ_k

5. On considère la suite de polynômes définie par $U_1(X) = X^{n-1}$ et, pour tout $j \geqslant 1$, par la relation :

$$U_{j+1}(X) = T(U_j)(X).$$

a) Montrer que :

$$U_1(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (X-1)^k$$

b) En déduire l'expression de $U_j(X)$ en fonction de $1, X-1, \ldots, (X-1)^{n-1}$, ceci pour tout $j \geqslant 2$.

Exercice 27.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E. Soit :

$$L(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) /\ u \circ v = 0\}$$

Montrer que $L(u)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Solution :

On a $u \circ v = 0 \iff \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u \iff v$ est en fait une application linéaire de E dans $\mathrm{Ker}\, u$.
Par conséquent $L(u)$ est isomorphe (voire égal) à $\mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}\, u)$, et donc :

$$\boxed{\dim L(u) = \dim E \times \dim \mathrm{Ker}\, u = n(n - \mathrm{rg}\, u)}$$

Exercice 28.

On considère deux entiers n et p tels que $2 \leqslant p \leqslant n$ et $E = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. On considère I l'application identité de E et p éléments distincts non nuls $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de E vérifiant :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = I, \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j = 0, \text{ pour tout } i \neq j$$

Soient p nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ deux à deux distincts et f l'endomorphisme :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \dots + \alpha_p f_p$$

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, f_i est un projecteur de $\mathbb{C}^n$. Qu'en déduit-on pour $\mathbb{C}^n$ relativement à $\operatorname{Im} f_i$ et $\operatorname{Ker} f_i$?

2. Pour k entier naturel, calculer f^k.

3. Montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une famille libre de E.

4. Montrer que les seules valeurs propres de f sont les complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et que, si l'on note E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre α_i, on a :

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$$

5. Montrer que la famille $(I, f, f^2, \dots, f^{p-1})$ est libre dans E. En déduire que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe un polynôme P_i de $\mathbb{C}[X]$, de degré inférieur ou égal à $(p-1)$, tel que $f_i = P_i(f)$ et que l'on a $P_i(\alpha_i) = 1$ et $P_i(\alpha_j) = 0$ pour $j \neq i$. En déduire l'expression de P_i.

Solution :

1. Soit i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n$. On peut écrire :

$$f_i = f_i \circ \sum_{k=1}^{p} f_k = \sum_{k=1}^{p} (f_i \circ f_k) = f_i^2$$

ce qui signifie que f_i est un projecteur de $\mathbb{C}^n$. On sait alors que :

$$\boxed{\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} f_i \oplus \ker f_i}$$

2. Utilisons la question précédente :

$$f^2 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j \circ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_j \alpha_k f_j \circ f_k = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 f_j^2 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 f_j$$

On montre ensuite par récurrence que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\boxed{f^k = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^k f_j}$$

3. Écrivons que : $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \dots + \alpha_p f_p = 0$.
Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$

$$0 = f_i \circ f = \alpha_i f_i^2 = \alpha_i f_i$$

On conclut en remarquant qu'aucun des endomorphismes f_i n'est identiquement nul : $\forall\, i, \alpha_i = 0$, et :

$$\boxed{(f_1, \dots, f_p) \text{ est une famille libre}}$$

4. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, α_i est valeur propre de f, car si x_i est un élément de $\operatorname{Im} f_i$, alors $x_i = f_i(x_i)$ et :

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k(f_i(x_i)) = \alpha_i f_i(x_i) = \alpha_i x_i$$

Nous venons en fait de montrer que α_i est valeur propre de f, de sous-espace propre associé contenant $\text{Im}\, f_i$.

Mais la relation $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = Id$, donne, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$x = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_p(x)$$

ce qui signifie que $\mathbb{C}^n = \text{Im}\, f_1 + \text{Im}\, f_2 + \cdots + \text{Im}\, f_p$.

A fortiori, on a $\mathbb{C}^n = E_1 + \cdots + E_p$ et comme cette somme est directe (somme de sous-espaces propres) :

$$\boxed{\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p}$$

Les seules valeurs propres de f sont ainsi $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$.

5. Écrivons que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$a_0 x + a_1 f(x) + \cdots a_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$$

Pour $x = x_i$ vecteur propre de f associé à la valeur propre α_i, il vient :

$$\Big(\sum_{k=0}^{p-1} a_k \alpha_i^k\Big) x_i = 0$$

Le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ est de degré $(k-1)$ et admet k racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$: il s'agit du polynôme nul, et tous les a_k sont nuls.

La famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est libre et incluse dans $\text{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$. Donc :

$$\text{Vect}(I, f, f^2, \ldots, f^{p-1}) = \text{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, f_i est combinaison linéaire des éléments de la famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$, soit :

$$f_i = P_i(f) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} f^j$$

Or si $x \in \text{Im}\, f_i$:

$$\alpha_i x = f_i(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} f^j(x) = \Big(\sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} \alpha_i^j\Big) x \text{ et } P_i(\alpha_i) = 1$$

et si $x \in \text{Im}\, f_j$, avec $j \neq i$:

$$0 = f_i(x) = P_i(\alpha_j) x \text{ et } P_i(\alpha_j) = 0$$

Le polynôme P_i n'est autre que le polynôme interpolateur de Lagrange aux points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, soit :

$$\boxed{P_i(X) = \frac{\prod\limits_{j\neq i} (X - \alpha_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}}$$

Exercice 29.

On définit les polynômes $(G_k)_{k\geqslant 0}$ par :

$$\begin{cases} G_0(X) = 1, G_1(X) = X \\ G_k(X) = \dfrac{X\,(X-1)\,(X-2)\dots(X-k+1)}{k!}, \text{ pour } \quad k \geqslant 2 \end{cases}$$

1. a) Établir, pour tout entier $k \geqslant 1$, la relation :

$$G_k(X+1) - G_k(X) = G_{k-1}(X)$$

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $G_k(p) \in \mathbb{Z}$.

2. a) Que dire de la famille $\big(G_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$?

b) Soit Q un polynôme quelconque de degré n. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i) pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $Q(p) \in \mathbb{Z}$

ii) il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que : $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, G_k(X)$

(On pourra procéder par récurrence sur n et considérer le polynôme :
$P(X) = Q(X+1) - Q(X)$).

3. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, G_k(x)$$

soit nulle lorsque x est égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, \dots, n$.

b) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite ainsi associée à la fonction $x \mapsto f(x) = b^x$ est $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((b-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

1. a) On vérifie immédiatement que $G_1(X+1) - G_1(X) = G_0(X)$.
Si $k \geqslant 2$, alors :

$$\begin{aligned} G_k(X+1) - G_k(X) &= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!}\big[(X+1) - (X-k+1)\big] \\ &= G_{k-1}(X) \end{aligned}$$

b) • si $p \geqslant k$, alors $G_k(p) = \mathrm{C}_p^k \in \mathbb{N}$.
• si $0 \leqslant p < k$, alors $G_k(p) = 0$.
• si $p < 0$, alors :

$$G_k(p) = (-1)^k \frac{(-p+k+1)\cdots(-p+1)(-p)}{k!} = (-1)^k \mathrm{C}_{-p+k+1}^k \in \mathbb{Z}$$

2. a) On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, G_k est un polynôme de degré k. Ainsi la famille $(G_0, G_1, \dots, G_n)$ est une famille formée de polynômes échelonnés en degrés, depuis 0 jusqu'à n, donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Il est évident que ii) $\Rightarrow$ i) par la question 1. b).

Démontrons l'implication contraire par récurrence sur le degré de Q :

$\star$ L'implication réciproque est vérifiée pour tout polynôme Q de degré 0 (polynôme constant).

$\star$ Supposons la réciproque montrée pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par la question 2.a), tout polynôme Q de degré n s'écrit sous la forme $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k G_k(X)$, avec (a_k) réels. Soit alors :

$$P(X) = Q(X+1) - Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} G_k(X)$$

P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, qui vérifie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$P(p) = Q(p+1) - Q(p) \in \mathbb{Z} \text{ (hypothèse sur } Q)$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à P donne alors : pour tout k élément de $\{0, \dots, n-1\}, a_{k+1} \in \mathbb{Z}$. Mais $a_0 = Q(0) \in \mathbb{Z}$ également et donc $Q(X)$ admet bien une décomposition de la forme annoncée.

On conclut par le principe de récurrence.

3. a) La condition demandée s'écrit sous forme d'un système triangulaire d'équations linéaires :

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_0 + a_1 \\ f(2) = a_0 + 2a_1 + a_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ f(n) = C_n^0 a_0 + \cdots C_n^k a_k + \cdots + C_n^n a_n \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution (la matrice associée est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc sans terme diagonal nul), cette solution $(a_0, \dots, a_n)$ ne dépendant que de $(f(0), \dots, f(n))$.

b) Les réels a_n vérifient :

$$f(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k G_k(p) = \sum_{k=0}^{p} a_k C_p^k, \text{ pour } 0 \leqslant p \leqslant n$$

- pour $k = 0$, il vient $a_0 = f(0) = (b-1)^0$.
- supposons que pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant m-1, a_k = (b-1)^k$. Alors :

$$b^m = f(m) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{C}_m^k = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^k (b-1)^k + a_m$$

ce qui entraîne que $a_m = (b-1)^m$ par la formule du binôme de Newton. On conclut encore une fois par le principe de récurrence.

Exercice 30.

Soit a et b deux réels distincts.

On désire déterminer une solution de l'équation :

$$(E_n) \qquad (X-a)^n A_n + (X-b)^n B_n = 1$$

d'inconnues A_n et B_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$.

1. Montrer que si (E_n) admet un couple solution, celui-ci est unique.

2. On considère les ensembles :
$F = \{(X-a)^n P \ / \ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$ et $G = \{(X-b)^n P \ / \ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$

a) Vérifier que F et G sont des espaces vectoriels dont on précisera la dimension.

b) Déterminer $F \cap G$. En déduire la dimension de $F+G$.

c) En déduire que (E_n) admet une solution unique.

3. a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n dont on précisera le degré, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^x \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1} dt = (x-a)^n P_n(x)$$

b) Etablir l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-a)^n P_n(x) + (b-x)^n P_n(a+b-x) = (b-a)^n P_n(b).$$

c) Exprimer le couple solution de (E_n) en fonction du polynôme P_n.

Solution :

1. Supposons que (E_n) admette deux couples solutions (A_n, B_n) et (C_n, D_n) éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a alors :

$$(X-a)^n(A_n - C_n) = (X-b)^n(D_n - B_n)$$

Le réel a est alors racine d'ordre de multiplicité au moins n du polynôme $D_n - B_n$ ce qui entraîne que c'est le polynôme nul, puisqu'il est de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. De même $A_n = C_n$.

2.a) On vérifie aisément que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Une base de F est :

$$(X-a)^n, X(X-a)^n, \ldots, X^{n-1}(X-a)^n$$

(c'est une famille libre et génératrice). Donc $\dim F = n$.
De même, une base de G est :

$$(X-b)^n, X(X-b)^n, \ldots, X^{n-1}(X-b)^n$$

et $\dim G = n$.

b) Soit $Q \in F \cap G$. Il existe deux polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$Q = (X-a)^n P_1(X) = (X-b)^n P_2(X)$$

Une démonstration identique à celle de la question 1. montre que $P_1 = P_2 = 0$, donc $Q = 0$.

On en déduit que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = 2n$. Or $F \oplus G \subset \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. L'égalité des dimensions implique que :

$$F \oplus G = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

c) En particulier, $1 \in F+G$; on déduit des questions précédentes l'existence d'une solution de (E_n).

3. a) Posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\,dt$. F est une fonction dérivable et pour tout x réel :

$$F'(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$$

F est donc une fonction polynomiale dont la dérivée admet a comme racine d'ordre $(n-1)$. Mais comme $F(a) = 0$, on peut donc conclure que a est racine d'ordre n de F.

b) Le changement de variable affine $u = a + b - t$ donne :

$$\begin{aligned} F(b+a-x) &= \int_a^{b+a-x} \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\,dt = -\int_b^x \big((a-u)(b-u)\big)^{n-1}\,du \\ &= \int_x^b \big((a-u)(b-u)\big)^{n-1}\,du \end{aligned}$$

D'où :

$$F(x) + F(a+b-x) = \int_a^b \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\,dt = F(b)$$

ce qui se traduit par :

$$(x-a)^n P_n(x) + (b-x)^n P_n(a+b-x) = (b-a)^n P_n(b)$$

c) Comme $(t-a)(t-b) < 0$ pour $t \in [a,b]$, le signe de $\big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}$ reste constant sur cet intervalle, ce qui entraîne que $F(b) \neq 0$ donc que $P_n(b) \neq 0$. En utilisant l'unicité de la solution de (E_n), l'équation précédente se traduit par :

$$(x-a)^n \frac{P_n(x)}{(b-a)^n P_n(b)} + (b-x)^n \frac{P_n(a+b-x)}{(b-a)^n P_n(b)} = 1$$

donc :

$$A_n = \frac{P_n(X)}{(b-a)^n P_n(b)} \text{ et } B_n = \frac{P_n(a+b-X)}{(a-b)^n P_n(b)}$$

Remarque : On a $(X-a) - (X-b) = b-a$, donc :

$$[(X-a)-(X-b)]^{2n-1} = (b-a)^{2n-1}$$

En développant par la formule du binôme on obtient une expression de la forme :

$$(X-A)^n \alpha_n(X) + (B-)b)^n \beta_n(X) = (b-a)^{2n-1}$$

où α_n et β_n sont des polynômes de degrés adéquats, il suffit alors de diviser par $(b-a)^{2n-1}$ pour obtenir une autre expression de A_n et B_n.

3

PROBABILITÉS

Exercice 1.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.
Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n, Z)$, $n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. On pose, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$: $Y_k = \prod_{i=1}^{k} X_i = X_1 X_2 \cdots X_k$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $L_1 = \ln\left(\frac{1}{Y_1}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Reconnaître la loi suivie par L_1.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire $\ln Y_k$, en reconnaissant au préalable la loi suivie par la variable aléatoire $-\ln Y_k$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n est une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(1, n)$ (loi Gamma de paramètres 1 et n). Soit W une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $s > 0$.
On note F_n la fonction de répartition de V_n et G la fonction de répartition de W.

a) Déterminer une relation entre $F_n(s)$ et $F_{n-1}(s)$, pour tout $n \geqslant 2$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : 1 - F_n(s) = G(n-1)$.

3. On note R_n la variable aléatoire définie par $R_n = \frac{Y_n}{Z}$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire R_n.

b) Calculer la probabilité de l'événement $(R_n < 1)$.

Solution :

1. a) On a $L_1 = -\ln Y_1$. Donc $L_1(\Omega) = \mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$:
$$F_{L_1}(x) = P(Y_1 > \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$
Ainsi L_1 suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ d'espérance et de variance égales à 1. Une densité de L_1 est donnée par :
$$\boxed{f_{L_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

b) On a $-\ln(Y_k) = \sum_{i=1}^{k} -\ln(X_i)$. L'indépendance des variables aléatoires (X_i) (donc des variables aléatoires $(\ln(X_i))$ permet d'affirmer que $-\ln(Y_k)$ suit la loi Gamma $\gamma(1,k)$, de densité :
$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x}x^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Donc $\ln(Y_k)$ a pour densité :
$$\boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x}(-x)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$
puisque $F_{\ln(Y_k)}(x) = 1 - F_{-\ln(Y_k)}(-x)$ pour tout x réel.

2. a) On sait que :
$$F_n(s) = P(V_n < s) = \int_0^s \frac{\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}dx$$
Une intégration par parties, les fonctions étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donne :
$$F_n(s) = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}\Big]_0^s + \int_0^s \frac{\mathrm{e}^{-x}x^{n-2}}{(n-2)!}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{n-1}}{(n-1)!} + F_{n-1}(s)$$
Comme $F_1(s) = 1 - \mathrm{e}^{-s}$, il vient :
$$\boxed{F_n(s) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{k-1}}{(k-1)!}}$$

b) Il vient immédiatement :
$$\boxed{1 - F_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-s}s^{k-1}}{(k-1)!} = P(W \leqslant n-1) = G(n-1)}$$

3. a) On a : $\ln(R_n) = \ln(Y_n) + (-\ln Z)$. Par indépendance des variables aléatoires en jeu, pour tout x réel :
$$f_{\ln R_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln Y_n}(u) f_{-\ln Z}(x-u)\,du$$
et :

$$f_{\ln R_n}(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^u(-u)^{n-1}}{(n-1)!} f_{-\ln Z}(x-u)\,du$$

- si $x \leqslant 0$:

$$f_{\ln R_n}(x) = \frac{e^{-x}}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{x} e^{2u}(-u)^{n-1}\,du = \frac{e^{-x}}{2^n}\int_{-2x}^{+\infty} \frac{e^{-y}y^{n-1}dy}{(n-1)!}$$
$$= \frac{e^{-x}}{2^n}(1 - F_n(-2x))$$

- si $x > 0$:

$$f_{\ln R_n}(x) = \frac{e^{-x}}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{0} e^{2u}(-u)^{n-1}\,du = \frac{e^{-x}}{2^n}$$

Pour terminer, on remarque que pour tout $u > 0$, $f_{R_n}(u) = f_{\ln R_n}(\ln u) \times \dfrac{1}{u}$, donc :

$\star$ si $0 \leqslant u \leqslant 1$: $f_{R_n}(u) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2\ln u)^k}{k!}$

$\star$ si $u \geqslant 1$: $f_{R_n}(x) = \dfrac{1}{2^n u^2}$.

b) Ainsi :

$$\boxed{P(R_n < 1) = 1 - P(R_n \geqslant 1) = 1 - \frac{1}{2^n}}$$

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul. Une boîte contient $(2n+1)$ jetons bicolores (une face est blanche, l'autre est noire). Les jetons sont numérotés de 1 à $2n+1$ sur leur face blanche, les faces noires ne portant pas de numéro.

On lance simultanément tous les jetons et on observe leurs faces supérieures.

1. Une et une seulement des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois. Soit X la variable aléatoire associée à ce nombre.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance et sa variance.

2. Suite au lancer, on ramasse les jetons de la couleur apparaissant un nombre impair de fois et on note les numéros de leur face blanche. Soit Y la variable aléatoire représentant le plus petit de ces nombres.

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de Y, conditionnée par l'événement $(X = 2k+1)$.

b) En déduire la loi de Y. Calculer son espérance.

Solution :

1. a) On a $X(\Omega) = \{2k+1,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ et l'événement $(X = 2k+1)$ correspond à l'union des événements « on a obtenu $(2k+1)$ jetons blancs et

$(2n-2k)$ jetons noirs parmi les $(2n+1)$ » ou « on a obtenu $(2k+1)$ jetons noirs et $(2n-2k)$ jetons blancs parmi les $(2n+1)$ ».
Par incompatibilité et modèle binomial associé, il vient :

$$\boxed{P(X=2k+1)=2\frac{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}{2^{2n+1}}=\frac{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}{2^{2n}}}$$

b) L'espérance de X est donnée par :

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P(X=2k+1)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}\\&=\frac{2n+1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k}=\frac{2n+1}{2}\end{aligned}$$

(car $(1+1)^{2n}=2^{2n}$ et $(1-1)^{2n}=0$, d'où $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k}=2^{2n-1}$).

On a également :

$$E(X(X-1))=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)(2k)\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}=\frac{(2n+1)(2n)}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{2n-1}^{2k-1}$$

et, en utilisant la même technique : $E(X(X-1))=\dfrac{(2n+1)(2n)}{4}$ et :

$$\boxed{V(X)=\frac{2n+1}{4}}$$

2. a) On a $(Y/(X=2k+1))(\Omega)=[\![1,2n-2k+1]\!]$ et :

$$P(Y=\ell/X=2k+1)=\frac{\mathrm{C}_{\ell-1}^{0}\mathrm{C}_{2n+1-\ell}^{2k}}{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}$$

En effet parmi les échantillons de $(2k+1)$ jetons pris parmi $(2n+1)$ (sans remise), on dénombre ceux dont aucun ne porte un numéro inférieur ou égal à $\ell-1$ et dont $2k$ portent des numéros supérieurs ou égaux à $\ell+1$, un jeton valant ℓ.

b) Pour tout $\ell\in[\![1,2n+1]\!]$:

$$P(Y=\ell)=\sum_{k=0}^{\lfloor(2n+1-\ell)/2\rfloor}P(Y=\ell/X=2k+1)P(X=2k+1)$$

soit :

$$P(Y=\ell)=\sum_{k=0}^{\lfloor(2n+1-\ell)/2\rfloor}\frac{\mathrm{C}_{2n+1-\ell}^{2k}}{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}\times\frac{\mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}}{2^{2n}}$$

et, pour $\ell\in[\![1,2n]\!]$:

$$P(Y=\ell)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{\lfloor(2n+1-\ell)/2\rfloor}\mathrm{C}_{2n+1-\ell}^{2k}=\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{2}2^{2n+1-\ell}=\frac{1}{2^{\ell}}$$

Pour $\ell=2n+1$:

$$P(Y=2n+1)=\frac{2^0}{2^{2n}}=\frac{1}{2^{2n}}$$

L'espérance de Y vaut alors :

$$\boxed{E(Y) = \sum_{\ell=1}^{2n} \frac{\ell}{2^l} + \frac{2n+1}{2^{2n}} = 2\big(1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\big)}$$

Exercice 3.

On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et b_1 boules blanches (resp. n_2 boules noires et b_2 boules blanches).
On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise.
Soit N_1 (resp. N_2) l'événement « tirer une boule noire au premier (resp. au second) tirage ».

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?

2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?

3. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Solution :

1. En utilisant le système complet (U_1, U_2), où U_i est l'événement « les tirages se font dans l'urne U_i », il vient :

$$P(N_1) = P(N_1/U_1)P(U_1) + P(N_1/U_2)P(U_2)$$

Soit :

$$\boxed{P(N_1) = \frac{1}{2}\big(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\big)}$$

Le résultat est évidemment le même pour N_2.

2. $P(N_2/N_1) = \dfrac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1)}$ et comme on ne change pas d'urne entre les deux tirages :
$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1 \cap N_2/U_1)P(U_1) + P(N_1 \cap N_2/U_2)P(U_2)$
Soit :

$$P(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2}\Big(\big(\frac{n_1}{n_1+b_1}\big)^2 + \big(\frac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2\Big)$$

Et en remplaçant et développant :

$$P(N_2/N_1) = \frac{n_1^2(n_2+b_2)^2 + n_2^2(n_1+b_1)^2}{(n_1^2+b_1)(n_2+b_2)^2 + (n_2^2+b_2)(n_1+b_1)^2}$$

3. Les événements N_1 et N_2 sont indépendants si et seulement si :

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2)$$

Soit , si et seulement si :

$$\frac{1}{2}\Big(\big(\frac{n_1}{n_1+b_1}\big)^2 + \big(\frac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2\Big) = \frac{1}{4}\big(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2$$

En développant, il reste : $\big(\dfrac{n_1}{n_1+b_1} - \dfrac{n_2}{n_2+b_2}\big)^2 = 0$

Ceci est réalisé si et seulement si $\dfrac{n_1}{b_1} = \dfrac{n_2}{b_2}$ (ce qui n'est pas étonnant).

Exercice 4.

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :
- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
- si à l'instant $t = n$ $(n \geqslant 0)$, le spot S_1 est allumé, un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable.
- si à l'instant $t = n$ $(n \geqslant 0)$, le spot S_k $(2 \leqslant k \leqslant 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.
- à chaque instant, un seul spot est allumé.

Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant, s'il existe, où le spot S_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$ donné). En déduire que X est bien une variable aléatoire.

2. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.

3. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$ pour $n \geqslant 3$.

4. Déterminer l'espérance de X.

Solution :

1. Le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n avec la probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
Dès que le spot S_1 s'éteint, alors l'un des spots S_2, S_3 ou S_4 s'allume et il n'y a plus qu'à attendre : on est sûr que S_2 s'allumera.
Par le théorème de continuité monotone d'une probabilité, la probabilité que le spot S_1 reste indéfiniment allumé vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. On est donc quasi-certain que le spot S_2 s'allumera et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$: X est bien une variable aléatoire.

2. $\star$ $P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$ (le spot S_2 s'allume à l'instant 1).
$\star$ $(X = 2)$ est réalisé, soit si le spot S_1 reste allumé à l'instant 1 et le spot S_2 s'allume à l'instant 2, soit si le spot S_3 s'allume à l'instant 1 (et S_2 s'allumera nécessairement à l'instant 2), donc :
$$P(X = 2) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,1 = \frac{5}{16}$$

3. Soit $n \geqslant 3$, S_2 s'allume pour la première fois à l'instant n si et seulement si :

⋆ Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-1$ et S_2 s'allume à l'instant n ;
⋆ Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-2$ et S_3 s'allume à l'instant $n-1$;
⋆ Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-3$ et S_4 s'allume à l'instant $n-2$;
Soit, par disjonction :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, P(X=n) = \frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-2}}\frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-3}}\frac{1}{4} = \frac{21}{4^n}}$$

4. La convergence de la série étant évidente :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P(X=n) = \frac{1}{4} + 2\,\frac{5}{16} + 21\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{4^n}$$

$$E(X) = \frac{7}{8} - \frac{21}{4} - \frac{21}{8} + \frac{21}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n-1}}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{7}{3}}$$

Exercice 5.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} k.P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n.P(X>n)$$

En déduire que si X admet une espérance, alors :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$$

b) Montrer de même que si X admet une variance, alors :

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\,P(X>k)$$

2. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

a) Calculer l'espérance de X. Préciser la loi de X.

b) Déterminer un équivalent de $E(X)$ lorsque N tend vers l'infini, à n fixé (on pourra comparer à une intégrale).

c) $Z = \dfrac{n+1}{n}X$ est-il un estimateur sans biais de N ?

d) Dans les mêmes conditions, déterminer un équivalent de la variance $V(X)$.

Solution :

1. a) On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k[P(X>k-1)-P(X>k)]\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)P(X>k) - nP(X>n) + P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)\end{aligned}$$

Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leqslant nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k)$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)}$$

b) Utilisons le même type d'argument. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k^2[P(X>k-1)-P(X>k)]\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\big((k+1)^2-k^2\big)P(X>k) - n^2P(X>n) + P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)P(X>k) - n^2P(X>n)\end{aligned}$$

Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2P(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leqslant n^2P(X>n) = n^2\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2P(X=k)$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$\boxed{E\big(X^2\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\,P(X>k)}$$

2. a) Il est immédiat que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$:

$$P(X \leqslant k) = \big(\tfrac{k}{N}\big)^n, \text{ et } P(X>k) = 1 - \big(\tfrac{k}{N}\big)^n$$

Donc, par la question précédente :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N-1}\big(1-\big(\tfrac{k}{N}\big)^n\big) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\big(\tfrac{k}{N}\big)^n$$

Quant à la loi de X (on a : $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$) :

$$\boxed{P(X=k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}}$$

Ce calcul étant valable même pour $k = 1$.

b) On a :

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n = N\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\Big)$$

Or, lorsque N tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne, pour N grand :

$$\boxed{E(X) \sim N - \frac{N}{n+1} = \frac{nN}{n+1}}$$

c) On en conclut que Z est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

d) On refait un calcul analogue :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)P(X>k) = \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1) - \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\Big(\frac{k}{N}\Big)^n$$

$$= N + N(N-1) - 2N^2 \times \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - N \times \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

$$= N^2 - 2N^2\Big(\int_0^1 x^n dx + o(1)\Big) - N\Big(\int_0^1 x^n dx + o(1)\Big)$$

$$E(X^2) = N^2 - \frac{2N^2}{n+2} - \frac{N}{n+1} + o(N^2) = \frac{n}{n+2}N^2 + o(N^2)$$

Et comme $[E(X)]^2 = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}N^2 + o(N^2)$, il vient, pour N tendant vers l'infini :

$$\boxed{V(X) \sim \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}N^2}$$

Exercice 6.

Dans cet exercice, Ω désigne un ensemble fini non vide, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Si $X \in \mathcal{F}$, on note $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.

Si A est une partie de Ω, on note 1_A la fonction caractéristique de A, c'est-à-dire l'application définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $A \subset \Omega$. Calculer $E(1_A)$.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par :

$$\varphi : (X, Y) \mapsto E(XY)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $\omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) > 0$.

Dans la suite de l'exercice, on supposera que P vérifie cette propriété et $\mathcal{F}$ sera muni de ce produit scalaire.

3. Soit $X \in \mathcal{F}$ une variable aléatoire non constante.

On note G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par X et la variable aléatoire constante égale à 1, soit $G = \text{Vect}(X, 1_\Omega)$.

Soit $Y \in \mathcal{F}$.

a) Déterminer les réels a_0 et b_0 pour lesquels $Y - a_0X - b_0$ est orthogonal à tout élément de G.

b) En déduire l'expression de la projection orthogonale de Y sur G qu'on notera $p_G(Y)$.

c) Comparer $E(p_G(Y))$ et $E(Y)$.

d) On suppose que $X = 1_A$, avec A partie de Ω non vide et distincte de Ω. Montrer que pour tout $B \subset \Omega$:

$$p_G(1_B) = P(B/A)1_A + P(B/\overline{A})1_{\overline{A}}$$

où $P(U/V)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement U, sachant que l'événement V est réalisé.

Solution :

1. $E(1_A) = 1.P(A) + 0.P(\overline{A}) = P(A)$.

2. $\star$ L'application φ est bilinéaire (par linéarité de l'espérance), symétrique (par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{F}$) et également positive (car si $X \in \mathcal{F}, \varphi(X, X) = E(X^2) \geqslant 0$).

$\star$ Si φ est un produit scalaire, pour tout $\omega \in \Omega$, $X = 1_{\{\omega\}}$ est un élément non nul de $\mathcal{F}$, donc $\varphi(X, X) = E(1_{\{\omega\}}{}^2) = E(1_{\{\omega\}}) = P(\{\omega\}) > 0$.

$\star$ Réciproquement, supposons que $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$. Soit $X \in \mathcal{F}$ non nulle. Alors il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que $X(\omega_0) \neq 0$.

Dans ces conditions $\varphi(X, X) = E(X^2) \geqslant X^2(\{\omega_0\})P(\{\omega_0\})$, donc φ est bien un produit scalaire.

3. a) $$Y - a_0X - b_0 \in G^\perp \iff \begin{cases} \varphi(Y - a_0X - b_0, 1_\Omega) = 0 \\ \varphi(Y - a_0X - b_0, X) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_0E(X) + b_0 = E(Y) \\ a_0E(X^2) + b_0E(X) = E(XY) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_0 = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{V(X)} = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \\ b_0 = E(Y) - E(X)\dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \end{cases}$$

Notons que $V(X) \neq 0$, puisque X n'est pas constante.

b) $p_G(X)$ est l'unique élément Z de G tel que $Y - Z \in G^\perp$, donc :

$$\boxed{p_G(X) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{V(X)} X + E(Y) - E(X)\,\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{V(X)}}$$

c) $E(p_G(Y) = a_0 E(X) + b_0 = E(Y)$ (conséquence de $Y - p_G(Y) \perp 1_\Omega$)

d) Remarquons que $A \neq \Omega$ et $A \neq \emptyset$, donc $X = 1_A$ n'est pas constante.
$\operatorname{Cov}(1_A, 1_B) = E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B) = E(1_{A\cap B}) - E(1_A)E(1_B)$, donc

$$\operatorname{Cov}(1_A, 1_B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$$

$V(1_A) = P(A)P(\overline{A})$ (car 1_A suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$).
$p_G(1_B) = a_0 1_A + b_0(1_A + 1_{\overline{A}}) = (a_0 + b_0)1_A + b_0 1_{\overline{A}}$
avec :

$$a_0 + b_0 = E(1_B) + \frac{\operatorname{Cov}(1_A, 1_B)}{V(1_A)}(1 - E(1_A))$$

$$= P(B) + \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$$

et :

$$b_0 = E(1_B) - E(1_A)\frac{\operatorname{Cov}(1_A, 1_B)}{V(1_A)} = P(B) - \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{P(\overline{A})}$$

$$= P(B/\overline{A})$$

Finalement :

$$\boxed{p_G(1_B) = P(B/A)1_A + P(B/\overline{A})1_{\overline{A}}}$$

Exercice 7.

On considère une suite de parties indépendantes de «pile» ou «face», la probabilité d'obtenir «pile» à chaque partie étant égale à p (où $p \in]0,1[$).

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le $n^{\text{ème}}$ «pile».

Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et pour $n \geqslant 2, A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.

2. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

3. On pose $\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ et on définit l'application f de Δ_n dans $\mathbb{R}$ par, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_n : f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

a) Soit $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\frac{1}{n} + h_1, \frac{1}{n} + h_2, \ldots, \frac{1}{n} + h_n) \in \Delta_n$.
Simplifier :

$$f(\frac{1}{n} + h_1, \frac{1}{n} + h_2, \ldots, \frac{1}{n} + h_n) - f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$$

b) En déduire que f admet un minimum atteint en un unique point de Δ_n que l'on précisera.

4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, il existe parmi les combinaisons linéaires de $T_1, \dots, T_n$ un estimateur sans biais de $\frac{1}{p}$ qui est de variance minimale et préciser quel est cet estimateur. Cet estimateur est-il convergent ?

Solution :

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier «pile», elle suit la loi géométrique de paramètre p, donc d'espérance $\frac{1}{p}$.

2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène «pile» et 0 sinon. Les variables X_n sont des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
Soit $(i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. L'événement $(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n)$ est :
$(X_1 = \cdots = X_{i_1-1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = \cdots = X_{i_1+i_2-1} = 0, X_{i_1+i_2} = 1, ..$ jusqu'à $X_{i_1+\cdots+i_n} = 1)$
Donc, en posant $q = 1 - p$:

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = q^{i_1-1}pq^{i_2-1}p \dots q^{i_n-1}p \qquad (*)$$

En sommant pour $(i_1, \dots, i_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on obtient compte tenu du fait que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = \frac{p}{1-q} = 1$:

$$P(A_n = i_n) = q^{i_n-1}p$$

Ce qui prouve que A_n suit la loi géométrique de paramètre p, donc les variables A_k sont toutes de même loi.
De plus, l'expression $(*)$ prouve que :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k = i_k)$$

Ce qui prouve l'indépendance des variables A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Remarquons que $\left(\frac{1}{n}+h_1, \dots, \frac{1}{n}+h_n\right) \in \Delta_n$ si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i = 0$.
Dans ces conditions :
$f\left(\frac{1}{n} + h_1, \dots, \frac{1}{n} + h_n\right) - f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{n} + h_i\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2.$

b) $f\left(\frac{1}{n} + h_1, \dots, \frac{1}{n} + h_n\right) - f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ est toujours $\geqslant 0$, avec égalité seulement si tous les h_i sont nuls. On en déduit que f admet un minimum global sur Δ_n atteint uniquement en $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

4. On remarque que $\mathrm{Vect}(T_1, \dots, T_n) = \mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_n)$.
Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $E(x_1A_1 + \cdots + x_nA_n) = \frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, donc $x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{p}$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$.
Dans ces conditions, vu l'indépendance des A_i :

$$V(x_1A_1+\cdots+x_nA_n)=\sum_{i=1}^n x_i^2V(A_i)=V(A_1)f(x_1,\dots,x_n)$$

Cette variance est minimale si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$.
Il existe donc parmi les combinaisons linéaires de $T_1,\dots,T_n$ un estimateur sans biais de variance minimale qui est $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n A_i=\frac{1}{n}T_n$.

Cet estimateur est convergent, puisque $V\left(\frac{1}{n}T_n\right)=\frac{1}{n}V(T_1)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Exercice 8.

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes, X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$ et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1,2,\dots,n\}$.

1. Soit a un entier de $\{1,2,\dots,n\}$ et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall\omega\in\Omega, Y(\omega)=\begin{cases}X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega)\leqslant a\\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega)>a\end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Y. (Vérifier que l'on a bien obtenu une loi de probabilité).

b) Calculer l'espérance de Y et la comparer à celle de X_1.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de a cette espérance est-elle maximale ?

2. Soient a et b deux entiers de $\{1,\dots,n\}$.
On définit la variable aléatoire Z par :

$$\forall\omega\in\Omega, Z(\omega)=\begin{cases}X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega)\leqslant a\\ X_2(\omega) & \text{si } a<X_2(\omega)\leqslant b\\ X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega)>b\end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance.

b) Pour quelles valeurs du couple (a,b) cette espérance est-elle maximale ?

Solution :

1. a) On a $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :

- si $k\leqslant a$, $P(Y=k)=P[(X_1=k)\cap(X_2\leqslant a)]=\frac{1}{n}\times\frac{a}{n}$.
- si $k>a$, $P(Y=k)=P[(X_1=k)\cap(X_2>a)]+P[(X_2=k)\cap(X_2>a)]$
$=\frac{1}{n}+\frac{a}{n^2}$.

On a bien : $\frac{a}{n^2}\times a+\frac{a}{n^2}\times(n-a)+\frac{n-a}{n}=1$

b) Le calcul de l'espérance est facile :

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{a}k\frac{a}{n^2}+\sum_{k=a+1}^{n}k\frac{a}{n^2}+\sum_{k=a+1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{a(n+1)}{2n}+\frac{(a+n+1)(n-a)}{2n}$$
$$=E(X_1)+\frac{a}{2n}(n-a)>E(X_1)$$

c) On vérifie que :

$$E(Y)=\frac{1}{2n}\big(\frac{5}{4}n^2+n-(a-\frac{n}{2})^2\big)$$

Ainsi $E(Y)$ est maximale pour $a-\frac{n}{2}$ le plus petit possible :

- si n est pair, c'est pour $a=\frac{n}{2}$,
- si n est impair, c'est pour $a=\frac{n-1}{2}$ ou $a=\frac{n+1}{2}$.

2. a) On procède dans cette question comme dans la question précédente :

- si $k\leqslant a$, $P(Z=k)=P[(X_1=k)\cap(X_2\leqslant a)]+P[(X_1=k)\cap(X_2>b)]$
$$=\frac{1}{n^2}(a-b+n).$$
- si $k>b$, la méthode et le résultat sont identiques,
- si $a<k\leqslant b$,

$$P(Z=k)=P[(X_1=k)\cap(X_2\leqslant a)]+P[(X_2=k)\cap(a<X_2\leqslant b)]$$
$$+P[(X_1=k)\cap(X_2>b)]$$
$$=\frac{1}{n^2}(a-b+n)+\frac{1}{n}$$

Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Z)=\frac{1}{2n}\big(b^2-a^2-bn+an+n^2+n\big)=E(X_1)+\frac{b-a}{2n}(b+a-n)$$

b) De plus :

$$E(Z)=\frac{1}{2n}\big[\big(b-\frac{n}{2}\big)^2-\big(a-\frac{n}{2}\big)^2+n^2+n\big]$$

$E(Z)$ est maximale pour $a=n/2$ si n est pair et pour $a=\frac{n-1}{2}$ ou $a=\frac{n+1}{2}$ si n est impair (voir la question précédente) et b tel que $\big(b-\frac{n}{2}\big)^2$ maximal, soit $b=n$.

Exercice 9.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de densités respectives f_X et f_Y.

1. a) On pose $U=\ln(X)$ et $V=\ln(Y)$.
Exprimer des densités f_U et f_{-V} de U et de $-V$ à l'aide de f_X et de f_Y.

b) Déduire de la question précédente une expression d'une densité de $T=\ln\big(\frac{X}{Y}\big)$.

c) Montrer qu'une densité g de $\frac{X}{Y}$ est :

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \frac{1}{x}f_T(\ln x) & \text{si } x>0\end{cases}$$

2. Montrer que le quotient de deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ et μ suit une loi de Pareto dont on déterminera les paramètres.

3. On admet que si les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, une densité g de $\dfrac{X}{Y}$ est définie, pour tout x réel par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(xt) f_Y(t)\, dt$$

Déterminer la loi du quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$, $a > 0$ et x_0 lorsqu'une densité de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{a}\Big(\dfrac{a}{x - x_0}\Big)^{\alpha+1} & \textit{si } x - x_0 > a \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Solution :

1. a) Les variables aléatoires U et V sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[U \leqslant x] = [X \leqslant \mathrm{e}^x] \implies F_U(x) = F_X(\mathrm{e}^x) \implies f_U(x) = \mathrm{e}^x f_X(\mathrm{e}^x)$$

(où F_W désigne la fonction de répartition et f_W une densité de la variable aléatoire à densité W). De même :

$$[-V \leqslant x] = [Y \geqslant \mathrm{e}^{-x}] \implies F_V(x) = 1 - F_Y(\mathrm{e}^{-x}) \implies f_V(x) = \mathrm{e}^{-x} f_Y(\mathrm{e}^{-x})$$

b) On remarque que $T = \ln(X) - \ln(Y) = U - V$. Les variable X et Y étant indépendantes, il en est de même pour U et V, et une densité de T est donnée par convolution :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_{-V}(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t f_X(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-x+t} f_Y(\mathrm{e}^{-x+t})\, dt$$

c) On remarque que $\dfrac{X}{Y} = \mathrm{e}^T$. La variable aléatoire $\dfrac{X}{Y}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$\Big[\frac{X}{Y} \leqslant x\Big] = [T \leqslant \ln x] \implies F_{X/Y}(x) = F_T(\ln x)$$

Par dérivation, une densité de $\dfrac{X}{Y}$ est définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} f_T(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. C'est une application de la question précédente. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, si Y suit la loi $\mathcal{E}(\mu)$, et si X, Y sont indépendantes, $\dfrac{X}{Y}$ a pour densité :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda\mu \displaystyle\int_0^{+\infty} u.\mathrm{e}^{-(\lambda x + \mu)u}\, du & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc, pour $x > 0$, après une intégration par parties :

$$g(x) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda x + \mu)^2} = \frac{\mu/\lambda}{(x + \mu/\lambda)^2}$$

On reconnaît une loi de Pareto de paramètres $\alpha = 1, a = \mu/\lambda, x_0 = -\mu/\lambda$.

3. Il suffit d'appliquer la formule proposée :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|.\mathrm{e}^{-(xt)^2/2}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-(x^2+1)t^2/2}\,dt$$

Soit, en intégrant « à vue » :

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}}$$

On dit que $\dfrac{X}{Y}$ suit une loi de Cauchy.

Exercice 10.

1. Soient deux entiers naturels n et r avec $0 \leqslant r \leqslant n$.
On définit la fonction $F_{r,n}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ F_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} C_k^r x^k$$

a) Montrer que pour tout x réel, on a $(1-x)F_{r,n}(x) = xF_{r-1,n-1}(x) - C_n^r x^{n+1}$.

b) Soit $x \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$ fixés. Donner un équivalent simple de $C_n^r x^{n+1}$ quand n tend vers l'infini.

c) Montrer que pour tout x tel que $0 < x < 1$ et $r \in \mathbb{N}$ fixés, $F_{r,n}(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

On dispose de deux pièces de monnaie. La première pièce donne « Pile » avec la probabilité p et la seconde avec la probabilité $q = 1 - p$. ($p \in]0,1[$).

• on lance la première pièce jusqu'à obtenir pour la première fois « Pile ». Soit N le nombre de lancers effectués.

• on lance alors N fois la seconde pièce et on note X la variable aléatoire égale au nombre de « Pile » obtenus durant ces N tirages.

2. a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance. Commenter les cas où $p = q = 1/2$ et où p est de la forme $1/r$.

Solution :

1. a) On utilise la relation appelée « du triangle de Pascal », soit :

$$\mathrm{C}_k^r = \mathrm{C}_{k-1}^{r-1} + \mathrm{C}_{k-1}^r$$

avec les conventions habituelles de nullité.

Pour tout x réel :

$$F_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_k^r x^k = \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r-1} x^k + \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^r x^k$$

Or :

$$\sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r-1} x^k = \sum_{k=r-1}^{n-1} \mathrm{C}_k^{r-1} x^{k+1} = xF_{r-1,n-1}(x)$$

$$\sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r} x^k = \sum_{k=r+1}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r} x^k, \text{ car } \mathrm{C}_{r-1}^r = 0$$

$$\sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^{r} x^k = \sum_{k=r}^{n} \mathrm{C}_{k}^{r} x^{k+1} = x\left(F_{r,n}(x) - C_n^r x^n\right)$$

D'où :

$$\boxed{(1-x)F_{r,n}(x) \;=\; xF_{r-1,n-1}(x) - C_n^r x^{n+1}}$$

b) Soit $x \in]0,1[$. Raisonnons par récurrence sur r :

- si $r = 0$, $F_{0,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ admet $\dfrac{1}{1-x}$ pour limite lorsque n tend vers l'infini.
- si $r = 1$, $F_{1,n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} kx^k$ admet $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ pour limite lorsque n tend vers l'infini.
- supposons que pour $r > 0$, $F_{r-1,n}(x)$ admette $\dfrac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$ pour limite lorsque n tend vers l'infini ; la relation précédente et la remarque suivante :

$$\mathrm{C}_n^r x^{n+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^{n+1} \sim \frac{n^r}{r!}x^{n+1}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (prépondérance classique), donnent pour $x \in]0,1[$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}}$$

2. a) La loi conditionnelle de X, conditionnée par la réalisation de l'événement $[N = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et q, et $([N = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = k/N = n)P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^k q^k p^{n-k} p q^{n-1}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^k (pq)^n = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \frac{(pq)^k}{(1-pq)^{k+1}} = \frac{pq^{2k-1}}{(1-pq)^{k+1}}$$

Et pour $k = 0$:

$$P(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n p q^{n-1} = \frac{q}{p}\sum_{n=1}^{\infty} (q^2)^n = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}$$

b) La série $\sum\limits_k k\dfrac{pq^{2k-1}}{(1-pq)^{k+1}}$ est convergente.

Le terme général s'écrit : $\dfrac{pq}{(1-pq)^2}k\left(\dfrac{q^2}{1-pq}\right)^{k-1}$, avec $0 < \dfrac{q^2}{1-pq} < 1$.

On a alors :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{pq^{2k-1}}{(1-pq)^{k+1}} = \frac{pq}{(1-pq)^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\Big(\frac{q^2}{1-pq}\Big)^{k-1}$$
$$= \frac{pq}{(1-pq)^2}\frac{1}{(1-\frac{q^2}{1-pq})^2} = \frac{pq}{(1-pq-q^2)^2} = \frac{q}{p}$$

$\star$ Si $p = q = 1/2$, on joue en moyenne 2 fois avec la première pièce et on a donc en moyenne 1 fois Pile avec la seconde. Le résultat ci–dessus paraît normal.

$\star$ Si $p = 1/r$, $E(N) = r$ et on joue en moyenne r fois avec la probabilité $\dfrac{r-1}{r}$ d'obtenir Pile. On obtient Pile en moyenne $(r-1)$ fois. On retrouve $E(X) = \dfrac{q}{p}$.

Exercice 11.

1. Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose $Y = \ln X$.

Déterminer la loi de Y.

2. Soit (a,b) deux variables aléatoires à densité, indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $]0,1]$. A tout $\omega \in \Omega$, on associe l'équation :
$$a(\omega)x^2 - b(\omega)x + 1 = 0$$
On note $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ les racines dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

Déterminer la loi de la variable aléatoire S définie par :
$$S(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega)$$

Solution :

1. On sait que $Y(\Omega) =]-\infty, 0]$. Aussi pour tout $x \leqslant 0$:
$$P(Y \leqslant x) = P(\ln(X) \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x)$$
où F_X est la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
Par conséquent :
$$F_Y(x) = \begin{cases} F_X(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
et une densité de Y est alors :
$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

2. On sait que : $S(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega) = \dfrac{b(\omega)}{a(\omega)}$

Pour déterminer la loi de S on étudie la loi de $\ln S = \ln b - \ln a = Z_1 - Z_2$, avec comme densités respectives :

$$f_{Z_1}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f_{-Z_2}(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Une densité h de $\ln(S)$ est alors définie par convolution :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1}(t) f_{-Z_2}(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^t f_{-Z_2}(x-t)\,dt$$

donc :

$$h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{2t-x}\,dt = \frac{e^x}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2t-x}\,dt = \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Enfin, comme $S(\Omega) = \mathbb{R}^+$, il vient, pour $x \geqslant 0$:

$$P(S \leqslant x) = P(\ln S \leqslant \ln x) = F_{\ln S}(\ln x)$$

soit :

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ F_{\ln S}(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et :

$$\boxed{f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/(2x^2) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

Exercice 12.

Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

1. Montrer que I converge. Déterminer sa valeur.

2. Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

a) Montrer que f est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité. X a-t-elle une espérance ? une variance ?

Solution :

1. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$ est continue sur $]-1, 1[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

• au voisinage de 1, on a $0 < g(x) \sim \dfrac{1}{4\sqrt{1-x}}$ fonction qui est intégrable au voisinage de ce point (intégrale de référence de Riemann).

• au voisinage de -1, on fait un raisonnement identique en valeur absolue, ou mieux on invoque l'imparité de la fonction à intégrer.

Enfin, puisque g est impaire et l'intégrale convergente, il vient :

$$\boxed{I = 0}$$

2. a) La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{a,b\to 0} \int_b^{1-a} \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

La fonction cosinus est bijective de $[0,\pi/2]$ sur $[0,1]$ et de classe C^1. Posons $x = \sqrt{\cos t}$. Il vient :

$$2\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0,\beta\to\pi/2} \int_\beta^\alpha \frac{2\,dt}{2(1+\cos t)} = \lim_{\alpha\to 0,\beta\to\pi/2} \int_\beta^\alpha \frac{dt}{2\cos^2(t/2)}$$

$$\boxed{2\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0,\beta\to\pi/2} \big[\tan t\big]_\alpha^\beta = 1}$$

b) Au voisinage du point 1, on a :

$$0 < \frac{2x^n}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{2}{\sqrt{1-x}}$$

Ainsi, l'intégrale définissant $E(X^n)$ est convergente, et X admet un moment d'ordre n, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13.

Soient n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1. Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$, $n+p$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
On note :

$$R_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad S_p = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$$

a) Déterminer la loi de R_n et la loi de S_p.

b) En déduire la loi de $\ln R_n$ et celle de $\ln S_p$, où ln représente la fonction logarithme népérien.

c) En déduire une densité de la variable aléatoire $P = R_n S_p$.

d) Montrer que P admet des moments de tous ordres. Calculer son espérance.

2. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p)$, $n+p$ nombres réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \max(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \max_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} (x_i y_j)$$

3. En utilisant le résultat de la question précédente, on cherche à déterminer la loi de P de la manière suivante :

- on détermine la loi du produit $X_i Y_j$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$.
- on détermine la loi de $\displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} X_i Y_j$.

Cette méthode présente un inconvénient majeur. Lequel ?

Solution :

1. a) On sait que $R_n(\Omega) = [0,1]$, et pour tout x de cet intervalle :

$$P(R_n < x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x) = x^n$$

Donc la fonction de répartition de R_n est donnée par :

$$\boxed{F_{R_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Le calcul de la loi de S_p est identique.

b) On a $\ln(\mathbb{R}_n)(\Omega) = \mathbb{R}^-$, et pour tout $x \leqslant 0$: $F_{\ln R_n}(x) = \mathrm{e}^{nx}$. Une densité est alors :

$$\boxed{f_{\ln R_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ n.\mathrm{e}^{nx} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Le calcul de la loi de $\ln S_p$ est identique.

c) Par indépendance des variables aléatoires en jeu, et par convolution, si on pose $Z = \ln R_n + \ln S_p$:

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\ln R_n}(u) f_{\ln S_p}(x-u)\, du = \int_x^0 np.\mathrm{e}^{px}\mathrm{e}^{(n-p)u}\, du \quad \text{pour } x < 0$$

Donc :

- si $n = p$

$$f_Z(x) = \begin{cases} -xn^2.\mathrm{e}^{nx} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- si $n \neq p$

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{np}{n-p}(\mathrm{e}^{px} - \mathrm{e}^{nx}) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis $f_P(x) = f_Z(\ln x) \times \dfrac{1}{x}$, soit :

$$\boxed{\text{si } n \neq p : \ f_P(x) = \begin{cases} \dfrac{np}{n-p}(x^{p-1} - x^{n-1}) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{si } n = p : \ f_P(x) = \begin{cases} -n^2 x^{n-1}\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

d) On voit que $E(P^k)$ existe dès que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ et un calcul immédiat donne :

$$\boxed{E(P) = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 & \text{si } n = p \\ \dfrac{np}{(n+1)(p+1)} & \text{si } n \neq p \end{cases}}$$

2. Classons les $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et les $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ en notant :

$$\begin{cases} \min(x_i) = x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)} = \max(x_i) \\ \min(y_j) = y_{(1)} \leqslant y_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant y_{(p)} = \max(y_j) \end{cases}$$

Alors $\max(x_i) \times \max(y_j) = x_{(n)}.y_{(p)}$ et ce produit reste supérieur à tout produit $x_k.y_\ell$.

3. Il est simple de déterminer la loi de X_iY_j, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. Mais les np variables aléatoires X_iY_j ne sont pas indépendantes !
La loi de $\max\limits_{i,j}(X_iY_j)$ sera nettement plus difficile à obtenir.

Exercice 14.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω et à valeurs dans $\{1, \ldots, n+1\}$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$,

$$a_{i,j} = P(X = i, Y = j)$$

On suppose que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{si } |i + j - (n+2)| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Vérifier que la famille $(a_{i,j})$ ainsi définie est bien une loi de probabilité de couple.

b) Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $a_{i,j}$. Vérifier que A est diagonalisable.

2. Déterminer les lois de probabilité de X et Y.

3. Pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$, on pose :

$$b_{i,j} = P(X = i / Y = j)$$

(où $P(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A, sachant que B est réalisé).

Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme général est $b_{i,j}$.

Montrer que le vecteur $v = \begin{pmatrix} P(X = 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(X = n+1) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B.

Solution :

1. a) Tous les scalaires $a_{i,j}$ sont positifs ou nuls. Déterminons le nombre de termes $a_{i,j}$ non nuls. Ce sont les termes pour lesquels :

- soit $i + j = n + 3$, avec $1 \leqslant i, j \leqslant n + 1$, soit tous les couples (i, j) de la forme $(i, n+3-i)$, avec $1 \leqslant i, n+3-i \leqslant n+1$ ou $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Il y en a n ;

- soit $i+j=n+1$, avec $1\leqslant i,j\leqslant n+1$, soit tous les couples (i,j) de la forme $(i,n+1-i)$, avec $1\leqslant i,n+1-i\leqslant n+1$ ou $1\leqslant i\leqslant n$. Il y en a n également.

Au total il y en a $2n$. Ceci montre que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} a_{i,j}=1$ et on a bien défini une loi de probabilité.

b) La matrice A s'écrit sous la forme :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1/2n & 0\\ 0 & \dots & \dots & 1/2n & 0 & 1/2n\\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots\\ 1/2n & \iddots & \iddots & & & \vdots\\ 0 & 1/2n & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

2. La loi de X est donnée par $P(X=i)=\sum\limits_{j=1}^{n+1} a_{i,j}$. Donc :

- $P(X=1)=\dfrac{1}{2n}$, $(a_{1,n}\neq 0)$.
- $P(X=n+1)=\dfrac{1}{2n}$, $(a_{n+1,2}\neq 0)$.
- pour $2\leqslant i\leqslant n, P(X=i)=\dfrac{1}{n}$, $(a_{i,n+3-i},a_{i,n+1-i}\neq 0)$.

Par raison de symétrie Y suit la même loi que X.

3. a) On a, pour tout $1\leqslant i,j\leqslant n+1$: $b_{i,j}=\dfrac{a_{i,j}}{P(Y=j)}$

- $b_{1,j}\neq 0$ si et seulement si $j=n$. Donc $b_{1,n}=\dfrac{1}{2}$.
- $b_{n+1,j}\neq 0$ si et seulement si $j=2$. Donc $b_{n+1,2}=\dfrac{1}{2}$.
- Pour $2\leqslant i\leqslant n$, $b_{i,j}\neq 0$ si et seulement si $j=n+3-i$ ou $j=n+1-i$.

Donc :

$$\begin{cases} b_{2,n+1}=1 & b_{i,n+3-i}=1/2\\ b_{n,1}=1 & b_{i,n+1-i}=1/2 \end{cases}$$

ce qui donne la matrice :

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1/2 & 0\\ 0 & \dots & \dots & 1/2 & 0 & 1\\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots\\ 1 & 0 & 1/2 & \iddots & & \vdots\\ 0 & 1/2 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

b) On vérifie alors aisément que :

$$B\begin{pmatrix}1/2n\\1/n\\\vdots\\1/n\\1/2n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2n\\1/n\\\vdots\\1/n\\1/2n\end{pmatrix}$$

Exercice 15.

Soit $p\in]0,1[$ et $q=1-p$. On considère la matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-p^2q&0&1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont p et les deux réels a et b définis par :

$$\begin{cases}a+b&=&q\\ab&=&-pq\end{cases}$$

2. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$, pour lesquelles, à chaque épreuve, la probabilité du succès est p.
Si l'on obtient deux succès consécutifs, on dit que l'on a réalisé un doublé.
Pour tout $n\geqslant 2$, on note :

• A_n l'événement «le premier doublé est obtenu par un succès à la $(n-1)^{\text{ème}}$ épreuve et un succès à la $n^{\text{ème}}$ épreuve».

• B_n l'événement : «un doublé au moins est obtenu dans les n premières épreuves».

On note $p_n=P(A_n)$ et on pose $p_1=0$.

a) Montrer que $P(B_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$, puis que :

$$p_{n+3}=p^2q\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_k\right)$$

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $p_{n+3}=p_{n+2}-p^2qp_n$, puis que :

$$p_n=p^2\,\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$$

Solution :

La méthode du pivot de Gauss appliquée à la matrice $A-\lambda I$ donne :

$$A-\lambda I\sim\begin{pmatrix}-p^2q&0&1-\lambda\\0&p^2q&\lambda(\lambda-1)\\0&0&P(\lambda)\end{pmatrix}$$

où :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - p^3 + p^2 = (\lambda - p)(\lambda^2 - \lambda q - pq)$$

Ainsi λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda = p$ ou $\lambda^2 - \lambda q - pq = 0$. Les racines a et b de cette dernière équation sont réelles et distinctes (car son discriminant $\Delta = q^2 + 4pq$ est strictement positif), et elles vérifient :

$$\begin{cases} a + b = q \\ ab = -pq \end{cases}$$

2. a) L'événement B_n est « un doublé au moins est obtenu dans les n premières épreuves ». C'est donc également « un premier doublé est obtenu dans les n premières épreuves ». Ainsi :

$$B_n = \bigcup_{k=2}^{n} A_k$$

événements qui sont deux à deux incompatibles. Donc :

$$P(B_n) = \sum_{k=2}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \text{ (car } p_1 = 0)$$

Notons S_i (resp. E_i) l'événement « obtenir un succès (resp. un échec) à la i^{eme} épreuve ». On a alors :

$$B_{n+3} = \overline{B_n} \cap E_{n+1} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3}$$

et, par indépendance :

$$p_{n+3} = P(\overline{B_n})P([E_{n+1} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3}]/\overline{B_n}) = (1 - p_n)p^2 q$$

Donc :

$$p_{n+3} = p^2 q\big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\big)$$

b) On a :

$$p_{n+3} - p_{n+2} = p^2 q\big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\big) - p^2 q\big(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\big) = -p^2 q p_n$$

Enfin, montrons la relation :

$$p_n = p^2 \, \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}$$

par récurrence sur n.

- La relation est vérifiée pour $n = 1$ ($p_1 = 0$) et $n = 2$ ($p_2 = p^2$) ;
- supposons la relation vérifiée jusqu'à un certain ordre $n + 2$. Alors :

$$\begin{aligned} p_{n+3} &= p_{n+2} - p^2 q p_n = p^2 \, \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} - p^4 q \, \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} \\ &= \frac{p^2}{a - b}\big(a^{n-1}(a^2 - p^2 q) - b^{n-1}(b^2 - p^2 q)\big) \end{aligned}$$

Or, par la première question, a et b vérifient $a^2 - p^2 q = a^3, b^2 - p^2 q = b^3$, ce qui permet d'achever la démonstration de la récurrence.

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout réel a, l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{e^{2t} + 1}$ est convergente et la calculer.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité (on pourra utiliser le changement de variable $x = \tan u$).

3. Montrer, en les calculant, qu'il existe deux réels A et B, indépendants de u tels que, $\forall\, u \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{(u+1)(\mathrm{e}^{2x}+u)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{\mathrm{e}^{2x}+u}$$

4. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, de densité f.

a) Déterminer une densité de $\ln|X|$.

b) Déterminer une densité de $Z = \ln(|XY|)$.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car son dénominateur est continu et ne s'annule pas), donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Au voisinage de $+\infty$: $0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}+1} \sim \mathrm{e}^{-2t}$, fonction qui est intégrable sur ce voisinage. On en déduit que $I(a)$ existe par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.
Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$ donne :

$$I(a) = \int_0^{\mathrm{e}^{-a}} \frac{udu}{u^2+1} = \frac{1}{2}\big[\ln(u^2+1)\big]_0^{\mathrm{e}^{-a}} = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2a}+1)$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives. Le changement de variable $u = \tan x$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = 1$$

3. Il suffit de réduire au même dénominateur et d'identifier pour obtenir :

$$\frac{1}{(u+1)(\mathrm{e}^{2x}+u)} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2x}}\Big(\frac{1}{u+1} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+u}\Big)$$

4. a) Pour tout x réel :

$$P(\ln|X| \leqslant x) = P(|X| \leqslant \mathrm{e}^x) = P(\mathrm{e}^{-x} \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x) - F_X(\mathrm{e}^{-x})$$

et si g désigne une densité de $\ln|X|$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{2.\mathrm{e}^x}{\pi(\mathrm{e}^{2x}+1)}$$

b) On a $Z = \ln|XY| = \ln|X| + \ln|Y|$. Ces deux variables aléatoires sont indépendantes, puisque X et Y le sont. Une densité h de Z est alors donnée par convolution :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g(x-t)\,dt = \frac{4.\mathrm{e}^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(\mathrm{e}^{2t}+1)(\mathrm{e}^{2x-2t}+1)}$$

ou

$$h(x) = \frac{4.\mathrm{e}^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2t}\,dt}{(\mathrm{e}^{2t}+1)(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2t})}$$

Pour $x \neq 0$ et en utilisant la question précédente :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2t}\,dt}{((\mathrm{e}^{2t}+1)(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2t})} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2x}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{2t}+1} - \frac{1}{e^{2(t-x)}+1}\Big)dt$$

On ne peut partager cette dernière intégrale en deux, puisque chaque intégrale diverge en $-\infty$. Il faut donc écrire : :

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_a^{+\infty}\frac{dt}{\mathrm{e}^{2t}+1} - \int_a^{+\infty}\frac{dt}{\mathrm{e}^{2(t-x)}+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2a}+1) - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2(a-x)}+1) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\mathrm{e}^{-2a}+1}{\mathrm{e}^{-2(a-x)}+1}\Big) \end{aligned}$$

et : $\lim_{a\to-\infty} J(a) = \frac{1}{2}\ln\big(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\big) = -x$

Donc, pour $x \neq 0$:

$$\boxed{h(x) = \frac{4x.\mathrm{e}^x}{\pi^2(\mathrm{e}^{2x}-1)}}$$

qui se prolonge par continuité en 0 par $h(0) = \dfrac{2}{\pi^2}$.

Exercice 17.

On admet que la mesure d'une grandeur physique, dont la valeur exacte est m, suit une loi normale $\mathcal{N}\big(m, \frac{m}{10}\big)$, d'espérance m et d'écart-type $\dfrac{m}{10}$.

On effectue une série de n mesures indépendantes et on note Y_n la moyenne des résultats obtenus.

1. Montrer que Y_n est un estimateur sans biais et convergent de m.

2. Combien faut-il effectuer de mesures pour que l'erreur relative commise sur m soit inférieure à 1% avec une probabilité supérieure à 0,9 ?

On pourra utiliser la table de la loi normale jointe au sujet.

Solution :

1. La variable aléatoire Y_n suit la loi normale $\mathcal{N}\big(m, \frac{m}{10\sqrt{n}}\big)$, donc son espérance et sa variance valent :

$$\boxed{E(Y_n) = m, \quad V(Y_n) = \frac{m^2}{10n^2}}$$

Ainsi Y_n est un estimateur sans biais et convergent de m.

2. Notons Y_n^* la variable centrée réduite associée à Y_n. Alors :

$$P\big(|Y_n - m| < \frac{m}{100}\big) = P\big(|Y_n^*| < \frac{\sqrt{n}}{10}\big) = 2\Phi\big(\frac{\sqrt{n}}{10}\big) - 1$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. D'où, en utilisant une table de la fonction Φ :

$$\boxed{2\Phi\big(\frac{\sqrt{n}}{10}\big) - 1 \geqslant 0.9 \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{10} \geqslant 1.65 \Longleftrightarrow n \geqslant 273}$$

Exercice 18.

On effectue une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers le résultat « Pile » n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

1. a) Calculer p_1, p_2 et p_3.
Dans la suite on pose $p_0 = 1$.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{8}p_{n-3} \qquad (\star)$$

2. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum p_n x^n$ est convergente.

b) Pour $x \in [0,1]$, calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

3. a) Montrer que l'équation $(E) : 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1 = 0$ admet une unique racine réelle ; on la note r. Encadrer r par deux entiers consécutifs.

b) Montrer que l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées, ω et $\overline{\omega}$, de module strictement inférieur à r.

c) Montrer que la suite (p_n) est une combinaison linéaire des trois suites $(r^n), (\omega^n)$ et $(\overline{\omega}^n)$. (On pourra montrer que le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des suites complexes vérifiant la relation $(\star)$ est de dimension 3).

d) En déduire la convergence et la limite de la suite $(p_n)_n$. Donner une explication du résultat obtenu.

Solution :

1. a) On trouve $p_1 = p_2 = 1$ et $p_3 = \frac{7}{8}$, puisque l'événement contraire « obtenir trois Piles consécutifs » se réalise avec la probabilité $\frac{1}{8}$.

b) Si $n \geqslant 4$, on n'a pas encore conclu au bout de trois tirages et on a donc pu obtenir F_1 ou P_1F_2 ou $P_1P_2F_3$, où P_i (resp. F_i) consiste à obtenir Pile (resp. Face) au $i^{\text{ème}}$ lancer. A l'issue de chacune de ces séquences on est alors revenu au point de départ.
Ainsi, notons A l'événement « ne pas obtenir 3 Piles consécutifs au cours des n premiers lancers » :

$p_n = P(A/F_1)P(F_1) + P(A/(P_1 \cap F_2))P(P_1 \cap F_2)$

$$+P(A/(P_1 \cap P_2 \cap F_3))P(P_1 \cap P_2 \cap F_3)$$

soit :

$$\boxed{p_n = \frac{1}{2}\,p_{n-1} + \frac{1}{4}\,p_{n-2} + \frac{1}{8}\,p_{n-3}}$$

2. a) Comme $0 \leqslant p_n \leqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant p_n x^n \leqslant x^n$. On en déduit la convergence de la série $\sum p_n x^n$.

b) Par convergence des séries en question, on peut écrire :

$$\sum_{n\geqslant 3} p_n x^n = \frac{x}{2}\Big(\sum_{n\geqslant 3} p_{n-1}x^{n-1}\Big) + \frac{x^2}{4}\Big(\sum_{n\geqslant 3} p_{n-2}x^{n-2}\Big) + \frac{x^3}{8}\Big(\sum_{n\geqslant 3} p_{n-3}x^{n-3}\Big)$$

ou, en notant $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$:

$$S(x) - 1 - x - x^2 = \frac{x}{2}\big(S(x) - 1 - x\big) + \frac{x^2}{4}\big(S(x) - 1\big) + \frac{x^3}{8}\,S(x)$$

soit :

$$\boxed{S(x) = \frac{2x^2 + 4x + 8}{8 - 4x - 2x^2 - x^3}}$$

3. a) Soit $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$. On a :

$$P'(x) = 24x^2 - 8x - 2 = 24(x - 1/2)(x + 1/6).$$

Ceci permet d'étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ et d'en déduire que $P(x) < 0$ pour $x \leqslant 1/2$, puis que P est strictement croissante sur $[1/2, +\infty[$.

Comme $P(0)P(1) < 0$, l'équation (E) admet une unique racine réelle r appartenant à $]0, 1[$.

b) On remarque d'abord que P étant un polynôme réel de degré 3, le théorème de d'Alembert permet d'affirmer que P admet deux racines complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$.

Soit donc ω tel que $P(\omega) = 0$. Alors $8\omega^3 = 4\omega^2 + 2\omega + 1$ entraîne que

$$8|\omega|^3 \leqslant 4|\omega|^2 + 2|\omega| + 1$$

donc que $P(|\omega|) < 0$, ce qui d'après les variations de P entraîne que $|\omega| < r$.

c) Le $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites complexes vérifiant la relation $(\star)$ est de dimension 3.

$\star$ On montre en effet facilement que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites sur $\mathbb{C}$.

$\star$ Il suffit ensuite de montrer que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ de $\mathcal{S}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 0 & u_2 = 0 \\ v_0 = 0 & v_1 = 1 & v_2 = 0 \\ w_0 = 0 & w_1 = 0 & w_2 = 1 \end{cases}$$

en forment une base.

- toute suite de $\mathcal{S}$ étant définie par ses trois premiers termes est donc combinaison linéaire des trois suites définies ; la famille proposée est génératrice.

• ces trois suites forment un système libre, puisque toute suite de $\mathcal{S}$ identiquement nulle a ses trois premiers termes nuls et donc tous ses termes nuls.

Montrons que les trois suites $(r^n), (\omega^n), (\overline{\omega}^n)$ forment un système libre :
si pour tout $n \geqslant 0$: $\lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n = 0$, on divise par r^n, puis on fait tendre n vers l'infini pour obtenir $\lambda = 0$. En faisant alors $n = 0$, puis $n = 1$, comme $\omega \neq \overline{\omega}$, il vient $\mu = \nu = 0$.

d) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n$.
Comme $|\omega| = |\overline{\omega}^n| < r$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{\lambda r^n} = 1$$

soit $p_n \sim \lambda r^n$, et comme $0 < r < 1$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0}$$

Explication : lors d'un «grand» nombre de lancers, il y aura presque certainement une séquence de 3 piles consécutifs.

Exercice 19.

On note $X_{n,p}$ une variable aléatoire binomiale de paramètre (n,p), où n est un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$.

1. On pose $p_k = P[X_{n,p} = k]$, avec $k \in [\![0,n]\!]$. Rappeler la formule donnant p_k.

2. Soit k un entier naturel compris au sens large entre 0 et $n-1$, on pose $t(k) = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$.
Calculer $t(k)$ en fonction de n, p, et k.

3. Les nombres n et p étant supposés fixés tels que le produit $n.p$ soit égal à un entier naturel non nul λ, montrer qu'il existe un unique entier naturel k_0 compris entre 0 et $n-1$, que l'on calculera en fonction de n et p, puis de λ, tel que :

- pour tout entier naturel k, $0 \leqslant k \leqslant k_0 \implies t(k) \geqslant 1$, et
- pour tout entier naturel k, $n-1 \geqslant k > k_0 \implies t(k) < 1$.

En déduire la valeur $M(n,p)$ du maximum de p_k, et une valeur $k_{\max}$ de l'indice k pour laquelle ce maximum est atteint.

4. On suppose maintenant que la variable aléatoire binomiale X_{n,p_n} a pour paramètre (n,p_n), avec $p_n \in]0,1[$.
On cherche à étudier le comportement de $M(n,p_n)$ selon les valeurs de n.
On continue à supposer que pour tout n entier naturel, $np_n = \lambda$ est fixé, λ entier naturel non nul.

a) Montrer que $M(n,p_n)$ admet lorsque n tend vers l'infini une limite finie que l'on déterminera en fonction de λ.

b) Comparer le résultat obtenu avec la valeur du maximum de la loi de Poisson de paramètre λ.

Solution :

1. $\forall\, k \in [\![0, n]\!], p_k = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

2. En revenant aux factorielles : $t(k) = \dfrac{n-k}{k+1}\,\dfrac{p}{1-p}$.

3. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$: $t(k) \geqslant 1 \iff (n-k)p \geqslant (k+1)(1-p)$

$$\iff (n+1)p \geqslant k+1$$

Le nombre k_0 cherché est donc $\lfloor (n+1)p - 1 \rfloor$, car on vérifie facilement que ce nombre est bien compris entre 0 et $n-1$.
Or $k_0 + 1 = \lfloor (n+1)p \rfloor = \lfloor np + p \rfloor = \lfloor np \rfloor = \lambda$, et :

$$\boxed{M(n,p) = \mathrm{C}_n^\lambda p^\lambda (1-p)^{n-\lambda}}$$

4. a) En remplaçant et en utilisant la relation $n.p_n = \lambda$:

$$M(n,p_n) = \frac{n!}{\lambda!(n-\lambda)!}\Big(\frac{p_n}{1-p_n}\Big)^\lambda \Big(\frac{1}{1-p_n}\Big)^{-n}$$
$$= \frac{\lambda^\lambda}{\lambda!}\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-\lambda} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-\lambda+1)}{n\cdot n\cdots n}$$

Or $\Big(1-\dfrac{\lambda}{n}\Big)^{n-\lambda} = \exp\big((n-\lambda)\ln(1-\frac{\lambda}{n})\big) = \exp\big((n-\lambda)(-\frac{\lambda}{n} + o(n^{-1})\big)$

$$= \exp\big(-\lambda + o(1)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-\lambda+1)}{n\cdot n\cdots n} = 1$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} M(n,p_n) = \frac{\lambda^\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda!}}$$

b) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $q_k = P(Y=k) = \dfrac{\lambda^k.\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$. Alors :
$\dfrac{q_{k+1}}{q_k} = \dfrac{\lambda}{k+1}$ et le maximum de q_k est obtenu pour q_λ.
On trouve donc le même résultat que dans la question précédente (ce qui n'est pas très étonnant puisque l'on est dans les conditions d'approximation du phénomène binomial par le phénomène de Poisson).

Exercice 20.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.

2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Etudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

3. On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = \varphi(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$$

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Solution :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et positive.
On remarque que $x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ est une primitive de f et donc :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{1 + e^{-b}} - \frac{1}{1 + e^{-a}}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut 1 :

f est une densité de probabilité

Si X est une variable aléatoire de densité f, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}}$$

2. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, et : $\varphi'(x) = \dfrac{2.e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$.
Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$, φ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
$y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \iff e^x = \dfrac{1 + y}{1 - y}$ et donc $\forall y \in]-1, 1[, \varphi^{-1}(y) = \ln\big(\dfrac{1 + y}{1 - y}\big)$.

3. Y prend ses valeurs dans $]-1, 1[$ et, pour tout x de $]-1, 1[$:

$$P(Y \leqslant x) = P(\varphi(X) \leqslant x) = P\big(X \leqslant \varphi^{-1}(x)\big) = P\big(X \leqslant \ln\big(\frac{1 + x}{1 - x}\big)\big)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-\ln(\frac{1+x}{1-x})}} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{x + 1}{2}$$

Ainsi : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1, 1[)}$

Exercice 21.

1. Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre aléatoire de « face » obtenus au cours de cette expérience.

a) Déterminer la loi de X. Vérifier que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$.

b) Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.

2. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite une boule de cette urne.
On note alors Y le numéro obtenu.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.

3. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Solution :

1. a) $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(X=n)$ est réalisé si et seulement si on obtient exactement une fois « pile » au cours des $(n+1)$ premiers lancers, le $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer amenant « pile », soit, avec $q=1-p$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n)=(n+1)pq^np=(n+1)p^2q^n$$

La série rencontrée est une série de référence et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=p^2\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}=p^2\,\frac{1}{(1-q)^2}=1$$

b) La convergence est à nouveau évidente, et :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty} n.P(X=n)=p^2q\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}=p^2q\,\frac{2}{(1-q)^3}$$

$$\boxed{E(X)=\frac{2q}{p}}$$

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0,n+1]\!], P(Y=k/X=n)=\dfrac{1}{n+1}$ et, par la formule des probabilités totales :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Y=k)=\sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k/X=n)P(X=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)p^2q^n\,\frac{1}{n+1}=p^2q^k\sum_{n=k}^{\infty} q^{n-k}=p^2q^k\,\frac{1}{1-q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, P(Y=k)=pq^k}$$

b) $Y+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $E(Y)=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{q}{p}$.

3. La variable Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(Z=h)=\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}[(Y=j)\cap(X=h+j)]$.

Cette réunion étant disjointe, il vient :

$P(Z = h) = \sum_{j=0}^{\infty} P(Y = j / X = h + j) P(X = h + j) = \sum_{j=0}^{\infty} p^2 q^{h+j}$

$$\boxed{\forall\, h \in \mathbb{N}, P(Z = h) = p^2 q^h \, \frac{1}{1-q} = pq^h}$$

On a : $P[(Z = h) \cap (Y = j)] = P[(X = h + j) \cap (Y = j)]$

$= P(Y = j / X = h + j) P(X = h + j) = p^2 q^{h+j}$

On constate que l'on a : $P[(Z = h) \cap (Y = j)] = P(Z = h) P(Y = j)$ et :

$$\boxed{Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes}}$$

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a.3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a.3^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   a) Déterminer la fonction de répartition de X

   b) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et la calculer.

3. On pose $Y = 3^X$.

   a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

   b) Y admet-elle une espérance ?

Solution :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive si $a \geqslant 0$ et :

$\int_0^{+\infty} 3^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x \ln 3}\, dx = \frac{1}{\ln 3}$

$\int_{-\infty}^{0} 3^{x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x \ln 3}\, dx = \frac{1}{\ln 3}$

Ainsi f est une densité de probabilité si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$, *i.e.* si $\boxed{a = \frac{1}{2} \ln 3}$

2. a) $\star$ Si $x \leqslant 0$, $F(x) = \frac{1}{2} \ln 3 \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t \ln 3}\, dt = \frac{1}{2}\, 3^x$.

   $\star$ Si $x \geqslant 0$, $F(x) = F(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{-t \ln 3}\, dx = 1 - \frac{1}{2}\, 3^{-x}$.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ est convergente, car la fonction à intégrer est négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$; il en est de même par imparité pour l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt$ et, toujours par imparité :

$$\boxed{E(X) = 0}$$

3. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall\, x \geqslant 0, P(Y \leqslant x) = P(3^X \leqslant x) = P(X \leqslant \frac{\ln x}{\ln 3}).$$

$\star$ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F_Y(x) = \frac{1}{2}\, 3^{\frac{\ln x}{\ln 3}} = \frac{x}{2}$

$\star$ Si $x > 1$, $F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2}\, 3^{-\frac{\ln x}{\ln 3}} = 1 - \frac{1}{2x}$

b) Pour $x > 1$, on prend pour densité de Y la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x^2}$; comme $xf(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2x}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est divergente et Y n'a pas d'espérance.

Exercice 23.

Soit n un entier naturel de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n. On effectue trois tirages au hasard d'une boule de cette urne, en replaçant à chaque fois la boule obtenue avant le tirage suivant.
On désigne par M la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus et par m la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus, et enfin, par Z la variable aléatoire égale à $M - m$.

1. a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Z.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

c) Déterminer, en fonction de l'entier n, l'espérance $E(Z)$.

2. a) Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X+1) - P(X) = nX^3 - X^4$$

b) En déduire la variance $V(Z)$ en fonction de n.

Solution :

1. a) $Z(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.

b) $\star$ $(Z = 0)$ est réalisé si on obtient trois fois la même boule, donc :

$$P(Z=0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}$$

$\star$ Pour $k \neq 0$, $(Z = k)$ est réalisé si le plus petit numéro obtenu vaut i, le plus grand valant alors $i + k$, et i pouvant varier depuis 1 jusqu'à $n - k$.

Il existe $6(k-1)$ tirages réalisant $\min = i, \max = i+k$, le troisième numéro obtenu étant strictement compris entre i et $i+k$ (on choisit les trois numéros, et on peut les ordonner de 3! façons), et il existe 3 tirages où le min est doublé et également trois tirages où le max est doublé.
Ainsi :

$$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{6(k-1)+6}{n^3} = \frac{6k(n-k)}{n^3}$$

c) Ainsi $E(Z) = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 6k^2(n-k) = \dfrac{6}{n^3}\big(n \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3\big)$

$$\boxed{E(Z) = \frac{n^2-1}{2n}}$$

2. a) Par disparition des termes de plus haut degré, on cherche un polynme de degré 5 et, par identification, on trouve :

$$\boxed{P(X) = -\frac{X^5}{5} + \frac{n+2}{4} X^4 - \frac{3n+2}{6} X^3 + \frac{n}{4} X^2 + \frac{1}{30} X}$$

Par addition : $P(n) - P(1) = P(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3(n-k)$, d'où :

$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \dfrac{6}{n^3} P(n) - \big(\dfrac{n^2-1}{2n}\big)^2$, soit :

$$\boxed{V(Z) = \frac{n^4-1}{20n^2}}$$

Exercice 24.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

1. a) Calculer l'espérance $E(\mathrm{e}^{tX_n})$, pour t réel fixé.

b) Montrer que pour tout t réel, on a $E(\mathrm{e}^{tX_n}) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

$\Big($ on rappelle que pour tout réel t : $\mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ $\Big)$

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

2. a) Calculer l'espérance $E(\mathrm{e}^{tS_n})$ en fonction des nombres $E(\mathrm{e}^{tX_k})$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) Calculer pour tout t réel, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(\mathrm{e}^{tS_n/\sqrt{n}})$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout t réel :

$$P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta} E(\mathrm{e}^{tS_n})$$

b) En déduire que :

$$P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-a^2/2n}$$

c) En déduire un majorant de $P(|S_n| \geqslant a)$.

Solution :

1. a) On a : $E(\mathrm{e}^{tX}) = \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\big)$.

b) On a $\dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\mathrm{e}^{t^2/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n}}{2^n.n!}$

Or $(2n)! = 2^n.n!\big(1.3.\ldots(2n-1)\big) \geqslant 2^n.n!$ et donc, par sommation et passage à la limite :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, E(\mathrm{e}^{tX_n}) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$$

2. a) $E(\mathrm{e}^{tS_n}) = E(\prod\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k})$ et les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, il en est de même des variables $\mathrm{e}^{tX_1}, \ldots, \mathrm{e}^{tX_n}$. L'espérance de leur produit est donc le produit de leurs espérances :

$$\boxed{E(\mathrm{e}^{tS_n}) = \big(E(\mathrm{e}^{tX})\big)^n = \Big(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\Big)^n}$$

b) En remplaçant t par $\dfrac{t}{\sqrt{n}}$ il vient : $E(\mathrm{e}^{tS_n/\sqrt{n}}) = \Big(\dfrac{\mathrm{e}^{t/\sqrt{n}} + \mathrm{e}^{-t/\sqrt{n}}}{2}\Big)^n = u_n$.

Un développement limité, pour n tendant vers l'infini donne :

$\ln u_n = n \ln\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{t/\sqrt{n}} + \mathrm{e}^{-t/\sqrt{n}}}{2}\Big) = n \ln\Big(1 + \dfrac{t^2}{2n} + o(n^{-2})\Big) = \dfrac{t^2}{2} + o(n^{-1})$

Par conséquent $\ln u_n \to \dfrac{t^2}{2}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}^{t^2/2}}$

3. a) Comme $E(\mathrm{e}^{tS_n}) \geqslant 1$ (faire une étude rapide de la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$ sur $\mathbb{R}$) le résultat est banal pour $t \leqslant 0$.

Supposons donc $t > 0$. Le théorème de transfert donne :

$$E(\mathrm{e}^{tS_n}) = \sum_{k \in S_n(\Omega)} \mathrm{e}^{tk} P(S_n = k) \geqslant \sum_{k \in S_n(\Omega)/k \geqslant a} \mathrm{e}^{tk} P(S_n = k)$$

$$E(\mathrm{e}^{tS_n}) \geqslant \sum_{k \in S_n(\Omega)/k \geqslant a} \mathrm{e}^{ta} P(S_n = k) = \mathrm{e}^{ta} P(S_n \geqslant a)$$

Soit :

$$\boxed{P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta} E(\mathrm{e}^{tS_n})}$$

b) Ainsi, grce au résultat 1. a) : $\forall\, t \in \mathbb{R}, P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ta}\mathrm{e}^{nt^2/2}$.

Or $t \mapsto -ta + \dfrac{nt^2}{2}$ est minimale pour $t = \dfrac{a}{n}$, le minimum valant $-\dfrac{a^2}{2n}$, donc :

$$\boxed{P(S_n \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-a^2/2n}}$$

c) $(|S_n| \geqslant a) = (S_n \geqslant a) \cup (S_n \leqslant -a)$, mais S_n et $-S_n$ suivent la même loi, donc par disjonction :

$$\boxed{P(|S_n| \geqslant a) = 2P(S_n \geqslant a) \leqslant 2.\mathrm{e}^{-a^2/2n}}$$

Exercice 25.

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet exercice seront définies sur cet espace.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose $D = -\ln U$.

1. a) Déterminer la loi de D, puis la loi de $D_\lambda = \dfrac{D}{\lambda}$, pour $\lambda > 0$.

b) Déterminer la loi de $1 - U$.

2. Soit $p \in]0,1[$ un réel donné.

a) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$E_k = \{\omega \in \Omega / (1-p)^k \leqslant (1-U)(\omega) < (1-p)^{k-1}\}$$

Montrer que $([U = 1], (E_k)_{k \geqslant 1})$ constitue un système complet d'événements.

b) On définit une application G sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, G(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } U(\omega) = 1 \\ k & \text{si } \omega \in E_k \end{cases}$$

Montrer que G est une variable aléatoire. Quelle est la loi suivie par G ?

3. En Turbo–Pascal, la fonction `random` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
Ecrire un programme en Turbo–Pascal qui simule la loi de D_λ puis celle de G déterminées dans les questions précédentes.

Solution :

1. a) $U(\Omega =]0,1] \implies D(\Omega) = [0, +\infty[$ et :

$$\forall\, x \geqslant 0, P(D \leqslant x) = P(-\ln U \leqslant x) = P(U \geqslant \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

On reconnaît alors dans la loi de D la loi exponentielle de paramètre 1.

On voit alors facilement que $D_\lambda = \dfrac{1}{\lambda} D$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b) Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])$, alors $1 - U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$.

2. a) Si $k \neq \ell$, alors $E_k \cap E_\ell = \emptyset$, pour tout k, $E_k \cap [U = 1] = \emptyset$ et enfin, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $k \mapsto (1-p)^k$ est strictement décroissante de premier

terme 1 et de limite nulle. Par conséquent $[U=1] \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \Omega$, et on a bien affaire à un système complet.

b) On a $G(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall\, k \geqslant 1, P(G=k) = P((1-p)^k \leqslant 1-U < (1-p)^{k-1}) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k$$
$$= p(1-p)^{k-1}$$

et $P(G=0) = P(U=1) = 0$.

Donc G suit la loi géométrique de paramètre p.

3. a)

```
Function expo(lambda :real)
  begin
  expo := 1/lambda*(-ln(random))
  end ;
```

b)

```
Function geom(p :real)
var x :real
  begin
  x :=random
    if x=1 then geom :=0
           else geom := ceil(ln(1-x)/ln(1-p))
end ;
```

En effet : $(1-p)^k \leqslant 1-U \leqslant (1-p)^{k-1} \Longleftrightarrow k-1 < \dfrac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)} \leqslant k$

Exercice 26.

1. Si X est une variable aléatoire de densité uniforme sur $]0,1]$, quelle est la loi de $Y = -\ln X$?

2. a) Si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi que X, quelle est la loi de la variable aléatoire $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$?

b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_n.

3. Un individu généreux, dispose initialement d'une somme d'argent de a euros.
A chaque rencontre qu'il fait, il partage ce qui lui reste de fortune (r euros) de manière aléatoire entre lui-même et cette personne, en choisissant au hasard un nombre x entre 0 et 1, en s'accordant xr euros et en donnant le reste au bienheureux (on admet que les euros puissent être indéfiniment divisibles).
A l'issue de n rencontres il lui reste B euros. Que peut-on dire de $E_n = 2^n B$?

Solution :

1. La fonction ln étant bijective de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}^-$, Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \geqslant 0, P(Y \leqslant x) = P(-\ln X \leqslant x) = P(X \geqslant \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$$

2. a) Soit $S_n = -\ln(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, où $Y_i = -\ln(X_i)$.

Chaque Y_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$ et les Y_i sont indépendantes, on en déduit que S_n suit la loi Gamma de paramètre $(1,n)$, c'est-à-dire qu'une densité de S_n est :

$$\boxed{f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{(n-1)!}, \text{ si } x \geqslant 0\,;\ f_{S_n}(x) = 0 \text{ sinon}}$$

Alors, pour tout x de $]0,1]$, on a :

$F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(S_n \geqslant -\ln x) = 1 - F_{S_n}(-\ln x)$, soit :

$$F_{Z_n}(x) = 1 - \int_0^{-\ln x} \frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}}{(n-1)!}\,dt$$

Une densité f_{Z_n} de Z_n s'obtient par dérivation et :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, f_{Z_n}(x) = \frac{1}{x} f_{S_n}(-\ln x) = \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}}$$

b) $E(Z_n) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^1 x(-\ln x)^{n-1}\,dx$.

Le changement de variable $u = -\ln x$ donne :

$$E(Z_n) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2u}u^{n-1}\,du = \frac{1}{2^n(n-1)!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v}v^{n-1}\,dv = \frac{1}{2^n}$$

(intégrale de référence pour la loi Gamma).

On trouve de même $E(Z_n^2) = \dfrac{1}{3^n}$, soit :

$$\boxed{E(Z_n) = \frac{1}{2^n}\,;\ V(Z_n) = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}}$$

3. On a $E_n = 2^n B = 2^n a \prod\limits_{i=1}^{n} X_i = 2^n a Z_n$.

$\star$ $E(E_n) = a$ et E_n est un estimateur de a.

$\star$ $V(E_n) = a^2\big(\big(\frac{4}{3}\big)^n - 1\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$: E_n est un estimateur non convergent.

Exercice 27.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et on appelle H_n le nombre $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$, que l'on ne cherchera pas à simplifier.

On dispose dans une urne n jetons numérotés de 1 à n.

1. Dans un premier temps, on prélève au hasard ces n jetons, un par un et sans remise.

On note $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ les numéros des jetons dans l'ordre dans lequel ils ont étés tirés.

Pour $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, on dit qu'il y a record en $i \geqslant 2$ si l'on a : $u_i > \max(u_1, \dots, u_{i-1})$. On convient qu'il y a record en 1.

a) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, montrer que si p_i est la probabilité qu'il y ait un record en i, on a $p_i = \dfrac{1}{i}$.

b) On appelle S_n le nombre de records obtenus au cours des n tirages. Calculer l'espérance de S_n.

2. Dans un deuxième temps, on prélève, toujours au hasard, successivement, mais cette fois avec remise, un jeton dont on note le numéro u_i pour le $i^{\text{ème}}$ tirage. On dit maintenant qu'il y a record en 1 et en tout $i \geqslant 2$ tel que $u_i \geqslant \max(u_1, \dots, u_{i-1})$.
On note r la probabilité qu'il n'y ait qu'un record (en 1), c'est-à-dire que $u_k < u_1$ pour tout $k \geqslant 2$.
Pour tout $j \geqslant 2$, on note r_j la probabilité de l'événement :

$$A_j = (u_2 < u_1) \cap (u_3 < u_1) \cap \ldots \cap (u_{j+1} < u_1)$$

S'il y a au moins deux records, on note t_n la durée de vie du premier record, c'est-à-dire $i - 1$ si le deuxième record est au rang i.

a) On pose $r_0 = 1$. Montrer que pour tout $k \geqslant 0$, on a $r_k = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\dfrac{i}{n}\right)^k$.
En déduire que la série de terme général r_k est convergente.

b) Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer la probabilité de l'événement $(t_n > k)$ à l'aide de r_k et de r. En déduire une expression de la probabilité de l'événement $(t_n = k)$ et montrer que $r = 0$.

c) Calculer l'espérance $E(t_n)$ de la durée de vie du premier record.

d) Montrer que $(t_n)_{n \geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Solution :

1. a) On a $p_1 = 1$ et pour $i \in [\![2, n]\!]$, $p_i = \dfrac{1}{n!} \mathrm{C}_n^i (i-1)!(n-i)! = \dfrac{1}{i}$
En effet, on a C_n^i façons de choisir les i premiers jetons, 1 façon de placer le plus grand de ceux-ci en $i^{\text{ème}}$ position, $(n-1)!$ façons de placer les $(i-1)$ autres et enfin $(n-i)!$ façons de placer à la suite les $(n-i)$ jetons non sélectionnés.

b) Soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 s'il y a un record en i et 0 sinon. On a $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, d'où $E(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$ et, avec

$E(X_i) = \dfrac{1}{i}$:

$$\boxed{E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n}$$

2. a) $\star$ $r_0 = 1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\dfrac{i}{n}\right)^0$.

$\star$ Pour $k \geqslant 1$, la famille $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = (u_1 = i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ constitue un système complet, donc :

$r_k = P(A_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_k \cap B_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P[(u_1 = i)\cap(u_2 < i)\cap \ldots \cap (u_k < i)]$

Par indépendance des résultats des tirages et équiprobabilité :

$$\boxed{r_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^k}$$

Pour $i \in [\![0, n-1]\!], 0 \leqslant \dfrac{i}{n} < 1$ et la série de terme général r_k est combinaison de séries géométriques convergentes, donc est elle-même convergente.

b) $\star$ On a $P(t_n > 0) = 1 - r$.

$\star$ Pour $k \geqslant 1$, $P[(u_2 < u_1)\cap\ldots\cap(u_{k+1} < u_1)] = P(t_n > k) + r$ (si le record u_1 n'a pas toujours pas été égalé au rang $k+1$, c'est qu'il le sera plus tard ou jamais, ces deux possibilités étant incompatibles). Ainsi :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, P(t_n > k) = r_k - r$$

Comme $P(t_n = k) = P(t_n > k-1) - P(t_n > k)$:

$$\boxed{\forall\, k \geqslant 1, P(t_n = k) = r_{k-1} - r_k}$$

On a alors : $\sum\limits_{k=1}^{j} P(t_n = k) = r_0 - r_j = 1 - r_j$. La convergence de la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k$ prouve que son terme général tend vers 0, donc $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(t_n = k) = 1$, et :

$$\boxed{r = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(t_n = k) = 0}$$

c) On a classiquement, la convergence étant acquise : $E(t_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P(t_n > k)$ (ce que l'on retrouve en écrivant $P(t_n = k) = P(t_n > k-1) - P(t_n > k)$ et en séparant alors la série en deux).

Par linéarité de la sommation des séries convergentes :

$$E(t_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{n}\right)^k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{i}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n-i}$$

Soit, en réindexant :

$$\boxed{E(t_n) = H_n}$$

d) Pour tout k de $\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \int_0^1 t^k dt = \dfrac{1}{k+1}$ (sommes de Riemann).

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(t_n = k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$$

La suite $(t_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire M à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de loi $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(M = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$

Exercice 28.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2 et soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.
On suppose que ces variables aléatoires ont toutes la même espérance m et la même variance σ^2. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel r tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = r.\sigma^2$$

On pose enfin : $\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

1. Calculer la variance de $\overline{X}$ en fonction de n, r et σ^2.

2. Calculer l'espérance de $\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ en fonction de n, r et σ^2.

3. En déduire que $-\dfrac{1}{n-1} \leqslant r \leqslant 1$.

4. On considère une urne contenant deux boules blanches et $n-2$ boules noires. On extrait les boules de cette urne, une par une, au hasard et sans remise.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule obtenue est blanche et 0 sinon.

a) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, calculer la variance de X_i

b) Si i et j sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$, calculer $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$.

c) Montrer que l'encadrement obtenu en 3. ne peut pas être amélioré sans perdre sa généralité.

Solution :

1. Par les propriétés de la variance :

$$V(\overline{X}) = V\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Puis :

$$\boxed{V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2(1 + (n-1)r)}{n}}$$

2. Il vient :

$E\big[\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\big]$

$$\begin{aligned}
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m - (\overline{X} - m))^2\big] \\
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\big] + E\big[(\overline{X} - m)\big(\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - m) - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\big)\big] \\
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\big] + E\big[(\overline{X} - m)\big(\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - m) - 2n(\overline{X} - m)\big)\big] \\
&= E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\big] - nE(\overline{X} - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) - nV(\overline{X}) \\
&= \sigma^2(n-1)(1-r).
\end{aligned}$$

3. On sait que $V(\overline{X}) \geqslant 0$ et que $E\big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\big] \geqslant 0$. Les résultats des deux questions précédentes donnent :

$$\boxed{-\frac{1}{n-1} \leqslant r \leqslant 1}$$

4. Chaque variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 2/n)$. Donc :

$$V(X_i) = \frac{2}{(n-2)n}$$

De plus, pour $i \neq j$:

$$P[(X_i = 1) \cap (X_j = 1)] = \frac{2(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}$$

soit :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{4-2n}{n^2(n-1)}$$

et :

$$\boxed{\rho_{X_i,X_j} = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)} = -\frac{1}{n-1}}$$

Mais on peut également avoir $r = 1$. Pour cela, il suffit de prendre toutes les variables aléatoires X_i égales.
Les inégalités obtenues dans la question 3. sont donc les meilleures possibles.

Exercice 29.

Rappeler pourquoi les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ sont convergentes. On notera

$$\zeta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \zeta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = C\,\frac{3k^2 + 3k + 1}{(k(k+1))^3}$$

où C est une constante positive.

a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$\frac{3x^2 + 3x + 1}{(x(x+1))^3} = \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$$

b) Déterminer la valeur de C.

c) Déterminer la valeur de X la plus probable.

2. a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et la calculer.

b) Montrer que X admet une variance $V(X)$ et la calculer.

3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que :

$$(\zeta_3)^2 \leqslant E[X(X+1)].E\Big[\frac{X}{X+1}\Big]$$

4. Écrire une procédure récursive en Pascal permettant de calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, la valeur de n étant donnée.

Solution :

1. a) De manière évidente, on obtient $a = 1, b = -1$.

b) Il suffit d'écrire que $\sum\limits_{k \geqslant 1} P(X = k) = 1$, soit par télescopage :

$$C \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}\Big) = 1 \text{ et } C = 1$$

c) Une étude de la position par rapport à 1 de $\dfrac{P(X = k+1)}{P(X = k)}$ montre que la valeur de X la plus probable est 1 et $P(X = 1) = \frac{7}{8}\mp$

2. a) Toutes les séries manipulées étant convergentes, on peut écrire :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k^3} - \frac{k}{(k+1)^3}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3}\Big)$$

et :

$$\boxed{E(X) = 1 + \zeta_3 - 1 = \zeta_3}$$

b) De même :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{k^2}{(k+1)^3}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)^3}\Big)$$

Soit, par télescopage des premiers termes :

$$\boxed{E(X^2) = 1 + 2(\zeta_2 - 1) - (\zeta_3 - 1) = 2\zeta_2 - \zeta_3}$$

et

$$\boxed{V(X) = 2\zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_3^2}$$

3. Les séries $\sum k(k+1)P(X = k)$ et $\sum \frac{k}{k+1} P(X = k)$ sont convergentes et :

$$E(X(X+1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P(X = k), \quad E\Big(\frac{X}{X+1}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} P(X = k)$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$\zeta_3^2 = E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kP(X=k)$

$$\boxed{\zeta_3^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P(X=k)\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}P(X=k)\Big)^{1/2}}$$

4.
```
Function Zeta(n :integer) :Real ;
Begin
If n=1 then zeta3 :=1
       else zeta3 :=zeta3(n-1)+1/(n*n*n)
end ;
```

Exercice 30.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(W_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, $2n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la loi de $\ln V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, puis celle de $\ln\big(\frac{1}{W_i}\big)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
Reconnaître la loi de $\ln\big(\frac{1}{W_i}\big)$. Préciser son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de $Y_i = \dfrac{V_i}{W_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. On note Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(Y_i)$.

   a) Déterminer la loi de Z_n.

   b) Calculer la probabilité de l'événement $(Z_n > 1)$.

   c) Etudier l'existence des moments de Z_n.

Solution :

1. On a $\ln V_i(\Omega) = \mathbb{R}^-$, et pour tout $x < 0$, $F_{\ln V_i}(x) = \mathrm{e}^x$; d'où une densité de $\ln V_i$:

$$f_{\ln V_i}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De la même façon, $\ln(1/W_i)(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et $F_{-\ln W_i}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$. d'où :

$$f_{-\ln W_i}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable aléatoire $\ln(1/W_i)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ d'espérance 1.

2. On sait que $\ln Y_i = \ln V_i + (-\ln W_i)$ et par indépendance :

$$f_{\ln Y_i}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\ln V_i}(u) f_{-\ln W_i}(x-u)\,du$$

D'où :

- si $x \leqslant 0$, $f_{\ln Y_i}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2u} du = \frac{\mathrm{e}^x}{2}$

- si $x \geqslant 0$, $f_{\ln Y_i}(x) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2u} du = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$

Pour tout $x > 0$, $P(Y_i \leqslant x) = P(\ln Y_i \leqslant \ln x) = F_{\ln Y_i}(\ln x)$.
D'où une densité de Y_i :

$$\boxed{f_{Y_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

On remarquera que Y_i ne possède pas d'espérance.

3. a) Pour tout $z \in \mathbb{R}^+$:

$$P(Z_n > z) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i > z) = \Big(\int_z^{+\infty} f_Y(x)\,dx\Big)^n$$

Donc, en remarquant que $F_Z(z) = 1 - P(Z > z)$:

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 1 - \big(1 - \frac{z}{2}\big)^n & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{(2z)^n} & \text{si } z \geqslant 1 \end{cases}$$

ce qui donne pour densité :

$$\boxed{f_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{n}{2}\big(1 - \frac{z}{2}\big)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ n\dfrac{1}{(2z)^{n-1}} \times \dfrac{1}{2z^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

b) On a immédiatement $P(Z_n > 1) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) L'espérance $E(Z_n^k)$ est la somme de :

- l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{n}{2}\big(1 - \frac{z}{2}\big)^{n-1} z^k dz$ qui converge quel que soit $k \in \mathbb{N}$.
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} n\frac{1}{(2z)^{n-1}} \times \frac{1}{2z^2} z^k dz$ qui converge si et seulement si

$0 \leqslant k < n$.
Les moments existent donc jusqu'au rang $n - 1$ inclus.