1

ANALYSE

Exercice 1.1.

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que f est une fonction de classe C^1, positive et décroissante sur I et que g est continue sur I.

1. On considère la fonction G définie sur I par

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

a) Justifier le fait que G est de classe C^1 sur I.

b) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $G([a, b]) = [m, M]$.

c) Montrer que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)dt.$$

d) En déduire que

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant Mf(a).$$

e) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt.$$

2. On souhaite appliquer la propriété obtenue dans 1. e).

a) On suppose que $a > 0$, montrer que

$$\int_a^b \frac{1 - \cos t}{t}dt \leqslant \frac{2 + b - a}{a}.$$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1} \dfrac{\sin t}{t^2} dt = 0.$

Solution :

1. a) G est une primitive de la fonction g. Comme g est continue sur $[a,b]$, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment.

b) La fonction G étant continue sur un segment, l'image par G de ce segment est un segment $[m,M]$ de $\mathbb{R}$.

c) En intégrant par parties et compte tenu du fait que $G(a)=0$:
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \big[fG\big]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)dt.$$

d) On a $m \leqslant G(t) \leqslant M$, donc en multipliant par $-f'(t)$ qui est positif :
$$-f'(t)m \leqslant -f'(t)G(t) \leqslant -f'(t)M$$
puis, en intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) :
$$-m\big(f(b)-f(a)\big) \leqslant -\int_a^b f'(t)G(t)\,dt \leqslant -M\big(f(b)-f(a)\big)$$
et en remplaçant dans la formule obtenue en c) :
$$mf(a) + f(b)\big(G(b)-m\big) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant Mf(a) + f(b)\big(G(b)-M\big)$$
Comme $f(b)\geqslant 0$ et $G(b)-m\geqslant 0$, $G(b)-M\leqslant 0$, il vient bien :
$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant Mf(a).$$

e) Si $f(a)=0$, f est la fonction nulle et le résultat est banal.

Sinon, on peut écrire : $\dfrac{1}{f(a)}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt \in [m,M] = G([a,b])$.

Par suite, il existe bien $c\in[a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)G(c) = f(a)\int_a^c g(t)\,dt.$$

2. a) On vérifie facilement que l'on est dans les conditions d'application de 1. e), et il existe un point c de $[a,b]$ tel que :

$\displaystyle\int_a^b \frac{1-\cos t}{t}\,dt = \frac{1}{a}\int_a^c (1-\cos t)\,dt = \frac{1}{a}\big[c-a+\sin a-\sin c\big]$, d'où :
$$\int_a^b \frac{1-\cos t}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{a}(b-a+2).$$

b) Soit $x>1$; on est encore dans les conditions d'application de 1. e), et il existe $c\in[1/x,1]$ tel que :
$$\frac{1}{x^2}\int_{1/x}^1 \frac{1}{t}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{x}\int_{1/x}^c \frac{\sin t}{t}\,dt$$

D'où :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^2}\int_{1/x}^{1} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_{1/x}^{c} \frac{\sin t}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_{1/x}^{c} dt = \frac{1}{x}\big(c-\frac{1}{x}\big) \leqslant \frac{1}{x}\big(1-\frac{1}{x}\big)$$

et, par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_{1/x}^{1} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = 0$$

Exercice 1.2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$.

1. Montrer que f induit une bijection de $]-\infty;0]$ sur un intervalle à définir. Étudier rapidement les variations de f sur $]-\infty;0]$ et donner sa représentation graphique.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_n < 0 \text{ et } x_n - x_n^2 = x_{n-1}, \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Déterminer x_1, x_2 et montrer que la suite (x_n) est bien définie.

3. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_n$.

On pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = x_{n+1} - x_n, \quad v_n = \ln(1+u_n), \quad w_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$$

4. a) Etudier la convergence de $\sum u_n$ et déterminer sa somme éventuelle.
   b) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et donner un majorant de sa somme.
   c) Montrer que la suite $(w_n)_n$ admet une limite ℓ et que $2 \leqslant \ell \leqslant 9$.

Solution :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 1-2x$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f(\mathbb{R}^-) =]\lim\limits_{-\infty} f, f(0)] =]-\infty, 0]$.

Nous noterons cette bijection g.
La représentation graphique de $g = f_{|]-\infty,0]}$ est :

2. On a $x_0 = -2 < 0$ et la deuxième condition s'écrit en fait $x_n = g(x_{n-1})$. Comme g est définie sur $\mathbb{R}^-$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^-$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi parfaitement définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^-$.

$[x_1 - x_1^2 = -2$ et $x_1 < 0]$ donne $x_1 = -1$;

$[x_2 - x_2^2 = -1$ et $x_2 < 0]$ donne $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. On a $\forall n \geqslant 1, x_n - x_{n-1} = x_n^2 \geqslant 0$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Etant majorée par 0, elle converge et si on note ℓ sa limite, un passage à la limite donne $\ell - \ell^2 = \ell^2$, soit :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

4. a) Par télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = x_{n+1} - x_0 = x_{n+1} + 2$.

La convergence de la suite (x_n) donne la convergence de la série de terme général u_n, avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 2$$

b) On a $0 \leqslant v_n = \ln(1+u_n) \leqslant u_n$. On en déduit, par la règle de majoration, la convergence de la série de terme général v_n, avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \leqslant 2$$

c) On a $\ln(w_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n \leqslant 2$. Donc $w_n \leqslant \mathrm{e}^2 < 9$.

D'autre part $w_n \geqslant w_0 = 1 + u_0 = 2$. Par passage à la limite :

$$2 \leqslant \lim_{n\to\infty} w_n \leqslant 9$$

Exercice 1.3.

1. Étudier la convergence des intégrales

$$J = \int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{1+x}dx \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{S_n}{n}$$

a) Déterminer un équivalent de u_n (on pourra comparer S_n à une intégrale).

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. a) Exprimer I_n à l'aide de u_{n+1} (on pourra faire une intégration par parties convenablement choisie).

b) En déduire la limite, pour $n \to +\infty$, de l'intégrale

$$R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \ln(1-x)}{1+x}dx$$

c) Montrer alors que la série de terme général $(-1)^n\, u_{n+1}$ converge et que

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_{n+1}$$

Solution :

1. $\star$ La fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{1+x}$ est continue sur $[0,1[$, positive, et équivalente au voisinage à gauche de 1 à $-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$.

La convergence de $\displaystyle\int_0 \ln t\, dt$ donne la convergence de $\displaystyle\int^1 \ln(1-x)\, dx$, donc la convergence de J.

$\star$ De même $x \mapsto x^n \ln(1-x)$ est continue, de signe fixe, sur $[0,1[$ et équivalente au voisinage à gauche de 1 à $x \mapsto \ln(1-x)$. On conclut, pour la même raison, à la convergence de I_n.

2. a) Par comparaison série–intégrale et décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on a pour tout $k \geqslant 1$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ et pour tout $k \geqslant 2$: $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$.

D'où, par sommation : $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$, ce qui s'écrit encore :

$$1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Soit, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$ et $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

b) On a $S_n \geqslant 1$, donc $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la série de terme général u_n est divergente.

3. a) Intégrons par parties, en choisissant de « primitiver » $x \mapsto x^n$ en $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}-1}{n+1}$
(c'est mieux pour la borne supérieure) :

Pour $a \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}\int_0^a x^n \ln(1-x)\, dx &= \Big[\frac{x^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-x)\Big]_0^a - \int_0^a \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(x-1)}\, dx \\ &= \frac{a^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-a) - \frac{1}{n+1}\int_0^a (1 + x + \cdots + x^n)\, dx\end{aligned}$$

On a $(a^{n+1}-1)\ln(1-a) = (1 + a + \cdots + a^n)(a-1)\ln(1-a) \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} 0$

On peut donc faire tendre a vers 1, et :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\, dx = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \big[\frac{x^{k+1}}{k+1}\big]_0^1 = -u_{n+1}.$$

b) L'intégrale R_n converge pour les mêmes raisons qu'en 1., et :

$$|R_n| = -\int_0^1 \frac{x^{n+1}\ln(1-x)}{1+x}\,dx \leqslant -\int_0^1 x^{n+1}\ln(1-x)\,dx = u_{n+2}$$

Puisque $u_n \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, et par conséquent : $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

c) Pour $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

En multipliant par $-\ln(1-x)$ et en intégrant sur $[0,1[$ (toutes les intégrales convergent), il vient :

$$J = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k - R_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_{k+1} - R_n$$

Le passage à la limite lorsque n vers l'infini montre que la série proposée converge, avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_{k+1} = J.$$

Exercice 1.4.

1. On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a,b]$. On suppose de plus que g est positive sur $[a,b]$.

a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$.

b) Prouver que

$$m\int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant M\int_a^b g(t)dt.$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

2. Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[0,1]$.

a) Montrer que l'espérance $E(X)$ de X appartient à l'intervalle $[0,1]$.

b) On considère la variable aléatoire $Y = \exp(X)$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$E(Y) = \exp(c).$$

3. En utilisant la formule établie en 1.c), étudier la limite de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}dt$$

lorsque x tend vers 0^+.

Solution :

1. a) La fonction f est continue. Le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$.

b) Soit $t \in [a, b]$. On sait que : $m \leqslant f(t) \leqslant M$.
La fonction g étant positive sur $[a, b]$, il vient, pour tout $t \in [a, b]$:
$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$
Il suffit ensuite d'intégrer ces deux inégalités sur l'intervalle $[a, b]$ et d'utiliser la propriété de positivité de l'intégrale (on a $a < b$) pour obtenir le résultat désiré.

c) Si la fonction g est identiquement nulle, l'égalité proposée est évidente. Sinon, la fonction g étant positive et continue , on sait que $\displaystyle\int_a^b g(t)dt > 0$. Ainsi :
$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant M$$
Enfin, d'après la question 1. a), il existe $c \in [a, b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

2. a) Comme X prend ses valeurs entre 0 et 1, on peut choisir une densité f_X nulle en dehors de cet intervalle et :
$$0 \leqslant E(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_X(x)\,dx = 1$$

b) Par le théorème du transfert, on sait que : $E(Y) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x f_X(x)\,dx$.

Par la question 1. c), il existe $c \in [0, 1]$ tel que $E(Y) = \mathrm{e}^c \displaystyle\int_0^1 f_X(x)\,dx = \mathrm{e}^c$.

3. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur l'intervalle $[x, 2x]$, la fonction F est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus cette fonction est positive pour $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$. Par la question 1.c) , il existe alors $c \in [x, 2x]$ tel que :
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\sin c}{c}\,\frac{2x - x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin c}{c}\sqrt{x}$$
Lorsque x tend vers 0, c également et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin c}{c} = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0$.
On peut même préciser : $F(x) \underset{(0^+)}{\sim} \sqrt{x}$.

Exercice 1.5.

Soit $P = x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 2$, à coefficients réels.

1. Montrer que pour toute racine réelle ou complexe λ de P, on a :

$$|\lambda| \leqslant M = \max\big(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\big)$$

(on pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $|\lambda| > M$ alors $|P(\lambda)| > 0$).

2. On suppose dans la suite que toutes les racines de P sont réelles. Montrer qu'alors toutes les racines de P' sont elles aussi réelles. On notera $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$ les différentes racines de P et $m_1, \ldots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

3. Soit α la plus grande racine de P, $I =]\alpha, +\infty[$ et $J = [\alpha, +\infty[$. Montrer que les fonctions $P, P', \ldots, P^{(n)}$ sont strictement positives sur I.

4. On suppose que α est racine simple de P. Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

a) Montrer que g est de classe C^∞ sur J.

b) Montrer que $g'(\alpha) = 0$.

5. On suppose toujours que α est racine simple de P.

a) Montrer que g est strictement croissante sur J et que $g(J) \subseteq J$.

b) Soit $x_0 > M$. On définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.
Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante (on pourra montrer que $g(x) < x$ pour tout $x \in I$) et qu'elle converge vers α.

Solution :

1. Soit λ une racine réelle ou complexe de P. On peut écrire

$$\lambda^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k, \text{ d'où } |\lambda|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\lambda|^k$$

Supposons que $|\lambda| > M = \max\big(1, \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|\big)$. En particulier $|\lambda| > 1$ et donc :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\lambda|^{k-n+1} < \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

en contradiction avec $|\lambda| > M$.

2. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives $(m_1, \ldots, m_r)$.

On sait donc que $\sum_{k=1}^{r} m_k = n$. On sait également que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ sont des racines de P' de multiplicités respectives $(m_1 - 1, \ldots, m_r - 1)$ (si $m_i = 1$, alors λ_i n'est pas racine de P' et le résultat reste valable).

Le théorème de Rolle nous assure également qu'entre deux racines de P se trouve au moins une racine de P', c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, il existe $\mu_k \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, tel que $P'(\mu_k) = 0$.

En comptant les multiplicités, cela donne déjà $\sum_{k=1}^{r} (m_k - 1) + (r - 1) = n - 1$ racines de P', qui sont toutes réelles. Ainsi il n'en existe pas d'autres et en fait entre deux racines de P il n'existe qu'une racine de P' et elle est simple.

3. Le raisonnement de la question précédente montre que sur $I =]\alpha, +\infty[$, P et P' ne s'annulent pas. Comme de plus, $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} P'(x) = +\infty$ (car le coefficient dominant est positif), alors P et P' restent positives sur I.

Il suffit d'appliquer ce raisonnement aux dérivées successives de P, jusqu'à $P^{(n)}$.

4. a) Comme α est racine simple de P, on a $P'(\alpha) \neq 0$. Cela entraîne que g est de classe C^∞ sur $J = [\alpha, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions C^∞, avec $P'(x) \neq 0$, pour tout $x \in J$.

b) Un calcul immédiat donne $g'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{P'^2(x)}$ et $g'(\alpha) = 0$

5. a) On sait que pour tout $x \in J, g'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{P'^2(x)}$.

Par la question 3, g' reste positive sur J et g est croissante sur J ; de plus $g(\alpha) = \alpha$. Il en résulte que $g(J) \subseteq J$.

b) Puisque $x_0 > M$, on a $x_0 \in I$. Par la question précédente, la suite (x_n) est bien définie et comme P et P' sont positives sur I, la suite (x_n) est strictement décroissante. Elle est de plus minorée par α ; elle converge donc vers le point fixe de g (qui est continue) qui est α.

Exercice 1.6.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 - t^2} \ln(t) dt$$

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que la fonction g définie sur $]0, 1[$ par :

$$g(t) = \frac{t^3}{1 - t^2} \ln(t)$$

est bornée sur cet intervalle.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini.

3. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{p} t^{2k}$.

b) En déduire que

$$I_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2k+2)^2}$$

4. a) Montrer que la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \frac{1}{(n+2t)^2}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que :

$$-\frac{1}{(n+2)^2} - I_n \leqslant \int_0^{+\infty} f_n(t)dt \leqslant -I_n$$

c) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Pour tout entier naturel n, $h : t \mapsto \dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}$ est continue sur $]0,1[$, et :

Au voisinage de $t=1$, $h(t) \sim \dfrac{t-1}{1-t^2} \sim -\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 0$. La fonction h admet donc un prolongement par continuité sur $[0,1]$.

Ainsi I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) La fonction g correspond à $n=2$. On vient de voir qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$; elle est donc bornée sur $]0,1[$.

b) Comme $\dfrac{\ln t}{1-t^2} \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,1[$, il est clair que la suite $(I_n)_n$ est décroissante et minorée par 0. Cette suite admet donc une limite.

Cette limite est nulle. En effet, notons $M = \sup\limits_{t\in]0,1[} |g(t)|$. Alors, pour $n \geq 3$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant M\int_0^1 t^{n-2}dt = \frac{M}{n-1}$$

3. a) Il s'agit de la somme partielle d'une suite géométrique de raison t^2. Donc :

$$\sum_{k=0}^{p} t^{2k} = \begin{cases} \dfrac{1-t^{2p+2}}{1-t^2} & \text{si } t^2 \neq 1 \\ p+1 & \text{si } t^2 = 1 \end{cases}$$

b) On peut écrire, pour $t \in]0,1[$:

$$\frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{p} t^{2k+n+1}\ln t + \frac{t^{2p+3+n}\ln t}{1-t^2}$$

Or pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, une intégration par parties élémentaire montre que l'intégrale suivante existe, avec :

$$\int_0^1 t^{\ell}\ln t\,dt = \frac{1}{(\ell+1)^2}$$

Ainsi, toutes les intégrales existant :

$$I_n = -\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k+n+2)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2p+n+3}}{1-t^2}\ln t\,dt$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{2p+n+3}}{1-t^2}\ln t\,dt\right| \leqslant M\int_0^1 t^{2p+n}\,dt = \frac{M}{2p+n+1}$$

On fait tendre p vers l'infini et on obtient :

$$I_n = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+n+2)^2}$$

4. a) La fonction f_n est dérivable et sa dérivée est négative sur $\mathbb{R}^+$.

b) Par décroissance de la fonction à intégrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\frac{1}{(2k+2+n)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(2t+n)^2} \leqslant \frac{1}{(2k+n)^2}$$

On somme pour $k \in \mathbb{N}$; il vient :

$$-I_n \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2t+n)^2} = \frac{1}{2n} \leqslant -I_n + \frac{1}{n^2}$$

Cela signifie que, lorsque n tend vers l'infini : $I_n \sim -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 1.7.

1. a) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$$

est convergente.

Pour $x \in D$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$

b) Pour $x \in D$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du$ est convergente et comparer sa valeur à $f(x)$.

2. a) Montrer que les fonctions g et h définies sur D par

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{x+u}\,du \quad \text{et} \quad h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du$$

sont bornées sur D.

b) En déduire que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$f(x) \sim -\ln(x)$$

3. a) Montrer que $\forall (x,u) \in D \times \mathbb{R}^+, 0 \leq \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+u} \leq \dfrac{u}{x^2}$

b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution :

1. a) Pour tout x réel, $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$.

- si $x \leqslant 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{1+t}$, qui est positive et d'intégrale divergente en $+\infty$.
- si $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} = o(\mathrm{e}^{-xt}) = o\big(\dfrac{1}{t^2}\big)$ dont l'intégrale est convergente au voisinage de $+\infty$.

Finalement $D = \mathbb{R}^{+*}$.

b) Si $x > 0$, $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{x+u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $A > 0$. Le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{x}$ donne

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du = \int_0^{A/x} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$$

Cette dernière expression tend vers $f(x)$, lorsque A tend vers $+\infty$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du$ existe et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,du = f(x)$$

2. a) L'application $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}-1}{x+u}$ est continue sur $[0,1]$, car $x > 0$. L'application $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} = o\big(\dfrac{1}{u^2}\big)$.

Ainsi g et h sont bien définies sur $\mathcal{D}$.

Posons $a : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-u}-1}{u} & \text{si } u > 0 \\ -1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$

La fonction a est continue sur $[0,1]$. De plus, pour tout $u \in [0,1]$:

$$a(u) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{x+u} \leqslant 0 \implies M = \int_0^1 a(u)\,du \leqslant g(x) \leqslant 0$$

Enfin, pour tout $u \geqslant 1$

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \implies 0 \leqslant h(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du = M'.$$

b) D'après la relation de Chasles, pour $x > 0$, il vient :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{du}{x+u} + g(x) + h(x) = -\ln x + \ln(x+1) + g(x) + h(x)$$

Or, au voisinage de 0^+, $\ln(x+1) + g(x) + h(x)$ est bornée.
Donc, comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, on a $f(x) \sim -\ln x$ au voisinage de 0^+.

3. a) Si $(x,u) \in D \times \mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+u} = \frac{u}{x(x+u)} \implies 0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{1}{x+u} \leqslant \frac{u}{x^2}$$

b) En multipliant l'encadrement précédent par $\mathrm{e}^{-u} > 0$, puis en intégrant sur $\mathbb{R}^+$, il vient, pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,du - f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} u.\mathrm{e}^{-u}\,du$$

ou

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

ce qui prouve, qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$.

Exercice 1.8.

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^1 \ln(1+xt^2)\,dt$$

1. Montrer que F est définie sur $]-1,+\infty[$ et croissante sur cet intervalle.

2. a) Montrer que pour tout $u > 0$ et tout réel k non nul tel que $0 < u - |k|$, on a

$$\left|\ln(u+k) - \ln u - \frac{k}{u}\right| \leqslant \frac{k^2}{2(u-|k|)^2}$$

b) Pour tout réel $x > -1$ et tout réel h non nul tel que $-1 < x - |h|$, on pose :

$$D(x,h) = \frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x) - h\int_0^1 \frac{t^2}{1+xt^2}\,dt\right]$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout h tel que $|h| < x$, on a :

$$\left|D(x,h)\right| \leqslant \frac{|h|}{10}$$

Montrer que pour tout x de $]-1,0]$ et tout h tel que $|h| < x+1$, on a :

$$\big|D(x,h)\big| \leqslant \frac{|h|}{10(1+x-|h|)^2}$$

c) En déduire que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et donner une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.

Solution :

1. Pour tout $x > -1$ et $t \in [0,1]$, $1 + xt^2 > 0$. L'application $t \mapsto \ln(1+xt^2)$ est donc définie et continue sur $[0,1]$, ce qui montre que F est définie sur $D =]-1,+\infty[$.

Soit $-1 < x < x'$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\ln(1+xt^2) \leqslant \ln(1+x't^2)$, ce qui montre, par conservation des inégalités par intégration ($0 < 1$!), que F est croissante sur D.

2. a) Si $u > 0$, $0 < u - |k|$, alors $-u < k < u$ et $\ln(u+k)$ est bien définie.

L'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 donne :

$$\Big|\ln(u+k) - \ln u - \frac{k}{u}\Big| \leqslant \frac{k^2}{2} \sup_{t\in[u,u+k]} \frac{1}{t^2}.$$

• Si $k > 0$ et $u \leqslant t \leqslant u+k$, alors $0 < u-|k| \leqslant t \leqslant u+k$, donc $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{(u-|k|)^2}$.

• Si $k < 0$ et $u+k \leqslant t \leqslant u$, alors $0 < u-|k| \leqslant t \leqslant u$, donc $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{(u-|k|)^2}$.

Finalement :

$$\Big|\ln(u+k) - \ln u - \frac{k}{u}\Big| \leqslant \frac{k^2}{2(u-|k|)^2}$$

b) Posons $u = 1+xt^2$, $k = ht^2$. On a $u > 0$ et $u - |k| = 1 + (x-|h|)t^2 > 0$. En utilisant la question précédente, il vient :

$$|D(x,h)| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^1 \frac{h^2t^4}{2(1+(x-|h|)t^2)^2}\,dt$$

Si $x > 0$ et $|h| < x$, alors $1 + (x-|h|)t^2 \geqslant 1$, donc :

$$|D(x,h)| \leqslant \frac{1}{2|h|}\int_0^1 h^2t^4 dt = \frac{|h|}{10}$$

Si $-1 < x \leqslant 0$ et $|h| < x+1$, alors pour $t \in [0,1]$, $1+(x-|h|)t^2 \geqslant 1+x-|h| > 0$ et

$$|D(x,h)| \leqslant \frac{1}{2|h|}\int_0^1 \frac{h^2t^4}{(1+x-|h|)^2}\,dt \leqslant \frac{|h|}{10(1+x-|h|)^2}$$

c) En remarquant que $\lim\limits_{h\to 0} D(x,h) = 0$, on déduit que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+xt^2}\,dt.$$

Exercice 1.9.

Soit $(\Gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\Gamma_0 = 1,\, \Gamma_1 = X,\, \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2},\, \ldots,\, \Gamma_k = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}$$

1. a) Montrer que pour tout x entier relatif, $\Gamma_k(x)$ est aussi un entier relatif.

b) Calculer $\Gamma_k(k)$ et $\Gamma_k(-1)$.

2. Soit x un réel fixé, différent d'un entier naturel.

a) Soit ρ un réel. On considère la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mu_n = n^\rho|\Gamma_n(x)|$. Montrer que

$$\ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n) = \frac{\rho - x - 1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En déduire la nature de la série de terme général $\ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$ en fonction du réel ρ.

b) Montrer qu'il existe un réel strictement positif $K(x)$ tel que l'on ait :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{x+1}|\Gamma_n(x)| = K(x)$$

On ne cherchera pas à calculer $K(x)$.

3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et x, y deux réels, tous deux distincts d'un entier naturel. On suppose $y > x$. A l'aide de 2. b), montrer que si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\Gamma_n(x)$ est absolument convergente, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\Gamma_n(y)$ est également absolument convergente.

Solution :

1. a) C'est immédiat lorsque $k = 0$, et lorsque $k = 1$, puisque $\Gamma_0 = 1, \Gamma_1 = X$. On remarque ensuite que, pour $k \geqslant 2$:

$$\Gamma_k(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant k-1 \\ \binom{j}{k} \in \mathbb{N} & \text{si } j \geqslant k \\ (-1)^k\binom{-j+k-1}{k} \in \mathbb{Z} & \text{si } j \leqslant 0 \end{cases}$$

b) On a immédiatement $\Gamma_k(k) = 1$ et $\Gamma_k(-1) = (-1)^k$.

2. a) Comme x n'est pas un entier naturel, on a $\Gamma_n(x) \neq 0$ et $\mu_n > 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\ln\mu_{n+1} - \ln\mu_n &= \ln\big(\tfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\big) = \rho\ln\big(1+\tfrac{1}{n}\big) + \ln\big|\tfrac{x-n}{n+1}\big| \\ &= (\rho-1)\ln\big(1+\tfrac{1}{n}\big) + \ln\big|1-\tfrac{x}{n}\big|\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, le développement de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 donne

$$\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = \frac{\rho - 1 - x}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$$

• Si $\rho = 1 + x$, alors $\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$, ce qui prouve que la série $\sum(\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n)$ est absolument convergente.

• Si $\rho \neq 1+x$, alors $\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n \sim \dfrac{\rho - 1 - x}{n}$ qui est de signe constant et le terme général d'une série divergente. Donc $\sum(\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n)$ est divergente.

b) Lorsque $\rho = x + 1$, la série $\sum(\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n)$ est absolument convergente. Donc, il existe $\ell(x)$ tel que :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (\ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n) = \lim_{N \to +\infty} (\ln \mu_{N+1} - \ln \mu_0) = \ell(x).$$

La suite $(\ln \mu_n))$ est ainsi convergente vers $\ell(x)$ et par continuité de la fonction exponentielle, la suite (μ_n) converge vers $\mathrm{e}^{\ell(x)} = K(x) > 0$.

Donc, il existe $K(x) > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{x+1} |\Gamma_n(x)| = K(x).$$

3. Par hypothèse, $\Gamma_n(x) \neq 0, \Gamma_n(y) \neq 0$ et la série $\sum a_n \Gamma_n(x)$ est absolument convergente.

Par la question précédente

$$\frac{|\Gamma_n(y)|}{|\Gamma_n(y)|} \sim \frac{K(y)}{K(x)} \times \frac{1}{n^{y-x}}.$$

Comme $y > x$, ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et pour n assez grand $|\Gamma_n(y)| < |\Gamma_n(x)|$.

La série $\sum a_n \Gamma_n(x)$ est donc absolument convergente.

Exercice 1.10.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{(u_n + 1)u_n}, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 2x + 2\sqrt{x(x+1)}$$

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b) Résoudre l'équation : $f(x) = x$.

c) En déduire la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$v_n = \int_{u_n}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$$

a) Étudier l'existence de v_n.

b) Calculer v_0.

c) Pour tout $x > 0$, montrer que : $\dfrac{f'(x)}{f(x)\sqrt{1+f(x)}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{x+1}}$.

d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et calculer son terme général v_n en fonction de n.

3. a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} \sim \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$$

b) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. a) On montre, par une récurrence immédiate que, pour tout $n \geqslant 0$, u_n est bien défini, avec $u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc bien définie.

b) $f(x) = x \iff x + \sqrt{x(x+1)} = 0$. La seule solution de l'équation $f(x) = x$ est $x = 0$.

c) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, donc vaut 0.
Or pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} \geqslant 2u_n \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante et minorée par 1 : elle ne converge donc pas.
Comme elle est croissante, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. a) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $h(t) \sim \dfrac{1}{t^{3/2}}$. Comme $u_n \geqslant 1 > 0$, l'intégrale définissant (v_n) est donc convergente et la suite (v_n) bien définie.

b) Le changement de variable $u = \sqrt{1+t}$ est bijectif de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. Ainsi :

$$v_0 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2du}{u^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = 2\ln(1+\sqrt{2})$$

c) On remarque que $f(x) + 1 = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2$. Ceci permet d'écrire, après calcul de $f'(x)$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)+1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$$

d) La fonction f est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, strictement croissante. En posant $x = f(z)$, il vient :

$$v_n=\int_{u_n}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=2\int_{f(u_n)}^{+\infty}\frac{dz}{z\sqrt{z+1}}=2\int_{u_{n+1}}^{+\infty}\frac{dz}{z\sqrt{z+1}}=2v_{n+1}$$

D'où, pour tout $n\geqslant 1$:

$$v_n=\big(\frac{1}{2}\big)^n\times v_0=\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2^{n-1}}$$

3. a) On a $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{x}}$. D'autre part

$$\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t+1}}=2\int_{\sqrt{x+1}}^{+\infty}\frac{dz}{z^2-1}=\ln\big(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\big)$$

$$=\ln\big(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\big)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}+o\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big)\sim\frac{2}{\sqrt{x}}$$

b) Finalement :

$$\int_{u_n}^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{u_n}}\sim\int_{u_n}^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t+1}}=v_n=\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2^{n-1}}.$$

D'où, lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n\sim\frac{4^n}{(\ln(1+\sqrt{2}))^2}.$$

Exercice 1.11.

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et $\alpha\in\mathbb{R}$.

Pour $x\in\mathbb{R}$, on note : $\sinh(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et l'on pose :

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sinh(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1} & \text{si } x>0\\ \alpha & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de α, f_n est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

On suppose dans la suite que α a la valeur ainsi trouvée.

2. Montrer que f_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx$ est convergente.

4. a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\forall p\in\mathbb{N}^*, f_n(x)=2\sinh(x)\sum\limits_{k=1}^{p}\mathrm{e}^{-nkx}+\mathrm{e}^{-npx}f_n(x)$.

b) En déduire que $I_n=2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\sinh(x).\mathrm{e}^{-nkx}dx$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sinh(x).\mathrm{e}^{-nkx}dx$, en déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}$.

d) Pouvait-on obtenir ce dernier résultat directement ?

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \sinh(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction $x \mapsto e^{nx} - 1$. Un développement limité au voisinage de 0 donne :

$$f_n(x) = \frac{2x + o(x)}{nx + o(x)}$$

Ainsi : $\lim_{x \to 0} f_n(x) = \frac{2}{n}$.

Il faut donc prendre $\alpha = \frac{2}{n}$ pour que f_n soit continue en 0.

2. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$; elle est donc bornée sur tout segment $[0, A], A > 0$. On a, de plus, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \sim e^{(1-n)x}$. Donc $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ (on a $n \geqslant 2$).

Ainsi f_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On notera M_n un majorant de f_n.

3. Par la question précédente, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \sim e^{(1-n)x}$. Or

$$\int_0^{+\infty} e^{(1-n)x}\, dx = \frac{1}{n-1},$$

cela entraîne que l'intégrale définissant I_n est convergente pour tout $n > 1$.

4. a) On peut écrire, pour $x > 0$:

$$\sum_{k=1}^{p} e^{-nkx} = e^{-nx} \frac{1 - e^{-npx}}{1 - e^{-nx}} = \frac{1 - e^{-npx}}{e^{nx} - 1}$$

Donc :

$$2\sinh(x) \sum_{k=1}^{p} e^{-nkx} = f_n(x) - e^{-npx} f_n(x)$$

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = 2 \sum_{k=1}^{p} \int_0^{+\infty} \sinh(x) e^{-nkx}\, dx + \int_0^{+\infty} e^{-npx} f_n(x)\, dx$$

Puis

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-npx} f_n(x)\, dx \right| \leqslant M_n \int_0^{+\infty} e^{-npx}\, dx = \frac{M_n}{np}$$

Donc $\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-npx} f_n(x) dx = 0$, ce qui entraîne que :

$$I_n = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sinh(x) e^{-nkx}\, dx$$

c) On écrit que $\sinh(x) e^{-nkx} = \frac{1}{2}\left(e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}\right)$. Donc :

$$2 \int_0^{+\infty} \sinh(x) e^{-nkx}\, dx = \int_0^{+\infty} (e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x})\, dx$$

$$= \frac{1}{kn-1} - \frac{1}{kn+1} = \frac{2}{k^2n^2-1}.$$

Finalement : $I_n = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2n^2-1}$.

Pour $n = 2$, il vient : $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}-1} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$.

Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

d) Pour retrouver ce résultat directement, on écrit :

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)$$

et, pour tout N : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2N+1}\Big)$

Il suffit alors de prendre la limite lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 1.12.

1. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_k = \frac{1}{k^3}$.

Établir la convergence des séries de termes généraux respectifs, u_k et $(-1)^{k-1}\,u_k$. On note S et S' leurs sommes respectives.

2. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $S'_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,u_k$.

a) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n = S'_{2n-1}$ et $w_n = S'_{2n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ sont adjacentes et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a

$$S'_{2n} \leqslant S' \leqslant S'_{2n+1} \leqslant S'_{2n-1}.$$

b) En déduire un entier n tel que S'_n soit une valeur approchée rationnelle de S' à 10^{-1} près. Faire de même pour une valeur approchée (au sens large) à 10^{-3} près.

3. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $R_n = S - S_n$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, comparer $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3}$ au rationnel $\frac{1}{(k+1)^3}$ et en déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout p de $\mathbb{N}^*$ une majoration de la différence $R_n - R_{n+p}$ par une intégrale.

b) En déduire un n de $\mathbb{N}^*$ tel que S_n soit une valeur approchée rationnelle par défaut de S à 10^{-3} près.

4. a) Montrer que pour tout (p, ε) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $H_{p,\varepsilon}$ défini par :

$H_{p,\varepsilon} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid R_n - R_{n+p} \leqslant \varepsilon\}$ admet un plus petit élément.

b) On appelle $\varphi(p,\varepsilon)$ cet entier. Montrer que $\varphi(p,\varepsilon) \geqslant \lfloor \sqrt[3]{\frac{p}{\varepsilon}} \rfloor - p$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

c) Écrire en Pascal une fonction qui à tout (p,ε) avec $p \geqslant 2$, associe $\varphi(p,\varepsilon)$ *(on sera attentif au nombre d'opérations effectuées).*

Solution :

1. D'après la règle de Riemann, les séries $\sum u_k$ et $\sum(-1)^k u_k$ sont absolument convergentes.

2. a) On a :

$$v_{n+1} - v_n = S'_{2n+1} - S'_{2n-1} = \frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{(2n)^3} < 0$$
$$w_{n+1} - w_n = S'_{2n+2} - S'_{2n} = -\frac{1}{(2n+2)^3} + \frac{1}{(2n+1)^3} > 0$$

et $|v_n - w_n| = \dfrac{1}{(2n)^3}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Les suites (v_n) et (w_n) sont donc adjacentes et ont une limite commune S'.
Pour tout n, on a $w_n \leqslant S' \leqslant v_n$, donc, par la monotonie des deux suites

$$S'_{2n} \leqslant S' \leqslant S'_{2n+1} \leqslant S'_{2n-1}.$$

b) On cherche n tel que $|S' - S'_n| \leqslant \varepsilon$. Or

$$|S' - S'_{2n}| \leqslant |S'_{2n+1} - S'_{2n}| = u_{2n+1}, \quad |S' - S'_{2n-1}| \leqslant |S'_{2n} - S'_{2n-1}| = u_{2n}$$

soit, pour tout $n \geqslant 1$, $|S' - S'_n| \leqslant u_{n+1}$.

Pour $\varepsilon = 10^{-1}$, on prend $n = 2$ et $S'_2 = \dfrac{7}{8}$ est une valeur approchée de S' à 10^{-1} près.

Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, on prend $n = 9$ et S'_9 est une valeur approchée de S' à 10^{-3} près.

3. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^3} = \frac{1}{(k+1)^3}$.
Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il vient :

$$R_n - R_{n+p} = S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} = \int_n^{n+p} \frac{dt}{t^3}$$
$$R_n - R_{n+p} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

b) Le résultat précédent étant valable pour tout p, il suffit de faire tendre p vers l'infini pour obtenir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$R_n \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

Il suffit de prendre $2n^2 \geqslant 10^3$, soit $n = 23$ et S_{23} est une valeur approchée de S par défaut à 10^{-3} près.

4. a) Pour p fixé, on pose $t_n = R_n - R_{n+p} = S_{n+p} - S_n$. La suite (t_n) est positive et de limite nulle. Donc $H_{p,\varepsilon}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}^*$ et admet donc un plus petit élément.

b) Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,on a : $t_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} u_{n+p} = \dfrac{p}{(n+p)^3}$.

Ainsi $\dfrac{p}{(n+p)^3} > \varepsilon \implies t_n > \varepsilon$ et donc

$$\frac{p}{(\varphi(p,\varepsilon)+p)^3} \leqslant \varepsilon, \text{ soit } \varphi(p,\varepsilon) \geqslant \left\lfloor \left(\tfrac{p}{\varepsilon}\right)^{1/3} \right\rfloor - p$$

c) Comme $t_{n+1} = t_n - u_{n+1} + u_{n+p+1}$, on peut proposer

```
Function f (p : integer ; e :real) : integer ;
Var i,n : integer ;
    t : real ;
Begin
n := trunc(exp((ln(p/e))/3))-p ;
t := 1/(n+1)^3 ;
For i := 2 to p do t := t+1/(n+i)^3 ;
While t>e do
   Begin
   n := n+1 ;
   t := t+1/n^3+1/(n+p)^3
   End ;
f := n
End.
```

Exercice 1.13.

À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ soit convergente, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$ pour tout $x > 0$.

2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a < b$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt \leqslant a^2 g(a) + 2\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}$.

c) En déduire que

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}.$$

d) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt$ est convergente (on pourra utiliser le fait que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en l'infini).

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$ est absolument convergente et que
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt.$$

Solution :

1. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.

Étudions la continuité de g en $x=0$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (puisque f est continue) et $F'(x)=f(x)$. La fonction F admet un développement limité à l'ordre 1 en $x=0$, et :
$$F(x) = F(0) + xf(x) + x\varepsilon(x) = xf(x) + x\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$
Ainsi : $g(x) = \dfrac{1}{x}F(x) = f(x) + \varepsilon(x)$. Cela entraîne que :
$$\lim_{x\to 0} g(x) = f(0).$$
Ainsi, en posant $g(0)=f(0)$, g est continue en 0.

Pour tout $x>0$: $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$.

2. a) Une intégration par parties donne :
$$\begin{aligned}\int_a^b 1\cdot g^2(t)\,dt &= \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b tg(t)g'(t)\,dt\\ &= \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b g(t)\big(f(t)-g(t)\big)dt\\ &= \left[tg^2(t)\right]_a^b - 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt + 2\int_a^b g^2(t)\,dt\end{aligned}$$
D'où :
$$\int_a^b g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant ag^2(a) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à cette dernière expression et la positivité de f^2 donnent :
$$\int_a^b g^2(t)\,dt \leqslant ag^2(a) + 2\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant ag^2(a) + 2\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

c) On en déduit que

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}\right)^2 - 2\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt} \leqslant ag^2(a)$$

ou

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} - \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}\right)^2 \leqslant ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

soit, finalement

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt}$$

d) Cette dernière inégalité est valable pour tout $a > 0$. En prenant la limite lorsque a tend vers 0, il vient pour tout $b > 0$:

$$\int_0^b g^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

La positivité de g^2 et cette inégalité entraînent que $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b g^2(t)\,dt$ existe et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

3. Soit $A > 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\int_0^A |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^A g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^A f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Comme précédemment, cela entraîne que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|\,dt$ existe.

Reprenons l'égalité de la question 2. a) :

$$\int_a^b g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

On a $\lim\limits_{a\to 0} ag^2(a) = 0$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} bg^2(b)$ existe, car :

$$\lim_{b\to+\infty} bg^2(b) = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt - \int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt.$$

Cette limite λ ne peut être que nulle, car si $\lambda \neq 0$, alors, pour t au voisinage de $+\infty$, $g^2(t) \sim \dfrac{\lambda}{t}$, l'intégrale de cette dernière fonction étant divergente en $+\infty$. Finalement

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt.$$

Exercice 1.14.

Soit un réel $a \in [0,1]$. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1}$.

On pose par commodité $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Que peut-on dire de cette suite si $a = 0$? si $(u_0, u_1) = (0,0)$?

2. On suppose que $a = 1$.

a) Comment fait-on, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour exprimer u_n en fonction de n ? *On n'effectuera pas les calculs.*

On admet que, si $(u_0, u_1) = (1,0)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}}$ et que, si $(u_0, u_1) = (0,1)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

b) Pour quels couples $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Quelle est en ce cas sa limite ?

On suppose dans toute la suite que $a \neq 0$ et que $(u_0, u_1) \neq (0,0)$.

3. On suppose dans cette question que $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$ et que $0 < a < 1$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et qu'elle croît sur $\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_{n+1} \leqslant (1+a^n)\,u_n \leqslant \mathrm{e}^{a^n} u_n$.
En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \mathrm{e}^{a^2/(1-a)} u_2$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On note $\ell(a, u_0, u_1)$, ou plus simplement $\ell(a)$, sa limite.
Montrer que $\ell(a) > 0$.

d) Soit un entier $p \geqslant 2$. Montrer que, pour $n > p$, $u_n - u_p = \sum\limits_{k=p}^{n-1} a^k u_{k-1}$

e) Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$, $\dfrac{u_{p-1}a^p}{1-a} \leqslant \ell(a) - u_p \leqslant \dfrac{\ell(a)a^p}{1-a}$.
En déduire que, quand p tend vers $+\infty$, $\ell(a) - u_p \sim \dfrac{\ell(a)a^p}{1-a}$.

f) Montrer que $\ell(a) \geqslant \dfrac{a^3 u_2}{1-a}$.
Le couple (u_0, u_1) étant fixé, quelle est la limite de $\ell(a)$ quand a tend vers 1 par valeurs inférieures ?

4. On suppose seulement que $0 < a < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution :

1. Si $a = 0$, la suite (u_n) est stationnaire à partir du rang 1 et vaut u_1.
Si $(u_0, u_1) = (0, 0)$, la suite (u_n) est identiquement nulle.

2. a) Si $a = 1$, la suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Pour exprimer u_n en fonction de n, on se reportera au cours !

b) Par linéarité, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0\frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + u_1\frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}}\phi^{n-1} - \frac{u_0 + \psi u_1}{\sqrt{5}}\psi^{n-1}$$

Comme $|\psi| < 1 < |\phi|$, il vient :

- si $\dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}} \neq 0$, alors $|u_n| \sim \dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}}\phi^{n-1}$ et la suite (u_n) diverge.
- si $\dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}} = 0$, alors $|u_n| \sim -\dfrac{u_0 + \phi u_1}{\sqrt{5}}\psi^{n-1}$ et la suite (u_n) tend vers 0.

3. a) La positivité et la croissance de la suite (u_n) s'établissent sans peine par récurrence.

b) Pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n-1} \leqslant u_n$ et donc $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1} \leqslant (1 + a^n)u_n$.
Enfin, comme pour $x > 0, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, il vient $u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{a^n} u_n$.
Par récurrence, et comme $0 < a < 1$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 2$

$$u_n \leqslant \exp\big(\sum_{k=2}^{n} a^k\big)u_2 \leqslant \exp\big(\sum_{k=2}^{+\infty} a^k\big)u_2 = \mathrm{e}^{a^2/(1-a)}u_2.$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge vers une limite $\ell(a) \geqslant u_2 > 0$.

d) On sait que $u_{k+1} - u_k = a^k u_{k-1}$. Donc pour tout $n > p$:

$$u_n - u_p = \sum_{k=p}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=p}^{n-1} a^k u_{k-1}.$$

e) Soit $p \geqslant 2$.
On sait que la série $\sum a^k u_{k-1}$ est convergente, puisque $0 < a^k u_{k-1} \leqslant \ell(a)a^k$ et $0 < a < 1$. De plus, pour $k \geqslant p, a^k u_{k-1} \geqslant a^k u_{p-1}$. Il s'ensuit que :

$$\sum_{k=p}^{n-1} a^k u_{p-1} \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} a^k u_{k-1} \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \ell(a)a^k$$

et donc que

$$\frac{u_{p-1}a^p}{1-a} \leqslant \ell(a) - u_p \leqslant \frac{\ell(a)a^p}{1-a}.$$

Lorsque p tend vers l'infini, $\dfrac{u_{p-1}}{\ell(a)} \leqslant \dfrac{1-a}{\ell(a)a^p}(\ell(a) - u_p) \leqslant 1$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure qu'au voisinage de $+\infty$
$$\ell(a) - u_p \sim \frac{\ell(a)a^p}{1-a}$$
f) En appliquant la minoration précédente avec $p = 3$, il vient
$$\ell(a) \geqslant u_3 + \frac{u_2 a^3}{1-a} \geqslant \frac{u_2 a^3}{1-a}$$
Il s'ensuit que $\lim\limits_{a \to 1^-} \ell(a) = +\infty$.

4. Notons (v_n) la suite (u_n) définie pour $(u_0, u_1) = (1, 0)$ et (w_n) la suite (u_n) définie pour $(u_0, u_1) = (0, 1)$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 v_n + u_1 w_n$. Il s'ensuit que la suite (u_n) converge.

Exercice 1.15.

Soit n un entier naturel non nul.
On pose : $A = (X+1)^{2n} - 1$ et $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin \dfrac{k\pi}{n}$

1. Justifier que A peut s'écrire $X.B$, où B est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant b_0.

2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$ (on les écrira sous forme exponentielle). En déduire une factorisation de B puis exprimer b_0 en fonction des racines de B.

3. Calculer le produit des racines de B. En déduire la valeur de p_{2n}.

4. Déterminer la valeur de $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin \dfrac{k\pi}{2n}$.

Solution :

1. En développant A par la formule du binôme, il vient :
$$A = X^{2n} + \cdots + 2nX = X(X^{2n-1} + \cdots + 2n)$$

2. x est racine de A si et seulement si $(x+1)^{2n} = 1$. On obtient donc les $2n$ racines (pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$) :
$$\begin{aligned} x_k &= \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1 = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left[\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right] \\ &= 2i \sin\frac{k\pi}{2n} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

- Pour $k = 0$, on retrouve la racine $x_0 = 0$;
- pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, on a $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$ et on peut écrire :
$$x_k = 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \exp\left(i\left(\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
qui est l'écriture exponentielle de x_k.

Comme B est de coefficient dominant 1, on peut écrire : $B = \prod_{k=1}^{2n-1}(X - x_k)$.

On obtient donc en développant

$$b_0 = (-1)^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1} x_k = -\prod_{k=1}^{2n-1} x_k.$$

3. En développant le produit des racines on obtient :

$$P = \prod_{k=1}^{2n-1} x_k = 2^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(i(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2})\right)\right]$$

Soit :

$P = 2^{2n-1}p_{2n}\exp\left(i\sum_{k=1}^{2n-1}(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2})\right) = 2^{2n-1}p_{2n}\exp\left(i(2n-1)\frac{\pi}{2}+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2^{2n-1}p_{2n}(-1)^{2n-1} = -2^{2n-1}p_{2n}$

On en déduit :

$$p_{2n} = \frac{b_0}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}$$

4. On a :

$$p_{2n} = \prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)\times\sin\frac{n\pi}{2n}\times\left(\prod_{k=n}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$$

le changement d'indice $j = 2n - k$ dans le deuxième produit donne :

$$p_{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2 \text{ et donc : } \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

1. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et f, g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis dans la base canonique (i, j) par :

$$\begin{cases} f(i) = j \\ f(j) = i \end{cases} \text{ et } \begin{cases} g(i) = i \\ g(j) = -j \end{cases}$$

a) Montrer que f et g sont des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^2$.

b) Existe-t-il une base orthonormale qui diagonalise simultanément f et g ?

Dans la suite E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n et p un entier naturel non nul.

2. Soit $f_1, \ldots, f_p$, p endomorphismes symétriques de E qui commutent deux à deux.

Dans cette question seulement on suppose en outre qu'il existe un réel λ tel que :

$$0 < \dim(\ker(f_1 - \lambda I)) < n$$

a) Montrer que, pour tout entier $j \in [\![1; n]\!]$, $\ker(f_1 - \lambda I)$ est stable par f_j.

b) Montrer que pour tout entier $j \in [\![1; n]\!]$, $[\ker(f_1 - \lambda I)]^\perp$ est stable par f_j.

3. a) La restriction d'un endomorphisme symétrique de E à un sous espace vectoriel F stable est-elle un endomorphisme symétrique de F ?

b) Soit $g_1, \ldots, g_p$, p endomorphismes symétriques de E. Montrer qu'ils commutent deux à deux si et seulement si ils sont simultanément diagonalisables.

Solution :

1. a) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ étant une base orthonormée pour le produit scalaire canonique, on voit immédiatement que f et g sont des endomorphismes symétriques, leurs matrices associées dans la base (i, j) étant symétriques réelles.

b) S'il existe une base commune de diagonalisation de f et g, alors il existe une base commune de vecteurs propres de ces deux endomorphismes.
Or les vecteurs propres de g sont les vecteurs λi et μj, avec $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$, qui ne sont pas vecteurs propres de f.
Ainsi f et g ne sont pas «codiagonalisables»

2. a) Comme f_j commute avec f_1, il vient, si $x \in \operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)$:
$$(f_1 - \lambda I)\big(f_j(x)\big) = f_j\big((f_1 - \lambda I)(x)\big) = f_j(0) = 0,$$
ainsi $f_j(x) \in \operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)$.

b) Soit $z \in [\operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)]^{\perp}$. Alors pour tout $x \in \operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)$:
$$\langle f_j(z), x\rangle = \langle z, f_j(x)\rangle = 0$$
par la question précédente, donc $f_j(z) \in [\operatorname{Ker}(f_1 - \lambda I)]^{\perp}$.

3. a) La propriété d'être un endomorphisme symétrique est une propriété «universelle» liée au produit scalaire. La restriction d'un endomorphisme symétrique à un sous–espace stable reste donc un endomorphisme symétrique de ce sous–espace.

b) $\star$ Si les endomorphismes $g_1, \dots g_p$ sont simultanément diagonalisables, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice associée à chaque g_i est diagonale. Or deux matrices diagonales commutent ...

$\star$ Réciproquement, démontrons le résultat demandé par récurrence sur la dimension de E.

Si tous les g_i sont des homothéties, ils sont diagonalisables dans la base canonique de E.

Supposons que g_1 ne soit pas une homothétie. Il existe alors λ valeur propre de g_1 telle que $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(g_1 - \lambda I) < n$.
Notons $F = \operatorname{Ker}(g_1 - \lambda I)$. Le sous–espace F et son orthogonal $F^{\perp}$ sont stables par chaque $g_2, \dots, g_p$ et la restriction de chacun des ces endomorphismes symétriques à F et $F^{\perp}$ reste un endomorphisme symétrique.
Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à F et $F^{\perp}$: il existe des bases orthonormées de chacun de ces deux sous–espaces de E qui diagonalisent simultanément $g_1, \dots, g_p$. La concaténation de ces deux bases est une base orthonormée de E qui diagonalise simultanément $g_1, \dots, g_p$.

Exercice 2.2.

Soit n un entier naturel, tel que $n \geqslant 2$, et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Si A est la matrice de terme général $(a_{i,j})$, on appelle «trace» de A le nombre $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques (c'est-à-dire vérifiant ${}^tA = -A$).

On pose enfin, pour $(A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A.{}^tB)$.

1. Exprimer $\langle A, B \rangle$ en fonction des coefficients de A et de B, et montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire. On notera $||.||$ la norme associée.

2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

3. On suppose dans cette question $n = 3$ et on pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la distance de M à $S_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\inf\limits_{N \in S_3(\mathbb{R})} ||M - N||$.

4. Soit $H = \{M \in E \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension.

b) Soit $M \in H$. Calculer $\langle M, I_n \rangle$ (où I_n désigne la matrice identité d'ordre n).

c) Soit J la matrice de E dont tous les termes sont égaux à 1. Déterminer la distance de J à H.

Solution :

1. On a pour toutes matrices $A = (a_{i,j})$ et $b = (b_{i,j})$:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

En convenant de confondre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$ (en mettant, par exemple, les lignes «bout à bout»), on reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ et la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour ce produit scalaire.
Notons que l'on a : $||A|| = \sqrt{\sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2}$.

2. $\star$ Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$, on a :
$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^tB) = -\operatorname{tr}(AB)$; $\langle B, A \rangle = \operatorname{tr}(B^tA) = \operatorname{tr}(BA)$.

Or un calcul simple montre que, pour toutes matrices A et B : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on en déduit :

$$\forall\, A \in S_n(\mathbb{R}), \forall\, B \in A_n(\mathbb{R}), \langle A, B\rangle = 0$$

Ainsi, $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$, qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont des sous-espaces orthogonaux.

⋆ Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

La première matrice étant symétrique et la seconde antisymétrique, on en déduit :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$$

La conjonction de ces deux propriétés donne :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} A_n(\mathbb{R})$$

3. $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \min\limits_{N \in S_3(\mathbb{R})} ||M - N|| = ||M - p(M)||$, où $p(M)$ est la projection orthogonale de M sur $S_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire où $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

Ainsi : $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}||M - {}^tM||$

Comme $M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, il vient $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7}$.

4. a) On vérifie facilement que l'application $\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Comme cette application est non nulle (on a $\varphi(I) = n$), son image est $\mathbb{R}$, qui est de dimension 1 et donc H, qui est son noyau, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

b) $\langle M, I_n\rangle = \mathrm{tr}(M) = 0$, *i.e.* $I_n \in H^{\perp}$ et $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

c) Soit q la projection orthogonale sur $H^{\perp}$, alors $d(J, H) = ||q(J)||$.

Or $q(J) = \dfrac{\langle J, I_n\rangle}{||I_n||}\, I_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}}\, I_n$ et donc :

$$d(J, H) = \frac{n}{\sqrt{n}}\,\sqrt{n} = n.$$

Exercice 2.3.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est un vecteur propre de ${}^tM$.
Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAX = 0$ entraîne ${}^tAMX = 0$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que M et ${}^tM$ ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M, $g \in \mathcal{L}(E)$ de matrice ${}^tM$ dans cette base.

Montrer que $u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ est un vecteur propre de g si et seulement si le plan d'équation P d'équation $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ est stable par f.

4. On pose $M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Donner les valeurs propres de M.

b) Donner toutes les droites stables par f.

c) Donner tous les plans stables par f.

Solution :

1. Soit λ la valeur propre associée, on a ${}^tAMX = {}^t({}^tMA)X = {}^t(\lambda A)X = \lambda {}^tAX$.

Ainsi si ${}^tAX = 0$, il vient $\lambda {}^tAX = 0$ et ${}^tAMX = 0$.

2. On sait que pour toute matrice M, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$. Ainsi $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible, si et seulement si ${}^t(M - \lambda I_3) = {}^tM - \lambda I_3$ n'est pas inversible, donc les valeurs propres sont les mêmes et ces deux matrices ayant alors le même rang, leurs noyaux sont de même dimension, donc les sous-espaces propres associés sont de même dimenson.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\star$ Si $u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ est un vecteur propre de g, A est un vecteur colonne propre de ${}^tM$, donc :

$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in P \implies {}^tAX = 0 \implies {}^tA(MX) = 0 \implies f(u) \in P$, et P est stable par f.

$\star$ Si P est un plan stable par f, avec les mêmes notations, $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ et ${}^tAX = 0 \implies {}^tAMX = 0$. Notons alors ${}^tAM = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)$, on a :

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0 \implies b_1x + b_2y + b_3z = 0,$$

donc le système $\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$ n'est pas de rang 2 et la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc sa deuxième ligne est proportionnelle à sa première : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}, {}^tAM = \lambda {}^tA$, soit ${}^tMA = \lambda A$ et A est colonne propre de ${}^tM$.

4. a) $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 3 & -4 \\ -6 & -2-\lambda & 5 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 4L_1-(7-\lambda)L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2+3L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -2+2\lambda & -9+6\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 2-2\lambda & 7-3\lambda \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 \\ 0 & 2-2\lambda & 7-3\lambda \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Si on veut la forme habituelle d'ue réduite de Gauus, il suffit de permuter alors les lignes L_1 et L_3. Comme $-\lambda^2+3\lambda-2 = -(\lambda-1)(\lambda-2)$, les valeurs propres de M sont 1 et 2.

b) $\star$ Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est défini par le système :

$$\begin{cases} 0 &= 0 \\ 4z &= 0 \\ 4x+2y-2z &= 0 \end{cases}$$

donc est la droite dirigée par le vecteur $(1,-2,0)$.

$\star$ Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est défini par le système :

$$\begin{cases} 0 &= 0 \\ -2y+z &= 0 \\ 4x+2y-3z &= 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $z = 2y$ et $x = y$. Il s'agit de la droite engendrée par $(1,1,2)$.

Une droite stable étant engendrée par un vecteur propre, il n'existe que deux droites stables par f, à savoir les deux droites précédentes.

c) On sait déjà que les valeurs propres de ${}^tM$ sont 1 et 2.

On obtient $E_1({}^tM) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $E_2({}^tM) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi il existe exactement deux plans stables par f, à savoir les plans d'équations respectives $4x+2y-3z=0$ et $2x+2y-z=0$.

Exercice 2.4.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On notera Id_E l'application identité de E et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -Id_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de vecteurs de E. On suppose que la famille $(e_1, \ldots, \mathrm{e}_p, f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}))$ est libre. Montrer qu'alors la famille $(e_1, \ldots, \mathrm{e}_p, f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est libre.

3. Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et p vecteurs $e_1, \dots, e_p$ de E tels que la famille $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p))$ soit une base de E.
Quelle est la matrice de f dans cette base ?

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2p}$.

a) Montrer que A ne possède aucune valeur propre réelle.

b) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c) Soit $B \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On suppose que A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

a) Calculer A^2.

b) Donner une base de $\mathbb{R}^4$ dans la quelle la matrice de f est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :

1. f est bijective et $f^{-1} = -f$, donc f est un automorphisme de E.

2. Supposons la famille $\big(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ liée, alors par liberté de la famille des $2p-1$ premiers vecteurs, il existe une unique liste de scalaires telle que :

$$f(e_p) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k f(e_k)$$

et, en appliquant f :

$$-e_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k) - \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k e_k$$

ou encore : $\lambda_p f(e_p) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \mu_k e_k - e_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_k f(e_k)$;

alors que : $\lambda_p f(e_p) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_p \lambda_k e_k + \lambda_p^2 e_p + \sum\limits_{k=1}^{p-1} \lambda_p \mu_k f(e_k)$

Par unicité de la décomposition de $f(e_p)$, on en déduit $\lambda_p^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.
En conclusion $\big(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille libre.

3. On initialise le processus avec un vecteur $e_1 \neq 0$ et $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est libre, ... Le processus s'arrête car E est de dimension finie. On obtient ainsi une base $\mathcal{B}$ du type demandé (donc n est pair de la forme $2p$) et :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = J = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

4. a) Soit λ une éventuelle valeur propre réelle de A et X une colonne propre associée.
On aurait donc $AX = \lambda X$ et $-X = A^2X = \lambda^2 X$, d'où $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$$

b) Proposons une méthode un peu plus inhabituelle :
A vérifie $(A - iI)(A + iI) = 0$, soit $(A - iI)(A - iI + 2iI) = 0$, ou encore :

$$(A - iI)^2 = -2i(A - iI)$$

Ainsi la matrice $B = -\frac{1}{2i}(A - iI)$ vérifie $B^2 = B$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puisque matrice de projecteur. La matrice A est alors diagonalisable, avec la même matrice de passage.

c) A et B sont semblables à la même matrice J, donc semblables entre elles.

5. a) On trouve $A^2 = -I_4$.

b) On prend $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $e_4 = Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ achève la détermination de $\mathcal{B}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = J$.

Exercice 2.5.

A tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ on associe $N(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \big|P^{(k)}(k)\big|$.

1. a) Vérifier que $N(P)$ est bien défini pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que N vérifie :

(i) $\forall\, P \in \mathbb{R}[X], N(P) \geqslant 0$ et $N(P) = 0 \Longrightarrow P = 0$

(ii) $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda P) = |\lambda|.N(P)$

(iii) $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(1), ..., P^{(n)}(n)) \end{array}$

2. a) Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Donner sa matrice M dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Montrer que M est diagonalisable.

3. On suppose $n = 3$

a) Déterminer M^{-1}

b) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
Exprimer $P'(0)$ et $P''(0)$ en fonction de $P'(1)$, $P''(2)$ et $P^{(3)}(3)$.

Solution :

1. a) $N(P)$ est bien défini, car la sommation qui définit ce nombre est en fait finie (pour $k > \deg P, P^{(k)}(k) = 0$).

b) i) On a clairement $N(P) \geqslant 0$ et si P n'est pas la polynôme nul, notons k son degré. On a alors $P = a_k X^k + \cdots$, d'où $P^{(k)}(k) = k!a_k \neq 0$ et $N(P) > 0$. Ce qui donne le résultat par contraposée.

ii) et iii) résultent de la linéarité de la dérivation et des propriétés de la fonction « valeur absolue ».

2. a) φ est clairement linéaire et $P \in \operatorname{Ker}\varphi \implies N(P) = 0 \implies P = 0$, donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et φ est injectif.
Puisque $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, φ est donc un isomorphisme.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n! \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

b) Les valeurs propres de M sont en évidence : $1, 2, 3!, \dots, n!$ et sont au nombre de n.
Le sous-espace propre relatif à la valeur propre 1 est de dimension 2 et engendré par les matrices colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, donc M est diagonalisable.

3. a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$.

b) On a $P(X) = \sum_{k=0}^{3} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ et :

$$M \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ \dfrac{P''(0)}{2} \\ \dfrac{P^{(3)}(0)}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(1) \\ P''(2) \\ P^{(3)}(3) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \\ \dfrac{P''(0)}{2} \\ \dfrac{P^{(3)}(0)}{6} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(1) \\ P''(2) \\ P^{(3)}(3) \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{cases} P'(0) = P'(1) - P''(2) + \frac{3}{2} P^{(3)}(3) \\ P''(0) = P''(2) - 2P^{(3)}(3) \end{cases}$$

Exercice 2.6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Soit L l'application définie sur E par

$$L(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\, dt$$

1. Montrer que L est une application linéaire. Déterminer son image et la dimension de son noyau. Donner une base de son noyau.

2. Pour tout λ réel non nul, on considère l'application T_λ définie sur E par

$$T_\lambda(P) = P + \lambda L(P) X$$

a) Montrer que T_λ est un endomorphisme de E.

b) Écrire la matrice associée à T_λ dans la base canonique de E.

c) Déterminer les valeurs propres de T_λ ainsi que son rang. L'endomorphisme T_λ est-il diagonalisable ?

d) Montrer que T_λ est bijective, déterminer T_λ^{-1}.

Solution :

1. L'application L est une forme (puisque pour tout $P \in E$, $L(P) \in \mathbb{R}$) linéaire par linéarité de l'intégrale. Son image est $\mathbb{R}$, car $L(1) = 2 \neq 0$ et par le théorème du rang, son noyau est de dimension n.

On remarque que tout polynôme impair est élément de $\operatorname{Ker} L$.

• si $n = 2p$, la famille $(X, X^3, \ldots, X^{2p-1})$ est de cardinal p et ses éléments appartiennent à $\operatorname{Ker} L$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$L(X^{2k}) = \frac{2}{2k+1} \implies \frac{2k+1}{2}X^{2k} - \frac{2k-1}{2}X^{2k-2} \in \operatorname{Ker} L$$

La famille $\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}X^2,\dots,-\frac{2p-1}{2}X^{2p-2}+\frac{2p+1}{2}X^{2p}\right)$ est de cardinal p et ses éléments appartiennent à $\operatorname{Ker} L$.

L'« union » des deux familles est de cardinal $2p$ et forme une base du noyau de L (cette famille est libre, puisque ses éléments sont des polynômes de degrés échelonnés).

• si $n = 2p+1$, la famille $(X, X^3, \dots, X^{2p+1})$ est de cardinal $p+1$ et est formée d'éléments de $\operatorname{Ker} L$. La famille $\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}X^2,\dots,-\frac{2p-1}{2}X^{2p-2}+\frac{2p+1}{2}X^{2p}\right)$ est de cardinal p et formée d'éléments de $\operatorname{Ker} L$.

L'« union » des deux familles est de cardinal $2p+1$ et forme une base du noyau de L, puisque ses éléments sont des polynômes de degrés échelonnés.

(On peut évidemment faire d'autres choix...)

2. a) On vérifie immédiatement que T_λ est une application linéaire de E. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$T_\lambda(X^k) = \begin{cases} X^{2j} + \dfrac{2\lambda}{2j+1}X & \text{si } k = 2j \\ X^{2j+1} & \text{si } k = 2j+1 \end{cases}$$

b) La matrice associée à T_λ dans la base canonique de E s'en déduit immédiatement. Par exemple dans le cas où n est pair $(n = 2p)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \frac{2\lambda}{3} & \dots & \frac{2\lambda}{2p+1} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

c) Soit μ une valeur propre de T_λ et P un polynôme propre associé. On a alors :

$$T_\lambda(P) = \mu P \iff \lambda L(P)X = (\mu - 1)P$$

• si $P \in \operatorname{Ker} L$, alors $(\mu - 1)P = 0$, donc $\mu = 1$.
Réciproquement, si $\mu = 1$, comme $\lambda \neq 0$, on a $P \in \operatorname{Ker} L$.
Ainsi $\mu = 1$ est valeur propre de T_λ, le sous–espace propre associé étant le noyau de L qui est de dimension n.

• si $\mu \neq 1$, alors $L(P) \neq 0$, et $P = \dfrac{\lambda L(P)}{\mu - 1}X$. Mais dans ce cas

$$L(P) = \frac{\lambda L(P)}{\mu - 1}L(X) = 0$$

C'est une contradiction.

Finalement, T_λ n'admet qu'une seule valeur propre $\mu = 1$. Le sous–espace propre associé n'étant pas E tout entier, l'endomorphisme T_λ n'est pas diagonalisable.

d) L'endomorphisme T_λ est bijectif, puisque 0 n'est pas une valeur propre. Comme $E = \text{Vect}(1) \oplus \operatorname{Ker} L$ et comme $(T_\lambda - I)P = \lambda L(P)X$, il vient :

$$\begin{cases} (T_\lambda - I)_{|\operatorname{Ker} L} = 0 \\ (T_\lambda - I)(1) = 2\lambda X \end{cases} \implies (T_\lambda - I)^2 = 0$$

Donc :

$$T_\lambda^2 - 2T_\lambda + I = 0 \text{ et } T_\lambda^{-1} = 2I - T_\lambda$$

Exercice 2.7.

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels. $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Soit m un entier naturel, et $q_0, q_1, \dots, q_m$, $(m+1)$ nombres réels distincts.

1. Montrer que pour tout $j \in \{0, \dots, m\}$ il existe un unique polynôme L_j de degré inférieur ou égal à m tel que

$$L_j(q_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_m)$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer l'expression de P dans cette base.

3. Déterminer l'ensemble suivant : $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall q \in \mathbb{Q}, P(q) \in \mathbb{Q}\}$.

4. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E diagonalisable.
Montrer qu'il existe k scalaires, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et k projecteurs de E, $p_1, \dots, p_k$ vérifiant les trois propriétés :

i) pour tout $i \neq j, p_i \circ p_j = 0$

ii) $Id = p_1 + \cdots + p_k$, où Id représente l'endomorphisme identité

iii) $u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k$.

Solution :

1. Soit $j \in [\![0, m]\!]$. Définissons le polynôme L_j de degré m par

$$L_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{X - q_i}{q_j - q_i}$$

On a alors de façon évidente : $L_j(q_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

D'autre part, si P est un polynôme ayant les propriétés demandées, alors le polynôme $P - L_j$ s'annule en $q_0, \ldots, q_m$ (y compris q_j), étant de degré inférieur ou égal à m, c'est le polynôme nul et $P = L_j$, ce qui montre l'unicité de la solution.

2. a) Les polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_m$ sont éléments de $\mathbb{R}_m[X]$ et le cardinal de la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_m)$ est $m+1$. Montrons qu'ils forment une famille libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ tels que $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k L_k = 0$. On a alors pour tout $j \in [\![0, m]\!]$:

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k L_k(q_j) = \lambda_j$$

Ainsi la famille est libre de cardinal ad hoc et formée d'éléments de $\mathbb{R}_m[X]$, donc est une base de cet espace.

b) Si l'on pose $P = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k L_k$, alors le raisonnement précédent montre que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$, $\lambda_j = P(q_j)$. Donc

$$P = \sum_{k=0}^{m} P(q_k) L_k$$

3. Montrons que $\mathcal{E} = \mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels.

- si $P \in \mathbb{Q}[X]$, alors pour tout $q \in \mathbb{Q}, P(q) \in \mathbb{Q}$.
- Réciproquement si $P \in \mathcal{E}$, on peut supposer P de degré m. On choisit alors $(m+1)$ nombres *rationnels* distincts $q_0, q_1, \ldots, q_m$. La question précédente permet d'écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{m} P(q_k) L_k, \text{ avec } L_k \in \mathbb{Q}[X]$$

Donc $P \in \mathbb{Q}[X]$.

4. L'endomorphisme u étant diagonalisable, on peut écrire $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$, où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sont les valeurs propres distinctes de u et $(E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k})$ les sous-espaces propres associés.

Les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ permettent de définir k polynômes $L_1, \ldots, L_k$ comme dans la première question. Posons alors, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$p_j = L_j(u) = \prod_{i \neq j} \frac{u - \lambda_i Id}{\lambda_j - \lambda_i}$$

Soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + \cdots + x_k$, chaque x_i appartenant à E_{λ_i}. On a alors :

$$p_j(x) = L_j(u)(x_1 + \cdots + x_k) = L_j(u)(x_j) = x_j$$

Cela montre que $p_j^2 = pj$ et que pour $k \neq j, p_j \circ p_k = 0$.

Enfin, par la question 2,

$$1 = \sum_{i=1}^{k} L_i \implies Id = \sum_{i=1}^{k} L_i(u) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$
$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i L_i \implies u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i L_i(u) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$$

Exercice 2.8.

Soit a un réel, $a \neq 1$, et p un entier naturel. On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à p. On pose :

$$S_{a,p} = \{u = (u_n)_{n\geqslant 0} \mid \exists P \in \mathbb{R}_p[X] \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\}$$

1. Soit $u \in S_{a,p}$.
Montrer l'unicité du polynôme P tel que $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = au_n + P(n)$.
(*on pourra utiliser la fonction* $\varphi : \mathbb{R}_p[X] \to \mathbb{R}^{p+1}$ *définie par :*

$$\varphi(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(p)) \text{ .)}$$

On notera P_u le polynôme ainsi défini. En déduire que $S_{a,p}$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

2. Soit $\theta : S_{a,p} \to \mathbb{R}_p[X]$ définie par $\theta(u) = P_u$. Montrer que θ est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker}\theta$ ainsi qu'une base de cet espace.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $R_k(X) = (X+1)^k - aX^k$.
   a) Montrer que la famille $(R_0, R_1, \ldots, R_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
   b) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, $R_k \in \operatorname{Im}\theta$. En déduire $\operatorname{Im}\theta$.
   c) Quelle est la dimension de $S_{a,p}$?
   d) Déterminer une base de $S_{a,p}$.

4. Déterminer la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$u_0 = -2 \text{ et pour tout } n \geqslant 0, u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7.$$

Solution :

1. L'application φ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension $p+1$. Son noyau est réduit à $\{0\}$, car si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, le polynôme P de degré inférieur ou égal à p admet $(p+1)$ racines distinctes, donc est le polynôme nul.
L'application φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$.
Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q définissant la suite $u \in S_{a,p}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) = Q(n)$ et en particulier $\varphi(P) = \varphi(Q)$, soit $P = Q$.
Enfin $S_{a,p}$ contient la suite nulle associée au polynôme nul et si $(u, v) \in S_{a,p}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + v \in S_{a,p}$ associée au polynôme $\lambda P_u + P_v$.

2. La linéarité de l'application θ a été démontrée dans la question précédente. Soit $u \in \operatorname{Ker}\theta$. Cela signifie que $P_u = 0$ donc que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison a et $u_n = a^n u_0$.

Réciproquement, si (u_n) est une suite géométrique de raison a, on a $u_{n+1} = au_n$ et $u \in S_{a,p}$ entraîne que $P_u = 0$.

Ainsi $\operatorname{Ker}\theta$ est la droite engendrée par la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. a) Comme $a \neq 1$, la famille $(R_0, \ldots, R_p)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ de degrés échelonnés et de cardinal $(p+1)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

b) Soit $k \in [\![0,p]\!]$. La suite $x^{(k)}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n^{(k)} = n^k$, vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1}^{(k)} = ax_n^{(k)} + R_k(n) = ax_n^{(k)} + \left((n+1)^k - an^k\right)$$

Donc, pour tout $k \in [\![0,p]\!], R_k \in \operatorname{Im}\theta$ et $\operatorname{Im}\theta = \mathbb{R}_p[X]$.

c) Par le théorème du rang, il vient $\dim S_{a,p} = 1 + p + 1 = p + 2$.

d) Une base de $S_{a,p}$ est définie par $\left((a^n)_{n\in\mathbb{N}}, x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}\right)$. En effet, c'est une famille de cardinal $(p+2)$ qui est libre car si $\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k x^{(k)} + \mu(a^n) = 0$, alors en appliquant θ, il vient $\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k R_k = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, puis $\mu = 0$.

4. Appliquons les résultats précédents.
La suite cherchée est de la forme $n \mapsto \lambda a^n + \lambda_0 x_n^{(0)} + \lambda_1 x_n^{(1)}$.
En regardant les premières valeurs, il vient

$$\begin{cases} \lambda + \lambda_0 = -2 \\ 2\lambda + \lambda_0 + \lambda_1 = 3 \\ 4\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 = 11 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda_0 = -5 \\ \lambda_1 = 2 \end{cases}$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3.2^n + 2n - 5$$

Exercice 2.9.

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $u^2 = u \circ u = 0$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de u.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2. a) Comparer $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$. En déduire que $\operatorname{rg} u \leq 2$.

b) Montrer que si $\operatorname{rg} u = 1$, il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle u est représenté par une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que u est de rang égal à deux.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle u est représenté par la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Existe-t-il un endomorphisme v de $\mathbb{R}^4$ tel que $v^2 = u$?

5. On note $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \,/\, u \circ v = v \circ u\}$ et
$$\mathcal{P}(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \,/\, \exists S \in \mathbb{R}[X],\ v = S(u)\}$$

a) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et en donner la dimension.

b) A-t-on $\mathcal{C}(u) = \mathcal{P}(u)$?

Solution :

1. a) Comme $u^2 = 0$, si λ est valeur propre de u, alors $\lambda^2 = 0$. Réciproquement, comme $u^2 = 0$, l'endomorphisme u n'est pas injectif et 0 est valeur propre de u. Finalement la seule valeur propre de u est 0.

b) L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable, car autrement on aurait $u = 0$.

2. a) Comme $u \circ u = 0$, on a $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Ker} u$. Le théorème du rang entraîne que $4 = \operatorname{rg}(u) + \dim \operatorname{Ker} u \geqslant 2\operatorname{rg}(u)$. D'où $\operatorname{rg}(u) \leqslant 2$.

b) Soit (y) une base de $\operatorname{Im} u$. Il existe $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $y = u(x)$. Comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, on complète (y) en (y, z, t) base de $\operatorname{Ker} u$. Alors (x, y, z, t) est une base de $\mathbb{R}^4$. En effet :
$ax + by + cz + dt = 0 \implies u(ax + by + cz + dt) = au(x) = ay = 0$, donc $a = 0$, puis $by + cz + dt = 0 \implies b = c = d = 0$.
La matrice associée à u dans cette base est :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dans le cas où $\operatorname{rg}(u) = 2$, on a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Soit (e_1, e_2) une base de $\operatorname{Ker} u$. Il existe e_3, e_4 tels que $u(e_3) = e_1, u(e_4) = e_2$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ (démonstration identique à celle de la question précédente) et la matrice associée à u dans cette base est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La réponse à cette question est positive. Par exemple l'endomorphisme v dont la matrice associée dans la base précédente est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
vérifie $v^2 = u$.

5. a) Si $(v, w) \in \mathcal{C}(u)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
$$(\lambda v + w) \circ u = \lambda(v \circ u) + (w \circ u) = \lambda(u \circ v) + (u \circ w) = u \circ (\lambda u + w)$$
Puisque $0 \in \mathcal{C}(u)$, l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ est non vide et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.
Pour déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$, on fait un calcul matriciel et on trouve l'ensemble des matrices de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & b & e & f \\ c & d & g & h \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$
avec (a, b, c, d, e, f, g, h) réels. Ainsi $\dim \mathcal{C}(u) = 8$.

b) Comme $u^2 = 0$, on voit immédiatement que $\mathcal{P}(u) = \mathrm{Vect}(Id, u)$ qui est de dimension 2. Donc $\mathcal{P}(u)$ est différent de $\mathcal{C}(u)$.

Exercice 2.10.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :
$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_1^j + \lambda_2^j + \cdots + \lambda_n^j = n$$
On se propose de déterminer les λ_k. Pour cela, on pose
$$S(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$
et on note p le nombre de racines distinctes de S et $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ l'ensemble des racines de S. Enfin, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note n_i l'ordre de multiplicité de la racine μ_i de S.

a) Montrer que la matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de terme général $m_{i,j} = \mu_j^{i-1}$ pour $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ est inversible.

b) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, donner la valeur de $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^j$.

c) On note $X = \begin{pmatrix} n_1(\mu_1 - 1) \\ \vdots \\ n_p(\mu_p - 1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Calculer MX.

d) Déduire de ce qui précède que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 1$.

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A.

a) Montrer que $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

b) En déduire que $\forall\,(A,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que pour tout $j \in [\![1,n]\!], \mathrm{tr}(A^j) = n$. Déterminer la matrice A.

Solution :

1. a) Montrons que les lignes $L_1,\dots,L_p$ de la matrice M sont linéairement indépendantes. Soit $(a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i L_i = 0$.

Posons $R(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_p t^{p-1}$. On a alors

$$R(\mu_1) = R(\mu_2) = \cdots = R(\mu_p) = 0.$$

Le polynôme R de degré inférieur ou égal à $(p-1)$ admet p racines : c'est le polynôme nul et $a_1 = \cdots = a_p = 0$, d'où la conclusion.

b) On a : $S(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} (t-\lambda_k) = \prod\limits_{i=1}^{p} (t-\mu_i)^{n_i}$.

On a donc, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^j = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^j = n$.

Enfin $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^0 = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n = \deg(S)$.

c) Par différence, on déduit que pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \mu_i^{j-1}(\mu_i - 1) = n - n = 0$, donc $MX = 0$.

d) La matrice M étant inversible, cela entraîne que $X = 0$, soit, pour tout $i \in [\![1,p]\!], n_i = 0$ ou $\mu_i = 1$.

Comme les n_i sont dans $\mathbb{N}^*$ et que les μ_i sont deux à deux distincts, ceci impose $p = 1, \mu_1 = 1$ et $n_1 = n$. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1,k]\!], \lambda_k = 1$.

2. a) Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a alors :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}\right) = \mathrm{tr}(BA)$$

b) Si P est inversible, on peut écrire, par la question précédente :

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$$

3. Il existe une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et P inversible telles que $P^{-1}AP = D$. On a alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^j = \mathrm{tr}\, D^j = \mathrm{tr}(PA^jP^{-1}) = \mathrm{tr}\, A^j = n.$$

Par la première question, pour tout $k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 1$ et $D = I$; donc :
$$A = PIP^{-1} = I.$$

Exercice 2.11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que pour tout endomorphisme f de E il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$. Ce polynôme est-il unique ?

b) Existe-t-il un polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout f de $\mathcal{L}(E)$ on ait $P(f) = 0$?

2. Soit $(f, u) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f = \alpha.u$ et $f^2 = \alpha^2.u$.

a) Déterminer un polynôme annulateur simple de f.

b) Montrer que f est diagonalisable. *(pour $\alpha \neq 0$ on pourra pour un x donné, écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = -\dfrac{1}{\alpha}[f(x) - \alpha\, x]$ et $x_2 = \dfrac{1}{\alpha}f(x)$ et s'intéresser à $f(x_1)$ et $(f - \alpha.id_E)(x_2)$)*

c) Dans le cas où $\alpha \neq 0$, que peut-on dire de u ?

3. Soit $(f, u, v) \in \mathcal{L}(E)^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f = \alpha.u + \beta.v$, $f^2 = \alpha^2.u + \beta^2.v$ et $f^3 = \alpha^3.u + \beta^3.v$.

a) Calculer $f^3 - (\alpha+\beta)f^2 + \alpha\beta f$. Qu'en déduit-on pour les valeurs propres de f ?

b) Montrer que si l'on est dans un des trois cas suivants : $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta$, alors f est diagonalisable.

c) Si $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$ montrer que f est diagonalisable. On pourra procéder comme suit :

i) exprimer u et v en fonction de f ;

ii) montrer que u et v sont des projecteurs *(par exemple en calculant $u \circ (u - id_E)$)* tels que $u \circ v = v \circ u = 0$;

iii) montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$;

iv) montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$;

et conclure.

Solution :

1. On sait que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2. La famille $(I, f, f^2, \ldots, f^{n^2})$ est donc liée ; il existe des scalaires $(a_0, a_1, \ldots, a_{n^2})$ non tous nuls tels que
$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0$$
et donc un polynôme P de degré inférieur ou égal à n^2 tel que $P(f) = 0$.
Ce polynôme n'est pas unique puisque tout multiple de P est encore annulateur.

b) Supposons qu'il existe un polynôme P non nul tel que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $P(f) = 0$. Ce polynôme est de degré p et admet au plus p racines réelles ; soit α réel qui n'est pas racine de P ; alors $f = \alpha I$ ne peut être annulé par P, puisque $P(\alpha I) = P(\alpha)I \neq 0$.

2. a) Il est évident que $f^2 - \alpha f = 0$. Donc $P(X) = X^2 - \alpha X$ est annulateur de f. Les valeurs propres de f sont à prendre dans l'ensemble $\{0, \alpha\}$.

b) Si $\alpha = 0$, alors $f = 0$ est diagonal.

Supposons $\alpha \neq 0$. Écrivons :

$$x = x_1 + x_2, \text{ avec } x_1 = -\frac{1}{\alpha}\big(f(x) - \alpha x\big), \quad x_2 = \frac{1}{\alpha} f(x)$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} f(x_1) = -\dfrac{1}{\alpha}\big(f^2(x) - \alpha f(x)\big) = 0 \\ f(x_2) - \alpha x_2 = \dfrac{1}{\alpha}(f^2 - \alpha f)(x) = 0 \end{cases}$$

Ainsi $x_1 \in E_0(f) = \operatorname{Ker} f$, et $x_2 \in E_\alpha(f) = \operatorname{Ker}(f - \alpha I)$. Cela signifie que ces deux sous-espaces (qui sont en somme directe, puisque $E_0(f) \cap E_\alpha(f) = \{0\}$) sont supplémentaires et que f est diagonalisable.

c) Si $\alpha \neq 0$, alors $u = \dfrac{1}{\alpha} f$ vérifie $u^2 = u$, c'est–à–dire que u est un projecteur.

3. a) Un calcul élémentaire montre que $f^3 - (\alpha + \beta)f^2 + \alpha\beta f = 0$. Le polynôme $X(X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta)$ est annulateur de f.
Les valeurs propres de f sont à choisir dans $\{0, \alpha, \beta\}$.

b) Si $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta$, on est ramené à la question précédente, et f est diagonalisable.

c) Si $\alpha\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$, il vient :

i) $\quad u = \dfrac{f^2 - \beta f}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad v = \dfrac{f^2 - \alpha f}{\beta(\beta - \alpha)}$.

ii) On a :

$$\begin{aligned} u^2 - u &= \frac{1}{(\alpha(\alpha - \beta))^2}\big(f \circ (f - \beta I) \circ (f^2 - \beta f - \alpha(\alpha - \beta)I\big) \\ &= \frac{1}{(\alpha(\alpha - \beta))^2} f \circ \big(f^3 - 2\beta f^2 - (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)f + \alpha\beta(\alpha - \beta)I\big) \\ &= \frac{1}{(\alpha(\alpha - \beta))^2}\big(f \circ [(\alpha - \beta)f^2 - (\alpha^2 - \beta^2)f + \alpha\beta(\alpha - \beta)I]\big) \\ &= \frac{1}{\alpha^2(\alpha - \beta)}\big(f^3 - (\alpha + \beta)f^2 + \alpha\beta f\big) = 0 \end{aligned}$$

L'endomorphisme u est donc un projecteur.
Une démonstration identique montre que v est également un projecteur.

De plus :

$$u \circ v = v \circ u = \frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)^2}\left(f \circ (f-\alpha I) \circ f \circ (f-\beta I)\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)^2} f \circ \left(f^3 - (\alpha+\beta)f^2 + \alpha\beta f\right) = 0$$

iii) Comme $f = \alpha u + \beta v$, on a $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} f$. Réciproquement, la question i) montre que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} v$. Finalement

$$\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} f.$$

Soit $x \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v$, alors puisque u et v sont des projecteurs, $x = u(x) = v(x)$; donc $f^2(x) - \alpha f(x) = f^2(x) - \beta f(x)$ et comme $\alpha \neq \beta$, $f(x) = 0$ et $u(x) = v(x) = x = 0$.

De plus, comme, pour tout $x \in E$, $f(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$, et par la question i) $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} f$. Finalement

$$\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v = \operatorname{Im} f$$

iv) Finalement si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, il existe $y \in E$ tel que

$$x = f(y) = \alpha u(y) + \beta v(y).$$

Alors : $0 = f(x) = f^2(y) = \alpha^2 u(y) + \beta^2 v(y)$, donc avec la somme directe obtenue en iii), $u(y) = v(y) = 0$ et $x = 0$.

Par le théorème du rang, il vient :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$$

Il suffit maintenant de vérifier :

- si α est valeur propre de f, alors $\operatorname{Im} u = E_\alpha$,
- si β est valeur propre de f, alors $\operatorname{Im} v = E_\beta$,
- si 0 est valeur propre de f, alors $\operatorname{Ker} f = E_0$.

Quitte à supprimer éventuellement les sous–espaces réduits à $\{0\}$, on conclut que f est diagonalisable.

Exercice 2.12.

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On rappelle que, si u est un endomorphisme de E, un polynôme annulateur de u est un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme de E ayant un polynôme annulateur de degré 1 ?

Est-il possible qu'un endomorphisme de E ait un polynôme annulateur constant ?

2. Donner (par sa matrice canonique) un exemple d'endomorphisme h de E ayant $X(X-3)$ comme polynôme annulateur et n'ayant pas de polynôme annulateur de degré 1.

Que peut-on dire de $\frac{1}{3}h$?

3. Construire à partir de l'endomorphisme h proposé précédemment un endomorphisme g de E ayant $(X-1)(X-2)$ comme polynôme annulateur et n'ayant pas de polynôme annulateur de degré 1.
Préciser la matrice canonique de l'endomorphisme g. Que peut-on dire de $g - id_E$?

4. On considère un endomorphisme f de E ayant $X^3 - 1$ comme polynôme annulateur et n'ayant pas de polynôme annulateur de degré strictement inférieur à 3.
Montrer que 1 est nécessairement valeur propre de f et montrer que
$$1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f - id_E) \leqslant 2.$$
Montrer que $X(X-3)$ est un polynôme annulateur de $\phi = f^2 + f + id_E$.
Montrer que ϕ ne possède pas de polynôme annulateur de degré 1. Conclusion ?
Montrer que $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Ker}(f - id_E)$. En déduire que $\frac{1}{3}\phi$ projette sur $\operatorname{Ker}(f - id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - id_E)$.
Donner (par sa matrice canonique) l'exemple d'un tel endomorphisme f. *On pourra calculer $A^2 + A + I_2$, A étant la matrice* $\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}$.

5. Donner (par sa matrice canonique) un exemple d'endomorphisme non nul ψ de E ayant $X^2 + X + 1$ comme polynôme annulateur.
Pourquoi ψ ne peut-il pas avoir de polynôme annulateur de degré 1 ?

Solution :

1. Si $aX + b$ est annulateur de f, on a $af + bI = 0$, et comme $a \neq 0$, f est une homothétie. Réciproquement si $f = \lambda I$, f admet le polynôme λX comme polynôme annulateur.
Si $P = c$, avec $c \in \mathbb{R}^*$, alors $P(f) = cI \neq 0$.

2. On peut par exemple considérer l'endomorphisme h de E de matrice associée dans la base canonique :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
On vérifie aisément que $X(X-3)$ est annulateur de h, et que h n'étant pas une homothétie, n'admet pas de polynôme annulateur de degré 1.

L'endomorphisme $u = \frac{1}{3}h$ est annulé par $X(X-1)$. Donc $u^2 = u$ et u est un projecteur.

3. Il suffit de considérer $g = I + \frac{1}{3}\,h$, de matrice associée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De la même façon, $g - I$ est un projecteur de E.

4. On sait que $0 = f^3 - I = (f - I) \circ (f^2 + f + I)$. Si 1 n'est pas valeur propre de f, l'endomorphisme $f - I$ est inversible et $f^2 + f + I = 0$; ce résultat est en contradiction avec le fait que f n'admet pas de polynôme annulateur de degré strictement inférieur à 3.

Comme 1 est valeur propre de f, on sait que $\dim \operatorname{Ker}(f - I) \geqslant 1$.
Si $\dim \operatorname{Ker}(f - I) > 2$, on peut avoir :

- $\dim \operatorname{Ker}(f - I) = 4$. Dans ce cas, $f = I$ et $X - 1$ est annulateur de f.
- $\dim \operatorname{Ker}(f - I) = 3$. Dans ce cas, $f - I$ est de rang 1.

Si $\operatorname{Im}(f - I) \subset \operatorname{Ker}(f - I)$, on a $(f - I)^2 = 0$ et $(X - 1)^2$ est annulateur de f.
Donc, comme $\operatorname{Im}(f - I)$ est une droite, on a $\operatorname{Im}(f - I) \cap \operatorname{Ker}(f - I) = \{0\}$, et le théorème du rang entraîne que $E = \operatorname{Ker}(f - I) \oplus \operatorname{Im}(f - I)$.
Soit u une base de $\operatorname{Im}(f - I)$. Il existe alors λ réel tel que $(f - I)u = \lambda u$, *i.e.* $f(u) = (\lambda + 1)u$.
Le polynôme $(X - 1)(X - \lambda - 1)$ est alors annulateur de f. Contradiction !

Calculons :

$$\begin{aligned} \phi \circ (\phi - 3I) &= (f^2 + f + I) \circ (f^2 + f - 2I) \\ &= (f^2 + f + I) \circ (f - I) \circ (f + 2I) \\ &= (f^3 - I) \circ (f + 2I) = 0 \end{aligned}$$

Donc, $X(X-3)$ est un polynôme annulateur de ϕ. Si ϕ admettait un polynôme annulateur de degré 1, alors f possèderait un polynôme annulateur de degré 2, ce qui est exclu.
On a $\phi \circ \phi = 3\phi$, donc $\left(\frac{1}{3}\,\phi\right) \circ \left(\frac{1}{3}\,\phi\right) = \frac{1}{3}\,\phi$ et $\frac{1}{3}(f^2 + f + I)$ est un projecteur.

On sait que $\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{Ker}(f - I)$. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f - I)$ (ainsi $f(x) = x$). Alors $f^2(x) = x$ et $\phi(x) = 3x$. Donc $x = \frac{1}{3}\,\phi(x) \in \operatorname{Im} \phi$.
En conclusion $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Ker}(f - I)$.

On sait que $\operatorname{Im}(f - I) \subset \operatorname{Ker} \phi$. L'égalité précédente et le théorème du rang permettent de conclure que $\operatorname{Im}(f - I) = \operatorname{Ker} \phi$.
Ainsi $\frac{1}{3}\,\phi$ est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - I)$.

Comme $A^2 + A + I = 0$, on peut prendre :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Au vu de la question précédente, on peut prendre :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme ψ associé à cette matrice ne peut avoir un polynôme annulateur de degré 1, car $\psi^2+\psi+I=0$ entraîne que les valeurs propres de ψ sont complexes et non réelles.

Exercice 2.13.

Soit n un entier naturel, tel que $n \geqslant 2$.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$, il existe un unique polynôme $L_j \in E$ tel que

$$L_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, 0 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Montrer que l'on a :

$$L_j(X) = \frac{(-1)^{n-j}}{n!} \mathrm{C}_n^j \prod_{k=0, k\neq j}^{n} (X-k)$$

2. Montrer que $\mathcal{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de E.

3. Calculer

 a) $L_0 + L_1 + \cdots + L_n$.

 b) $L_1 + 2L_2 + \cdots + nL_n$.

4. On définit, pour $(P,Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

 a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E. On notera $||.||$ la norme associée à ce produit scalaire.

 b) Que peut-on dire de $\mathcal{B}$ pour ce produit scalaire ?

5. On pose $H = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer un réel λ_k tel que $X^n + \lambda_k L_k \in H$.

6. Soit $P \in H$. Montrer que les coordonnées de P sur la base $\mathcal{B}$ sont

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \sum_{j=0}^{n} P(j) j^n, \quad k \in [\![0, n]\!]$$

7. Soit π la projection orthogonale sur H. On pose

$$d(X^n, H) = ||X^n - \pi(X^n)||$$

a) Montrer que $||X^n - \pi(X^n)|| = n!\times||L_0 - \pi(L_0)||$.

b) Soit $Q = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} L_i$. Montrer que $Q \in H^{\perp}$.

c) En déduire que $d(X^n, H) = n! \frac{|\langle L_0, Q\rangle|}{||Q||}$.

d) Montrer que $d(X^n, H) = \frac{n!}{\sqrt{\mathrm{C}_{2n}^{n}}}$.

Solution :

1. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, posons :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{X-k}{j-k} = \frac{(-1)^{n-j}\binom{n}{j}}{n!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (X-k)$$

On montre immédiatement que ce polynôme vérifie :

pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, $L_j(\ell) = \delta_{j,\ell}$.

Supposons qu'il existe un polynôme $Q_j \in E$ tel que pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, $L_j(\ell) = Q_j(\ell) = \delta_{j,\ell}$. Le polynôme $L_j - Q_j \in E$ admet $(n+1)$ racines (les entiers de 0 à n, j compris) : c'est le polynôme nul et $Q_j = L_j$.

2. Le cardinal de la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est égal à $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Montrons qu'elle est libre ; si $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$, alors, pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(\ell) = \alpha_\ell$$

Ainsi, tout polynôme P de E s'écrit dans cette base sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k(X)$$

3. a) D'après la remarque précédente, $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) = 1$, entraîne que $P = 1$.

b) De même $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) = k$ entraîne que $P(X) = X$.

4. a) On vérifie que l'application $\Phi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive. Seule la dernière propriété n'est pas immédiate :

on a $\Phi(P, P) = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geqslant 0$;

et si $\Phi(P,P)=0$, alors pour tout $k\in[\![0,n]\!], P(k)=0$, et $P=0$.

b) La famille $\mathcal{B}=(L_0,\dots,L_n)$ est une base orthonormée de $(E,\langle\ ,\ \rangle)$, car pour tout $\ell\in[\![0,n]\!]$, $L_j(\ell)=\delta_{j,\ell}$, donc :

$$\langle L_i,L_j\rangle=\sum_{k=0}^{n}L_i(k)L_j(k)=\sum_{k=0}^{n}\delta_{i,k}\delta_{j,k}=\delta_{i,j}.$$

5. L_k est un polynôme de degré n ; on a $X^n+\lambda_kL_k\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si et seulement si le coefficient de X^n de ce dernier polynôme est nul ; donc si et seulement si :

$$\lambda_k=\frac{(-1)^{n-k+1}n!}{\binom{n}{k}}$$

6. Si $P\in H^\perp$, alors pour tout $k\in[\![0,n]\!], \langle P,X^n+\lambda_kL_k\rangle=0$, ou :

$$\langle P,X^n\rangle=-\lambda_k\langle P,L_k\rangle$$

Or on sait que dans la base orthonormée $(L_0,\dots,L_n)$, P s'écrit : $P=\sum\limits_{k=0}^{n}\langle P,L_k\rangle L_k$.

Donc :

$$\langle P,L_k\rangle=-\frac{1}{\lambda_k}\langle P,X^n\rangle=\frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{n!}\sum_{j=0}^{n}P(j)j^n=\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\sum_{j=0}^{n}P(j)j^n$$

7. a) On sait que $X^n+(-1)^{n+1}L_0\in H$; donc :

$$\pi(X^n+(-1)^{n+1}L_0)=X^n+(-1)^{n+1}L_0$$

et

$$\pi(X^n)-X^n=(-1)^nn!\big(\pi(L_0)-L_0\big)\text{ donne }d(X^n,H)=n!d(L_0,H)$$

b) Le polynôme Q est colinéaire au polynôme P de la question 6. Donc $Q\in H^\perp$.

c) On a donc $d(L_0,H)=|\langle L_0,Q\rangle|$, d'où :

$$d(X^n,H)=n!\frac{|\langle L_0,Q\rangle|}{||Q||}.$$

d) Or $\langle L_0,Q\rangle=\dfrac{1}{n!}$ et $||Q||^2=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{(n!)^2}\dbinom{n}{i}^2=\dfrac{1}{(n!)^2}\dbinom{2n}{n}$.

Finalement :

$$d(X^n,H)=\frac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}.$$

Exercice 2.14.

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle .,.\rangle$. On note $||.||$ la norme associée.

Soit u un vecteur unitaire $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On note D la droite vectorielle engendrée par u.
Soit a un réel non nul et f_a l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. a) Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$||f_{a_0}(x)|| = ||x||$$

b) Calculer $f_{a_0} \circ f_{a_0}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f_{a_0} + Id) \oplus \mathrm{Ker}(f_{a_0} - Id) = \mathbb{R}^3$.

3. On revient au cas général où a est quelconque.

a) Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les éléments propres de f_a.

4. On suppose dans cette question que $a \neq -1$. On note M_a la matrice associée à f_a dans la base $\mathcal{B}$ et on définit une fonction h_a sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$h_a(x, y, z) = {}^tXM_aX, \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que h_a possède un unique point critique que l'on déterminera.

b) Déterminer les extremums de h_a.

Solution :

1. On vérifie de manière immédiate la linéarité de f_a, ainsi que le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^3, f_a(x) \in \mathbb{R}^3$.

2. a) Comme u est un vecteur unitaire :

$$||f_a(x)||^2 = ||x||^2 + 2a\langle x, u\rangle^2 + a^2\langle x, u\rangle^2.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$||f_a(x)||^2 = ||x||^2 \iff (2a + a^2)\langle x, u\rangle^2 = 0$$

et ceci est vrai pour tout x si et seulement si $a = -2$.

b) On sait que comme $||u|| = 1$, $\langle x, u\rangle u$ est la projection orthogonale $p(x)$ de x sur la droite vectorielle de base u. Donc $f_a = I + ap$.
Ici $f_{-2} = I - 2p$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$. Donc $f_{-2}^2 = I$.

Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ s'écrit : $x = \frac{1}{2}\big(x + f_{-2}(x)\big) + \frac{1}{2}\big(x - f_{-2}(x)\big)$.

Comme $(f_{-2}-I)\circ(f_{-2}+I)=0$, on a : $x+f_{-2}(x)\in \mathrm{Ker}(f_{-2}-I)$ et $x-f_{-2}(x)\in \mathrm{Ker}(f_{-2}+I)$; enfin $\mathrm{Ker}(f_{-2}-I)\cap \mathrm{Ker}(f_{-2}+I)=\{0\}$, parce que $[f_{-2}(x)=x \text{ et } f_{-2}(x)=-x] \implies x=0$.

3. a) p étant un projecteur orthogonal, sa matrice dans une base orthonormée adéquate est diagonale, donc symétrique et $f_a=I+ap$ est un endomorphisme symétrique.

b) Il suffit d'écrire :

$$f_a(x)=\lambda x \iff ap(x)=(\lambda-1)x \iff p(x)=\frac{\lambda-1}{a}x$$

Les valeurs propres d'un projecteur étant 0 et 1, les valeurs propres de f_a sont $a+1$ (le sous–espace propre associé étant $\mathrm{Im}\, p=\mathrm{Vect}(u)$) et 1 (le sous–espace propre associé étant $\mathrm{Ker}\, p=u^\perp$).

4. Il existe une matrice orthogonale P orthogonale, telle que $M_a={}^tPD_aP$ avec $D_a=\mathrm{diag}(a+1,1,1)$. Par suite

$$h_a(x,y,z)={}^t(PX)D_aPX$$

En notant $PX=X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, il vient : $h_a(x,y,z)=(a+1)x'^2+y'^2+z'^2$.

- si $a+1>0$, $h_a(x,y,z)\geqslant 0$ et $h_a(x,y,z)=0$ si et seulement si $x'=y'=z'=0$ c'est-à-dire si et seulement si $x=y=z=0$, puisque $X=P^{-1}X'$. Donc h_a admet un minimum global en $(0,0,0)$. Il est clair que h_a n'est par contre pas majorée.
- si $a+1<0$, h_a n'est ni minorée (prendre $x'_n=n$ et $y'_n=z'_n=0$), ni majorée (prendre $x'_n=0$ et $y'_n=z'_n=n$).

Exercice 2.15.

Soit $\big(E,\langle .,.\rangle\big)$ un espace euclidien, u un vecteur de E, α un réel et f défini par :

$$(\forall x\in E)\qquad f(x)=x+\alpha\,\langle x,u\rangle\,u$$

On note $||.||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique de $\big(E,\langle .,.\rangle\big)$.

2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f et étudier sa diagonalisabilité.
Retrouver ainsi le résultat de la question 1.

3. Déterminer (en fonction de α et u) dans quels cas f est une isométrie de E, c'est-à-dire vérifie :

$$(\forall x\in E)\qquad ||f(x)||=||x||$$

La reconnaître.

4. a) Dans le cas général, exprimer f à l'aide d'un projecteur et en déduire un polynôme annulateur P de f.

b) Étudier l'inversibilité de f et, lorsqu'il existe, exprimer son inverse à l'aide de f et de l'endomorphisme Id.

Solution :

On observe d'abord que si $\alpha = 0$ ou $u = 0$, on a $f = Id$. Les réponses aux questions posées sont alors banales et on exclut ces deux cas dans la suite.

1. L'application f est linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire. Pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \alpha \langle x, u\rangle \langle y, u\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

car l'expression est symétrique en x et y, donc f est un endomorphisme symétrique de E.

2. On a : $f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \alpha \langle x, u\rangle u = (\lambda - 1)\, x$.

D'où deux cas :

- si $x \notin \mathrm{Vect}(u)$, alors $\langle x, u\rangle = \lambda - 1 = 0$, soit $\lambda = 1$ et $x \in u^\perp$;
- pour $x = u$, il vient $f(u) = \left(1 + \alpha\, ||u||^2\right) u$, donc u est vecteur propre associé à $\lambda = 1 + \alpha\, ||u||^2$.

Finalement $\mathrm{Spec}(f) = \left\{1, \lambda = 1 + \alpha\, ||u||^2\right\}$

avec $\mathrm{Ker}(f - Id) = u^\perp$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, Id) = Vect(u)$.

L'endomorphisme f est diagonalisable comme endomorphisme symétrique réel ; on le retrouve directement puisqu'on a $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus u^\perp$, donc E est somme directe des sous-espaces propres de f.

La matrice de f dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus u^\perp$ est diagonale, soit $\mathrm{diag}\left(1, \ldots, 1, 1 + \alpha\, ||u||^2\right)$, donc symétrique, ce qui prouve que f est un endomorphisme symétrique réel.

3. On a : $||f(u)|| = ||u|| \Longleftrightarrow 1 + \alpha\, ||u||^2 = \pm 1$

Comme $\alpha \neq 0$, il vient : $\alpha = -\dfrac{2}{||u||^2}$.

On a alors $f\,|_{\mathrm{Vect}(u)} = -Id$ et $f\,|_{u^\perp} = Id$, donc f est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$.

4. a) Notons p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)$ et $q = Id - p$ le projecteur associé. On a :

$$f = \left(1 + \alpha\, ||u||^2\right) p + q = (\lambda - 1)\, p + Id$$

soit : $p = \dfrac{1}{\lambda - 1}(f - Id)$ (le cas $\lambda = 1$a été exclu au début). Alors :

$$\begin{aligned} p \circ p = p \implies & \frac{1}{(\lambda - 1)^2}\left(f^2 - 2f + Id\right) = \frac{1}{\lambda - 1}\,(f - Id) \\ \implies & f^2 - (\lambda + 1)\, f + \lambda\, Id = 0 \\ \implies & f^2 - \left(2 + \alpha\, ||u||^2\right) f + \left(1 + \alpha\, ||u||^2\right) Id = 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$P(X) = X^2 - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) X + \left(1 + \alpha\,||u||^2\right)$$

est un polynôme annulateur de f.

b) On a f inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ c'est-à-dire si et seulement si $1 + \alpha\,||u||^2 \neq 0$.

Dans ce cas, $f \circ \left[f - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) Id\right] = -\left(1 + \alpha\,||u||^2\right) Id$ donne :

$$f \circ \left[\frac{f - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) Id}{-\left(1 + \alpha\,||u||^2\right)}\right] = Id \text{ et } f^{-1} = -\frac{f - \left(2 + \alpha\,||u||^2\right) Id}{1 + \alpha\,||u||^2}.$$

Exercice 2.16.

1. Déterminer les applications dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

2. a) Vérifier que $\mathcal{E}$ est stable par produit et passage à l'inverse, c'est-à-dire :
   - pour toutes matrices M et M' de $\mathcal{E}$, $MM' \in \mathcal{E}$;
   - toute matrice M de $\mathcal{E}$ est inversible et son inverse appartient à $\mathcal{E}$.

   b) Deux matrices quelconques de $\mathcal{E}$ commutent-elles ?

On dira que la matrice $M(a(t), b(t), c(t))$ est dérivable en t_0 si les trois fonctions a, b, c sont dérivables en t_0.

3. a) Déterminer les applications φ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ par

$$\varphi : t \mapsto M\left[a(t), b(t), c(t)\right]$$

dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ (\forall t' \in \mathbb{R}) \qquad \varphi(t + t') = \varphi(t) \times \varphi(t')$$

   b) Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est stable par produit et passage à l'inverse.

   c) Deux matrices quelconques de $\mathrm{Im}\,\varphi$ commutent-elles ?

Solution :

1. En prenant $y = 0$, on remarque que $f(0) = 0$. Puis, pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, en dérivant par rapport à x on a $f'(x + y) = f'(x)$; d'où, pour $x = 0$, $f'(y) = f'(0)$ et f' est constante, donc f est linéaire, c'est–à–dire de la forme $x \mapsto ax$. La réciproque est immédiate.

2. a) On vérifie que

$$M(a,b,c) \times M(a',b',c') = M(a + a', b + b' + ac', c + c') \in \mathcal{E}$$

De plus, toute matrice de $\mathcal{E}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc est inversible et $I = M(0,0,0) \in \mathcal{E}$.
La formule ci-dessus du produit donne, en résolvant le système

$$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' + ac' = 0 \\ c + c' = 0 \end{cases}$$

$$\big[M(a,b,c)\big]^{-1} = M(-a, ac - b, -c) \in \mathcal{E}$$

b) La formule du produit montre encore que :

$$MM' = M'M \iff ac' = ca'$$

donc $(\mathcal{E}, \times)$ est non commutatif.

3. a) D'après la première question, il vient :

$$\varphi(t+t') = \varphi(t) \times \varphi(t') \iff \begin{cases} a(t+t') = a(t) + a(t') \\ b(t+t') = b(t) + b(t') + a(t)\,c(t') \\ c(t+t') = c(t) + c(t') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\exists \alpha)\ (\forall t)\ a(t) = \alpha\, t \\ (\exists \gamma)\ (\forall t)\ c(t) = \gamma\, t \\ b(t+t') = b(t) + b(t') + \alpha\,\gamma\, tt' \end{cases}.$$

Pour $t = t' = 0$, on a nécessairement $b(0) = 0$;
en dérivant par rapport à t, il vient $b'(t+t') = b'(t) + \alpha\gamma\, t'$, puis $t = 0$ donne $b'(t') = b'(0) + \alpha\gamma\, t'$ soit, en notant $\beta = b'(0)$, $b(t) = \alpha\gamma\,\dfrac{t^2}{2} + \beta\, t$.
On montre enfin que cette condition est suffisante en vérifiant dans l'équation $b(t+t') = b(t) + b(t') + \alpha\,\gamma\, tt'$.
Conclusion :

$$\big(\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\big)(\forall t \in \mathbb{R}) \quad a(t) = \alpha\, t; \quad b(t) = \frac{\alpha\,\gamma}{2}\, t^2 + \beta\, t; \quad c(t) = \gamma\, t$$

b) Alors

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ M\left(\alpha\, t, \frac{\alpha\gamma}{2}\, t^2 + \beta\, t, \gamma\, t\right),\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble $\mathrm{Im}\,\varphi$ est stable par produit par construction et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(-t) \times \varphi(t) = \varphi(0) = M(0,0,0) = I_3 \implies \big[\varphi(t)\big]^{-1} = \varphi(-t) \in \mathcal{E}$$

En conclusion $\mathrm{Im}\,\varphi$ stable par produit et passage à l'inverse.

c) On a immédiatement

$$\varphi(t) \times \varphi(t') = \varphi(t+t') = \varphi(t'+t) = \varphi(t') \times \varphi(t)$$

donc $(\mathrm{Im}\,\varphi, \times)$ est commutatif.

Exercice 2.17.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$ et φ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, dont les valeurs propres réelles sont toutes strictement positives.

On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que, pour tout vecteur non nul $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle \varphi(h), h\rangle > 0$$

2. Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle \varphi(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$$

a) Justifier que f admet des dérivées partielles du premier et du second ordre en tout point de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.

b) Montrer que f admet un unique point critique z (c'est-à-dire un point où toutes les dérivées partielles premières sont nulles), que l'on précisera.

c) Étudier les extremums de f.

d) Retrouver le résultat précédent en examinant $f(z+h) - f(z)$.

Solution :

1. L'endomorphisme symétrique réel φ est diagonalisable en base orthonormée ; dans une telle base de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, on a :

$$h = \sum_{j=1}^{n} h'_j \varepsilon_j \ (\neq 0) \implies \langle \varphi(h), h\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h'_i h'_j \langle \varphi(\varepsilon_i), \varepsilon_j\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h'_i h'_j \lambda_i \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (h'_i)^2 \lambda_i > 0$$

soit, pour tout $h \neq 0$ $\langle \varphi(h), h\rangle > 0$.

2. a) Puisque φ a pour matrice $A = (a_{i,j})$ dans la base canonique, $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = f\big(x_1, \dots, x_n\big) = \frac{1}{2}{}^t(AX)X - {}^tUX = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i x_j - \sum_{j=1}^{n} u_j x_j$$

expression polynomiale en les x_j, donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

Les dérivées partielles premières sont alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_0}}(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{i,i_0}x_i - u_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j - u_{i_0}.$$

car A est symétrique en tant que matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormée. Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - u_i$$

En dérivant l'expression ci-dessus, il vient (d'après le théorème de Schwarz),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = a_{i,j}$$

b) Le point $z \in \mathbb{R}^n$ est critique si et seulement si toutes les dérivées partielles au point z sont nulles, ce qui équivaut à :

$$(\forall i \in [\![1,n]\!]) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, z_j - u_i = 0, \ i.e.\ AZ = U$$

Comme 0 n'est pas valeur propre de A par hypothèse, A (donc φ) est inversible et f admet un unique point critique $z = \varphi^{-1}(u)$.

c) La fonction f étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, un extremum ne peut être réalisé qu'en un point critique, donc en $z = \varphi^{-1}(u)$. La matrice des dérivées partielles secondes en z est A, donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} h_i h_j = {}^t(AH)H = \langle \varphi(h), h\rangle > 0 \quad \text{si} \quad h \neq 0$$

ce qui montre que f présente un minimum global en $z = \varphi^{-1}(u)$ égal à $-\frac{1}{2}\langle u, z\rangle$.

d) Sachant que $z = \varphi^{-1}(u)$ est le seul extremum possible, on calcule (par bilinéarité) :

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{1}{2}\langle \varphi(z+h), z+h\rangle - \langle u, z+h\rangle - \frac{1}{2}\langle \varphi(z), z\rangle + \langle u, z\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \varphi(h), z\rangle + \frac{1}{2}\langle h, \varphi(z)\rangle + \langle \varphi(h), h\rangle - \langle u, h\rangle \\ &= \langle \varphi(z), h\rangle - \langle u, h\rangle + \langle \varphi(h), h\rangle = \langle \varphi(h), h\rangle \end{aligned}$$

car φ est symétrique et $\varphi(z) = u$, donc f présente un minimum global en z d'après la première question.

Exercice 2.18.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ où $n \geqslant 2$, muni du produit scalaire canonique que l'on notera

$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle.$$

Dans tout l'exercice f est une **application** de E dans E antisymétrique (on dit que f est antisymétrique si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2, \langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x), y\rangle$.)

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. Que peut-on dire de la matrice de f dans la base canonique de E ?

2. Soit $\mathcal{A} = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \text{ est antisymétrique }\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

3. a) Montrer que f^2 est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que si λ est une valeur propre *réelle* de f, alors $\lambda = 0$.

4. On suppose que l'endomorphisme f est inversible. Soit e un vecteur propre de f^2. Montrer que $F = \text{Vect}\,(e, f(e))$ (sous-espace vectoriel engendré par e et $f(e)$) est de dimension 2 et qu'il est stable par f.

En déduire que $F^{\perp}$, l'orthogonal de F, est stable par f, et que la dimension de E est paire.

5. Dans le cas général, montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires orthogonaux et que le rang de f est pair.

Solution :

1. Il faut démontrer que f est une application **linéaire**. Soit $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle f(x+\lambda y), z\rangle &= -\langle x+\lambda y, f(z)\rangle = -\langle x, f(z)\rangle - \lambda\langle y, f(z)\rangle \\ &= \langle f(x), z\rangle + \lambda\langle f(y), z\rangle\end{aligned}$$

Donc, pour tout $z \in E$:

$$\langle f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y), z\rangle = 0$$

et, seul le vecteur nul étant orthogonal à E :

$$\forall\, x, y \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

La matrice $A = (a_{i,j})$ associée à f dans la base canonique orthonormée de E est antisymétrique, puisque pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j)\rangle = -\langle e_j, f(e_i)\rangle$ entraîne que $a_{i,i} = 0$ et que $a_{i,j} = -a_{j,i}$, pour $i \neq j$.

Réciproquement, toute matrice antisymétrique (${}^tA = -A$) détermine un endomorphisme antisymétrique de E.

2. Il est évident que $\mathcal{A}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Par la question précédente, sa dimension est égale à la dimension de l'espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ce sous-espace est engendré par les $\dfrac{n(n-1)}{2}$ matrices $E_{i,j} - E_{j,i}$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

[$E_{i,j}$ est la matrice dont tous les termes sont nuls, à l'exception de celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1]

3. a) Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\langle f^2(x), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^2(y)\rangle$$

Ce qui montre que f^2 est un endomorphisme symétrique.

b) Soit λ une valeur propre réelle de f. Il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors :

$$0 = \langle f(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle, \text{ d'où } \lambda = 0$$

La seule valeur propre réelle de f possible est donc 0.

4. Remarquons déjà que puisque f^2 est symétrique, on peut bien trouver un vecteur e propre pour f^2.

$\star$ Supposons $\big(e, f(e)\big)$ lié. Comme $e \neq 0$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e) = \lambda e$. Or, la seule valeur propre réelle possible de f est 0 ; donc $f(e) = 0$, ce qui est une contradiction à l'inversibilité de f.

$\star$ Le sous-espace $F = \text{Vect}\big(e, f(e)\big)$ est stable par f, puisque par choix de e on a $f(e) \in F$ et $f\big(f(e)\big) \in F$.

$\star$ Soit $z \in \text{Vect}\big(e, f(e)\big)^{\perp}$. On a $\langle z, e\rangle = \langle z, f(e)\rangle = 0$. Donc

$$\langle f(z), e\rangle = -\langle z, f(e)\rangle = 0 \text{ et } \langle f(z), f(e)\rangle = -\langle z, f^2(e)\rangle = 0$$

ce qui montre que $F^{\perp}$ est stable par f.

On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$, avec $\dim F = 2$. L'application f restreinte à $F^{\perp}$ est un endomorphisme de $F^{\perp}$ qui est toujours antisymétrique. On la note $\widetilde{f}$.

On peut recommencer le même raisonnement : on choisit un vecteur propre e_2 de $\widetilde{f}^2$; le sous–espace $\text{Vect}\big(e_2, f(e_2)\big)$ est de dimension 2 et $\text{Vect}\big(e, f(e), e_2, f(e_2)\big)$ est de dimension 4. Son orthogonal est stable par f. Si $\dim E = 2n+1$, on peut ainsi écrire :

$$E = \text{Vect}\big(e, e_2, \ldots, e_n, f(e), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big) \oplus^{\perp} H, \quad \dim H = 1$$

ce qui est impossible car $f_{|H}$ est un endomorphisme antisymétrique, bijectif qui admet une valeur propre réelle (car $\dim H = 1$).

5. Montrons que $\text{Ker} f \subset (\text{Im} f)^{\perp}$. En effet, si $x \in \text{Ker} f$ et $f(z) \in \text{Im} f$, alors

$$\langle x, f(z)\rangle = -\langle f(x), z\rangle = \langle 0, z\rangle = 0$$

Le théorème du rang et le fait que pour tout sous–espace vectoriel H de E, on a $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E$, impliquent que $\text{Ker} f = (\text{Im} f)^{\perp}$. Cela montre que $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux.

Posons $g = f_{|\,\text{Im} f}$. Alors g est un endomorphisme bijectif de $\text{Im} f$ qui est antisymétrique. Donc $\dim \text{Im} f$ est paire, par la question précédente.

Exercice 2.19.

On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ et B la «sous-matrice» $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ de A.

1. Montrer que la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'elle est de rang 3.

2. Soit λ une valeur propre de B et soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une colonne propre réelle de B associée à λ.

a) Montrer que $\lambda \neq 0$ et que la colonne $U = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\lambda} \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est colonne propre de A associée à λ.

b) On pose $m = \max\big(|x|, |y|, |z|\big)$. Pour quelle raison peut-on affirmer que $m > 0$?

Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$. *On montrera que* $|\lambda x| \leqslant m$, $|\lambda y| \leqslant m$ *et* $|\lambda z| \leqslant m$.

Montrer que $|\lambda| < 1$. *On montrera que, si* $|\lambda| = 1$, *alors* $|x| < m$, $|y| < m$ *et* $|z| < m$.

3. Montrer que 0 est valeur propre de A et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

4. Déduire des résultats précédents que la matrice $I_4 - A$ est inversible.

Solution :

1. La matrice B est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Par la méthode du pivot de Gauss, on obtient que $4B$ est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B est donc de rang 3 et inversible.

2. a) La matrice B étant inversible, si λ est une valeur propre de B, alors $\lambda \neq 0$.
Un calcul matriciel élémentaire montre que si $BV = \lambda V$, alors $AU = \lambda U$. Il reste à observer que puisque $V \neq 0$, on a $U \neq 0$. Donc λ est valeur propre de A et U est un vecteur propre associé.

b) Le vecteur V n'étant pas le vecteur nul, on a $m > 0$.
Comme $\lambda x = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$, il vient $|\lambda x| \leqslant \dfrac{|x|}{2} + \dfrac{|y|}{4} \leqslant \dfrac{3m}{4}$, donc $|\lambda x| \leqslant m$,
Comme $\lambda y = \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4}$, il vient $|\lambda y| \leqslant \dfrac{|x|}{4} + \dfrac{|y|}{2} + \dfrac{|z|}{4}$, donc $|\lambda y| \leqslant m$,
Comme $\lambda z = \frac{y}{4} + \dfrac{3z}{4}$, il vient $|\lambda z| \leqslant \dfrac{|y|}{4} + \dfrac{3|z|}{4}$, donc $|\lambda z| \leqslant m$.
De ces trois relations découle $|\lambda| m \leqslant m$, d'où $|\lambda| \leqslant 1$, puisque $m \neq 0$.

Supposons $|\lambda| = 1$. On a alors $|x| = |\lambda x| \leqslant \dfrac{3m}{4}$.
Reportons cette inégalité dans $|y| \leqslant \dfrac{|x|}{4} + \dfrac{|y|}{2} + \dfrac{|z|}{4}$; il vient $|y| \leqslant \dfrac{15m}{16}$.

Reportons cette inégalité dans $|z| \leqslant \dfrac{|y|}{4} + \dfrac{3|z|}{4}$, il vient $|z| \leqslant \dfrac{63m}{64}$.

Ainsi $m \leqslant \max\left(\dfrac{3m}{4}, \dfrac{15m}{16}, \dfrac{63m}{64}\right) = \dfrac{63m}{64}$, ce qui est une absurdité.

Donc $|\lambda| < 1$.

3. La première colonne de A étant nulle, 0 est valeur propre de A associée au vecteur propre $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notons (V_2, V_3, V_4) une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B, et pour $k \in \{2, 3, 4\}$, notons U_k la colonne propre de A déduite de V_k comme dans la question 2.

Comme 0 n'est pas valeur propre de B, la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. La matrice A est donc diagonalisable.

4. Comme 1 n'est pas valeur propre de A, la matrice $I - A$ est inversible.

Exercice 2.20.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geq 1$.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in E$ avec $a \neq 0$ tel que $A(p, a) = \{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{p-1}(a)\}$ soit une partie génératrice de E de cardinal p stable par f.
(Notons que l'on a alors, en particulier, $f(A(p, a)) \subset A(p, a)$ et les $f^k(a)$ sont deux à deux distincts pour $k \in [\![0, p-1]\!]$).
$A(p, a)$ s'appelle un cycle de f.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et $A(p, a)$ un cycle de f. Montrer que $p \geq n$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique bijectif et $A(p, a)$ un cycle de f.

a) Montrer que le plus grand entier m tel que $\{a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a)\}$ soit libre est n.
En déduire que $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.

b) Montrer que $f^p = Id_E$. En déduire que les valeurs propres sont des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de matrice B dans la base canonique est cyclique. Donner un cycle associé.

Trouver les valeurs et les vecteurs propres de f pour $n = 4$.

Solution :

1. La famille $A(p, a)$ est génératrice et de cardinal p. Donc $p \geqslant n$.

2. a) On sait que $f^m(a)$ est combinaison linéaire de $\big(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big)$.

Soit $k \geqslant m$, supposons que $f^k(a) \in \operatorname{Vect}\big(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big)$.

Alors $f^{k+1}(a) \in \operatorname{Vect}\big(f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a), f^m(a)\big)$. Il suffit d'écrire $f^m(a)$ en fonction de $a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)$, pour obtenir que $\big(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big)$ engendre $A(p, a)$ qui lui–même engendre E. C'est donc une famille libre et génératrice de E. Ainsi $m = n$.

b) Comme $f^p(a) \in A(p, a)$, il existe q vérifiant $0 \leqslant q < p$ tel que $f^p(a) = f^q(a)$. Comme f est bijective $f^{p-q}(a) = a$. La seule possibilité pour que les éléments de $A(p, a)$ soient distincts est $q = 0$ et donc $f^p(a) = a$.

Donc, pour tout $k \geqslant 1, f^p\big(f^k(a)\big) = f^k(a)$. Ce résultat appliqué à la base $\mathcal{B}$ montre que $f^p = Id$.

Le polynôme $X^p - 1$ est annulateur de f ; les valeurs propres de f sont donc parmi les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité.

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si l'on prend $a = e_1$, il vient pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], f^k(a) = e_{k+1}$, $f^n(a) = \sum_{k=1}^{n} e_k$ et $f^{n+1}(a) = e_1$.

On a donc un cycle et $p = n + 1$.

On sait que dans le cas où $n = 4$, les valeurs propres sont parmi les racines cinquièmes de l'unité. Si λ est une valeur propre, le vecteur propre associé est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\lambda}{\lambda} \\ \dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda^2} \\ \dfrac{1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3}{\lambda^3} \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

On vérifie enfin que $\lambda = 1$ n'est pas valeur propre.

3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x un réel. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^k$ en fonction de n et x.

2. Un boulanger possède un ensemble de pochettes surprise. Lorsqu'on en achète une on peut :
- soit gagner une montre avec une probabilité de m,
- soit gagner un euro avec une probabilité de e,
- soit ne rien gagner.

Un client achète n pochettes. On désigne par M la variable aléatoire égale au nombre de montres gagnées et E la variable aléatoire égale au nombre d'euros gagnés.

a) Déterminer la loi de M.

b) Déterminer la loi conjointe du couple (M, E).

3. On suppose que k pochettes ont rapporté quelque chose.
Soit T_k la variable aléatoire égale à la proportion de pochettes ayant rapporté une montre par rapport au nombre de pochettes ayant rapporté quelque chose.
Déterminer la loi de T_k.
Calculer l'espérance $E(T_k)$ en fonction de m et e.

Solution :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k = \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = n\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k = nx\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}$,

soit :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n-1}{h}x^h = nx(1+x)^{n-1}$$

2. a) Clairement $M \hookrightarrow \mathcal{B}(n,m)$ [et $E \hookrightarrow \mathcal{B}(n,e)$].

b) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

$\star$ Si $i+j>n$, il est clair que $P[(M=i)\cap(E=j)])=0$.

$\star$ Si $i+j \leqslant n$, réaliser $(M=i)\cap(E=j)$ c'est choisir les i rangs permettant de gagner une montre, parmi les n pochettes achetées, puis les j rangs parmi les $n-i$ restants permettant de gagner un euro, les tirages restants (au nombre de $n-i-j$) ne rapportant rien.

Ainsi : $P[(M=i)\cap(E=j)]) = \binom{n}{i}m^i \times \binom{n-i}{j}e^j \times (1-m-e)^{n-i-j}$,

et en remplaçant les coefficients binomiaux par des factorielles :

$$P[(M=i)\cap(E=j)]) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\, m^i e^j (1-m-e)^{n-i-j}$$

3. T_k prend ses valeurs dans $\{\frac{0}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k}{k}\}$ et pour $i \in [\![0,k]\!]$:

$$P\big(T_k = \tfrac{i}{k}\big) = \frac{P[(M=i)\cap(M+E=k)]}{P(M+E=k)} = \frac{P[(M=i)\cap(E=k-i)]}{P(M+E=k)}$$

Or $M+E \hookrightarrow \mathcal{B}(n, m+e)$ (on effectue n essais indépendants et la probabilité de gagner quelque chose à chaque essai vaut $m+e$), d'où :

$$P\big(T_k = \frac{i}{k}\big) = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}\, m^i e^{k-i}(1-m-e)^{n-k} \times \frac{k!(n-k)!}{n!(m+e)^k(1-m-e)^{n-k}}$$

Soit :

$$P\big(T_k = \tfrac{i}{k}\big) = \binom{k}{i}\frac{m^i e^{k-i}}{(m+e)^k}$$

On a donc :

$$E(T_k) = \frac{1}{(m+e)^k}\sum_{i=0}^{k}\frac{i}{k}\binom{k}{i}m^i e^{k-i} = \frac{e^k}{k(m+e)^k}\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i}\big(\frac{m}{e}\big)^i.$$

En utilisant le résultat de la question 1., il vient donc :

$$E(T_k) = \frac{m}{m+e}.$$

Exercice 3.2.

Soit θ un réel strictement positif. On note U_θ la distribution uniforme sur l'intervalle $[0,\theta]$. Pour un entier $n \geqslant 2$, on considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ distribuées uniformément sur $[0,\theta]$. θ est inconnu et on veut l'estimer.

1. On pose $M_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. Calculer respectivement la fonction de répartition F_n et une densité f_n de M_n. On pose :

$$M'_n = \frac{n+1}{n} M_n$$

Calculer $E(M_n), E(M_n^2), E(M'_n)$ et $E((M'_n)^2)$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \theta| > \varepsilon) = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P(|M'_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

2. Soit $\tau \in \mathbb{R}^*$, fixé. On considère la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\alpha_n = \theta \left(1 - \frac{\tau}{n}\right) \cdot \frac{n+1}{n}$$

Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(M'_n \leqslant \alpha_n) = \mathrm{e}^{-\tau}$$

En déduire que la variable $Z_n = n\left(1 - \dfrac{M_n}{\theta}\right)$ tend en loi vers une variable exponentielle de paramètre 1.

3. On pose

$$Y_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Déterminer l'espérance et la variance de Y_n et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

4. Entre M'_n et Y_n, quel estimateur de θ choisissez–vous ?

Solution :

1. M_n prend ses valeurs entre 0 et θ, et pour $0 \leqslant x \leqslant \theta$, on a :

$$F_n(x) = \left(\tfrac{x}{\theta}\right)^n \text{ et } f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$$

$E(M_n) = \displaystyle\int_0^\theta x f_n(x)\,dx = \frac{n\theta}{n+1}$; $E(M_n^2) = \displaystyle\int_0^\theta x^2 f_n(x)\,dx = \frac{n\theta^2}{n+2}$.
On en déduit :

$$E(M'_n) = \theta\,;\ E((M'_n)^2) = \theta^2\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$$

$P(|M_n - \theta| > \varepsilon) = P(M_n < \theta - \varepsilon) = \left(1 - \tfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$

$$\begin{aligned} P(|M'_n - \theta| > \varepsilon) &= P\left(|M_n - \frac{n\theta}{n+1}| > \frac{n\varepsilon}{n+1}\right) \\ &= P\left(M_n < \frac{n(\theta - \varepsilon)}{n+1}\right) + P\left(M_n > \frac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Le premier terme vaut $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$ et tend vers 0 quand n tend vers l'infini ;

le second est nul pour n assez grand, car $\dfrac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1}$ est alors plus grand que θ.

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} P(|M_n - \dfrac{n\theta}{n+1}| > \dfrac{n\varepsilon}{n+1}) = 0$.

2. $P(M'_n \leqslant \alpha_n) = P\big(M_n \leqslant \theta(1-\frac{\tau}{n})\big) = \big(1-\frac{\tau}{n}\big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\tau}$.

Donc, pour tout $\tau > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n \leqslant \tau) = 1 - \mathrm{e}^{-\tau}$, et (Z_n) converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

3. On a $E(Y_n) = \theta$ et par indépendance :

$$V(Y_n) = \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{4}{n}V(X_1) = \frac{\theta^2}{3n}.$$

La limite demandée résulte de l'inégalité de Bienaymé-Tchébichev.

4. M'_n et Y_n sont deux estimateurs sans biais et convergents de θ, mais on a : $V(M'_n) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)} < V(Y_n)$.

M'_n est donc un meilleur estimateur que Y_n.

Exercice 3.3.

Une rue de Paris offre un côté de la chaussée disponible au stationnement. On identifie le côté à un segment S de longueur $x \geqslant 0$, et on suppose pour simplifier,que tous les véhicules qui se garent sont de longueur 1. On étudie deux scénarios de stationnement :

Premier scénario : Le premier véhicule qui arrive stationne exactement au milieu du segment S et divise la place restante en deux segments de longueur égale. Les véhicules arrivent les uns après les autres et se garent au milieu d'un des segments disponibles, pris au hasard parmi ceux constitués lors des manœuvres de stationnement précédentes. On suppose que la demande est telle que toutes les places pouvant être occupées le seront.

On désigne par $f(x)$ le nombre de véhicules garés.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}_*$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{2}$ et $\varphi^k = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$.
Calculer $\varphi^k(x)$ par récurrence sur k.

2. Que vaut f sur l'intervalle $[0,1[$? Sur l'intervalle $[1,2[$?

3. Établir une relation entre f et φ et en déduire que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = 2^{\lfloor \log_2(x+1)\rfloor} - 1$$

où $\log_2$ est le logarithme en base deux et où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.

On rappelle que la partie entière de $z \in \mathbb{R}$ est l'unique nombre $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $k \leqslant z < k+1$.

4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\lfloor \frac{x-1}{2} \rfloor \leqslant f(x) \leqslant \lfloor x \rfloor$.

Deuxième scénario : On suppose dans cette partie : $x > 1$, et on pose $y = x - 1$. Le premier véhicule stationne cette fois-ci *au hasard* le long du segment S, laissant deux segments disponibles de longueur aléatoire. Les véhicules qui arrivent en suivant observent les règles de stationnement du premier scénario et occupent toutes les places disponibles jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de place de longueur suffisante. On note N_x la variable aléatoire donnant le nombre de véhicules stationnés et X (prenant ses valeurs dans $[0, y]$) l'abscisse d'une des extrémités de la première voiture qui se gare.

5. Quelle est la loi suivie par X ?

6. Donner une relation entre N_x, X, f et y.

7. On admet que que $E(f(X)) = \dfrac{4^{k_0+1}-1}{3y} + \dfrac{2^{k_0}}{y}(y - 2^{k_0+1} + 1)$ avec $k_0 = \lfloor \log_2(\frac{y+1}{2}) \rfloor$. En déduire une expression de $E(N_x)$.

Solution :

1. $\varphi^2(x) = \dfrac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4} = \frac{x}{4} - (1 - \frac{1}{4})$.
Une récurrence simple montre alors que l'on a :
$$\forall\, k \geqslant 1, \varphi^k(x) = \frac{x}{2^k} - (1 - \frac{1}{2^k}).$$

2. Si $0 \leqslant x < 1$, aucune voiture ne peut se garer et $f(x) = 0$.
Si $1 \leqslant x < 2$, une voiture peut se garer et elle ne laisse de place pour personne d'autre : $f(x) = 1$.

3. Le premier véhicule garé occupe une place de longueur 1 et laisse deux emplacements de longueur égale valant $\frac{x-1}{2} = \varphi(x)$, donc :
$$f(x) = 1 + 2f\big(\varphi(x)\big)$$
De même, tant que $\varphi^k(x) \geqslant 0$:
$$\begin{cases} f\big(\varphi(x)\big) = 1 + 2f\big(\varphi^2(x)\big) \\ f\big(\varphi^2(x)\big) = 1 + 2f\big(\varphi^3(x)\big) \\ \qquad \cdots \\ f\big(\varphi^{k-1}(x)\big) = 1 + 2f\big(\varphi^k(x)\big) \end{cases}$$
Le procesus s'arrête lorsque $\varphi^k(x) \in [0, 1[$ (plus aucun véhicule ne peut se garer).
Or : $\varphi^k(x) \in [0,1[\Longleftrightarrow 0 \leqslant \frac{x}{2^k} - (1 - \frac{1}{2^k}) < 1 \Longleftrightarrow 2^k \leqslant x + 1 < 2^{k+1}$
$$\Longleftrightarrow k \leqslant \log_2(x+1) < k+1 \Longleftrightarrow k = \lfloor \log_2(x+1) \rfloor$$

Il vient alors :
$f(x) = 1 + 2\big(\varphi(x)\big) = 1 + 2 + 4f\big(\varphi^2(x)\big) = 1 + 2 + 4 + 8f\big(\varphi^3(x)\big) = \cdots$
Sachant que $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ et que pour la valeur de k trouvée précédemment $f\big(\varphi^k(x)\big) = 0$, il vient bien :

$$f(x) = 2^{\lfloor \log_2(x+1) \rfloor} - 1$$

4. $\star$ Les intervalles occupés sont de longueur 1, on ne peut donc pas garer plus de $\lfloor x \rfloor$ voitures : $f(x) \leqslant \lfloor x \rfloor$.

$\star$ L'intervalle perdu derrière la dernière voiture est inférieur ou égal à 1, et la somme de l'espace occupé par une voiture et de l'espace perdu devant elle est inférieure ou égale à 2 ; on peut donc placer au moins $\dfrac{x-1}{2}$ voitures, c'est-à-dire au moins $\lfloor \dfrac{x-1}{2} \rfloor$ voitures.

5. X suit la loi uniforme sur $[0, y]$.

6. On a $N_x = 1 + f(X) + f(y - X)$ (la première voiture se gare et laisse un espace X devant elle et un espace $y - X$ derrière elle). Notons que la loi de X est la même que la loi de $y - X$, donc la loi de $f(X)$ est la même que la loi de $f(y - X)$.

7. La relation précédente donne, compte tenu de la remarque faite :
$E(N_x) = 1 + 2E(f(X))$, soit :

$$E(N_x) = 1 + 2\Big(\frac{4^{k_0+1} - 1}{3y} + \frac{2^{k_0}}{y}(y - 2^{k_0+1} + 1)\Big)$$

Exercice 3.4.

Soit X une variable aléatoire à densité et f une densité de X, supposée continue sur $\mathbb{R}$. On admet que $Y = \dfrac{1}{X}$ est une variable aléatoire.

1. Justifier que Y est une variable à densité et en déterminer une densité ϕ.

2. On s'intéresse aux variables aléatoires X telles que X et $Y = 1/X$ ont même densité f.

a) Montrer que cette condition équivaut à :

$$(\forall y \in \mathbb{R}^*) \qquad y\, f(y) = \frac{1}{y} f\Big(\frac{1}{y}\Big)$$

b) En déduire alors l'existence d'une fonction h_1 (resp. h_2) définie sur $\mathbb{R}$ et paire, telle que, pour tout $y > 0$ (resp. $y < 0$), on ait

$$f(y) = \frac{h_1\big(\ln|y|\big)}{|y|} \quad \Big(\text{resp.} \quad f(y) = \frac{h_2\big(\ln|y|\big)}{|y|}\Big)$$

c) Réciproquement, quelles conditions doivent vérifier h_1 et h_2 pour que f définie par la formule ci-dessus soit bien une densité de probabilité de X et $1/X$?

d) Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) doivent vérifier h_1 et h_2 pour que X admette une espérance ? Comment s'exprime alors $E(X)$?

3. Exemple :
Les fonctions $h_1(t) = h_2(t) = h(t) = \dfrac{1}{\pi\,(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})}$ vérifient-elles les conditions ci-dessus ? Dans l'affirmative, déterminer une densité f commune à X et $1/X$ et, le cas échéant, l'espérance de X.
(On pourra être amené à calculer $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1}$, à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.)

Solution :

1. Déterminons d'abord la fonction de répartition de Y :
Si $y < 0$, $P(Y \leqslant y) = P(\frac{1}{X} \leqslant y) = P(\frac{1}{y} \leqslant X < 0) = F_X(0) - F_X(\frac{1}{y})$;
si $y > 0$, $P(Y \leqslant y) = P(\frac{1}{X} \leqslant y) = P(X \leqslant 0) + P(X \geqslant \frac{1}{y})$
$= F_X(0) + 1 - F_X(\frac{1}{y})$;
enfin $P(Y \leqslant 0) = P(X < 0) = F_X(0)$.
Par dérivation légitime sur $\mathbb{R}^*$, on obtient pour densité ϕ de Y :

$$\forall\, y \neq 0, \phi(y) = \frac{1}{y^2}F'_X(\frac{1}{y}) = \frac{1}{y^2}f(\frac{1}{y})$$

et on peut donner une valeur arbitraire à $\phi(0)$.

2. Dire que X et Y ont même densité se traduit sur les intervalles de continuité $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ par : $yf(y) = \frac{1}{y}f(\frac{1}{y})$.

b) $\star$ Pour $y > 0$, posons $y = \mathrm{e}^t$, il vient $\mathrm{e}^t f(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{-t} f(\mathrm{e}^{-t})$, ce qui signifie que la fonction $h_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t f(\mathrm{e}^t)$ est paire.
On a alors $yf(y) = h_1(\ln t)$, *i.e.* $f(y) = \dfrac{h_1(\ln y)}{y}$.
$\star$ On procède de même pour $y < 0$ et pour homogénéiser les notations, on peut regrouper les deux cas en écrivant $|y|$.

c) Pour que f, définie à partir de h_1 et h_2, soit une densité, il faut et il suffit que f soit positive ou nulle, continue et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1.
Cela se traduit pour h_1 et h_2 par :
$\star$ h_1 et h_2 sont continues sur $\mathbb{R}$, paires.
$\star$ L'intégration se faisant « à vue » (une primitive de la fonction $y \mapsto \dfrac{h_1(\ln y)}{y}$ est $y \mapsto H_1(\ln y)$), où H_1 est une primitive de h_1, la condition $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f + \int_0^{+\infty} f = 1$ s'écrit : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h_2 = 1$.

d) X admet une espérance si les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} yf(y)\,dy$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} yf(y)\,dy$ sont convergentes, ce qui équivaut ici à la convergence des intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} -h_2(\ln|y|)\,dy \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} h_1(\ln y)\,dy.$$

Après le changement de variable $y = -\mathrm{e}^t$ ou $y = \mathrm{e}^t$, il vient :

$E(X)$ existe $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t)\mathrm{e}^t\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\mathrm{e}^t\,dt$ convergent, et alors :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [h_1(t) - h_2(t)]\mathrm{e}^t\,dt$$

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, continue et paire, de plus $h(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} h(t)\,dt$ converge. On conclut de même sur $\mathbb{R}^-$ par parité.

De plus, à l'aide des changements de variables $u = \mathrm{e}^t$ puis $x = \tan u$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\pi(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})} = \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} du = \frac{1}{4}$$

d'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h_2 = \frac{4}{4} = 1$ et h convient.

On a alors, pour $y \neq 0$: $f(y) = \dfrac{h(\ln|y|)}{|y|} = \dfrac{1}{\pi(y^2+1)}$ et on vérifie que l'on a bien $\dfrac{1}{y^2} f(\dfrac{1}{y}) = f(y)$.

Enfin $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t h(t) = \frac{1}{\pi}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^t h(t)$ n'a pas une intégrale convergente en $+\infty$. On en déduit que X n'a pas d'espérance, ce que l'on peut voir aussi directement sur la densité f.

Exercice 3.5.

On dispose de n dés cubiques, avec $n \geqslant 4$, non équilibrés. Pour chacun, lorsqu'on le lance, la probabilité d'amener le 1 (l'as) est p, $0 < p < 1$, nombre inconnu *a priori*.

On réalise une suite de manches de la façon suivante :

- à la première manche, on lance les n dés. Ceux qui amènent l'as sont écartés et ne seront plus lancés ;
- à la seconde manche, on lance les dés restants. Ceux qui amènent l'as sont écartés,
- ainsi de suite jusqu'à ce que tous les dés aient amené l'as.

1. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de dés écartés à l'issue de la première manche.

a) Déterminer la loi de X. Préciser son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

b) En déduire un estimateur sans biais Y de p en fonction de X. Cet estimateur est–il convergent ?

2. On suppose les dés numérotés de 1 à n.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, au dé numéro i, on associe la variable aléatoire D_i qui représente le numéro de la manche à l'issue de laquelle ce dé a été écarté.

a) Déterminer la loi de D_i. Préciser son espérance et sa variance.

b) Soit $D = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$. Déterminer la loi de D.

c) Montrer que $Z = \dfrac{n-1}{D-1}$ est un estimateur sans biais de p.

3. On note N la variable aléatoire représentant le nombre total de dés lancés jusqu'à l'obtention de n as (certains ont pu être lancés plusieurs fois).

a) Exprimer N en fonction des $(D_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

b) En déduire l'espérance $E(N)$.

Solution :

1. a) Clairement $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, donc $E(X) = np$ et $V(X) = npq$, avec $q = 1-p$.

b) En posant $Y = \dfrac{1}{n}X$, on a $E(Y) = p$ et $V(Y) = \dfrac{pq}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc Y est un estimateur sans biais et convergent de p.

2. a) Pour tout i, D_i est le temps d'attente du premier succès (obtenir l'as) avec le dé portant le numéro i. On sait que D_i suit la loi géométrique de paramètre p, d'où :

$$E(D_i) = \frac{1}{p} \text{ et } V(D_i) = \frac{q}{p^2}$$

b) On peut considérer qu'on lance toujours le même dé et D est alors le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ sucès. On a alors $D(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ et :

$$\forall\, j \geqslant n, P(D=j) = \binom{j-1}{n-1} p^{n-1} q^{j-n} p$$

(En effet, on a obtenu $n-1$ succès au cours des $j-1$ premiers lancers et le $j^{\text{ème}}$ lancer amène le $n^{\text{ème}}$ succès.)

c) Par le théorème de transfert, et sous réserve de convergence :

$$E\Big(\frac{1}{D-1}\Big) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j-1} \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n}.$$

On a donc :

$$E\left(\frac{1}{D-1}\right) = \frac{p}{n-1}\sum_{j=n}^{\infty}\binom{j-2}{n-2}p^{n-1}q^{(j-1)-(n-1)} = \frac{p}{n-1}$$

(En effet, la dernière somme écrite vaut 1 puisqu'elle représente la somme des probabilités afférentes à la loi de D lorsque l'on considère seulement $n-1$ dés.)

Ainsi $E\left(\frac{n-1}{D-1}\right) = p$ et Z est un estimateur sans biais de p.

3. a) $N = \sum_{i=1}^{n} D_i$.

b) Par linéarité de l'espérance, on a $E(N) = \dfrac{n}{p}$.

Exercice 3.6.

Une tortue décide de parcourir une piste en caoutchouc de 100 mètres de long.
Elle parcourt 10 mètres chaque jour, se reposant la nuit. Mais la nuit, pendant qu'elle se repose, la piste s'allonge uniformément de 100 mètres : ainsi, au bout de la première nuit, la tortue se retrouve à 20 mètres du départ (la piste a doublé de longueur) mais à 180 mètres de l'arrivée.

Le but de cet exercice est de déterminer si la tortue finira par arriver au bout de la piste.

1. Où se trouve la tortue par rapport au départ et à l'arrivée au bout de la seconde nuit ?

2. Pour tout entier non nul n, on note t_n la distance (en mètres) entre le point de départ et l'endroit où se trouve la tortue au bout de la n-ème nuit, l_n la longueur (en mètres) de la piste au bout de la n-ème nuit.
Déterminer l_n.

3. Justifier l'égalité $\dfrac{t_{n+1}}{n+2} = \dfrac{t_n}{n+1} + \dfrac{10}{n+1}$.

4. En déduire, sous forme de somme, la valeur de $\dfrac{t_{n+1}}{n+2}$, puis sa limite et conclure.

5. Notre tortue voudrait atteindre plus vite le bout de la piste : en se forçant elle peut parcourir 15 mètres dans la journée. Mais si elle le fait, le lendemain elle est fatiguée : elle ne parcourra alors que 5 ou 10 mètres de façon équiprobable. Par contre, lorsqu'elle ne parcourt que 5 mètres un jour, elle est en forme le lendemain et parcourt 10 ou 15 mètres de façon équiprobable. Enfin si elle parcourt 10 mètres un jour, le lendemain elle parcourt de façon équiprobable 5, 10 ou 15 mètres.

Sachant que la tortue fait un effort le premier jour, quelle est la probabilité qu'elle ait parcouru, avec cette stratégie, une plus grande distance au bout de la 3ème nuit ?

Solution :

1. A la fin de la première journée, la tortue est à 10 mètres du départ. Pendant la nuit, la piste passe de 100 mètres à 200 mètres, donc au matin du deuxième jour la tortue est à 20 mètres du départ et à la fin du deuxième jour elle est à 30 mètres du départ. Au matin du troisième jour la piste est passée de 200 mètres à 300 mètres et donc la tortue est à $30\times\frac{3}{2} = 45$ mètres du départ et à 255 mètres de l'arrivée.

2. Clairement $l_n = (n+1)\times 100$ mètres.

3. A la fin du $n^{\text{ème}}$ jour, la tortue se trouve à la distance $t_n + 10$ mètres du départ.

Pendant la nuit, la piste passe de la longueur l_n à la longueur l_{n+1}, et
$$l_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}\, l_n\,;$$
ainsi au matin du $(n+1)^{\text{ème}}$ jour, la tortue est à la distance $\frac{n+2}{n+1}(t_n + 10)$ mètres du départ, soit :
$$t_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(t_n + 10),\ i.e.\ \frac{t_{n+1}}{n+2} = \frac{t_n}{n+1} + \frac{10}{n+1}$$

4. Par télescopage : $\frac{t_{n+1}}{n+2} = t_0 \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{10}{k+1} = 10(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1})$

La divergence connue de la série harmonique montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{n+2} = +\infty$, on a donc également $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{l_{n+1}} = +\infty$; donc pour n assez grand, cette quantité va dépasser 1, et ce jour là, la tortue arrive au bout de la piste.

5. Notons x_n la distance parcourue le $n^{\text{ème}}$ jour. La tortue étant en forme le premier jour, on cherche en fait la probabilité p que $x_2 + x_3$ dépasse 15.

Ceci ne peut se produire que dans deux cas : $x_2 = 5$ et $x_3 = 15$, ou $x_2 = 10$ et $x_3 \geqslant 10$. Soit par incompatibilité et conditionnement :
$$\begin{aligned} p &= P(x_2 = 5)P(x_3 = 15/x_2 = 5) + P(x_2 = 10)P(x_3 \geqslant 10/x_2 = 10) \\ &= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\times\tfrac{2}{3} = \tfrac{7}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 3.7.

On considère une urne contenant n boules numérotées portant des numéros deux à deux distincts.

Un premier joueur effectue dans l'urne des tirages sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule portant le plus grand numéro. On note X_1 le nombre de tirages effectués par ce joueur.

S'il reste des boules dans l'urne, un deuxième joueur effectue la même expérience (c'est-à-dire qu'il effectue des tirages sans remise jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi celles présentent au moment où il entre en jeu).
On note X_2 le nombre de tirages effectués par ce second joueur (nombre qui vaut éventuellement 0).

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.

2. Donner la loi de X_2 conditionnée par X_1.

En déduire que pour $1 \leq k \leq n-1$, $P(X_2 = k) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=k}^{n-1}\dfrac{1}{i}$, puis donner la loi de X_2.

3. Calculer l'espérance $E(X_2)$.

4. Écrire un programme Pascal choisissant et affichant n numéros distincts entre 1 et 100, (n est entré au clavier) puis calculant X_1 et X_2, si l'on suppose que les tirages sont effectués dans l'ordre choisi par l'ordinateur. On pourra s'aider des lignes de programme suivantes, après avoir expliqué ce qu'elles font :

```
REPEAT b[i] := RANDOM(100)+1 ;
a := 0 ;
FOR j :=1 TO i-1 DO
      IF b[i]=b[j] THEN a := a+1 ;
UNTIL a=0 ;
```

(*on rappelle que* `RANDOM(100)` *retourne au hasard une valeur entre 0 et 99.*)

Solution :

1. On peut modéliser le problème en disant que l'on range les n boules au hasard (il y a $n!$ façons de faire, toutes équiprobables) et $X_1 = k$ est réalisé si la boule de plus grand numéro est à la $k^{\text{ème}}$ place (ce qui peut se faire de $(n-1)!$ façons).

Ainsi X_1 suit la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et $E(X_1) = \dfrac{n+1}{2}$, $V(X_1) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

2. $X_2(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$, et :

$\star$ si $X_1 = j$, avec $j \neq n$, est réalisé, il reste $n-j$ boules dans l'urne et le plus grand numéro restant sera tiré avec équiprobabilité à chacun des $n-j$ rangs possibles ;

⋆ si on réalise $X_1 = n$, alors l'urne est vide et X_2 prend la valeur 0.

Bref :

⋆ pour $1 \leqslant j < n, P(X_2 = k/X_1 = j) = \dfrac{1}{n-j}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-j$ et 0 sinon ;

⋆ $P(X_2 = j/X_1 = n) = 0$ si $j \neq 0$ et $P(X_2 = 0/X_1 = n) = 1$.

On utilise alors la formule des probabilités totales, appliquée au système complet $(X_1 = j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$:

$$\begin{aligned}\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], P(X_2 = k) &= \sum_{j=1}^{n} P(X_2 = k/X_1 = j)P(X_1 = j)\\ &= \sum_{j=1}^{n-k} P(X_2 = k/X_1 = j)P(X_1 = j)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{n-j} = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\end{aligned}$$

tandis que $P(X_2 = 0) = P(X_1 = n) = \dfrac{1}{n}$.

3. $E(X_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\,\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} k\Big) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j+1}{2}$

$$= \frac{1}{2n}\Big(\frac{n(n-1)}{2} + n - 1\Big) = \frac{n+1}{4} - \frac{1}{2n}.$$

4. On peut proposer :

```
Program PlusGrand
Uses crt ;
Var b : Array[1..100] of Integer ; i,j,x1,x2,n,a : Integer ;
Begin Clrscr ; Randomize ;
Readln(n) ;
x1 ;=1 ;
For i :=1 To n Do
  Begin Repeat b[i] :=Random(100)+1 ; a :=0 ;
    For j :=1 To i-1 Do If b[i]=b[j] Then a :=a+1 ;
    Until a :=0 ;
    Write(b[j]) ;
    If b[x1]<b[i] Then x1 :=i ;
  End ;
Writeln ; Writeln('X1='x1) ;
x2 :=x1+1 ;
For i :=x1+1 To n Do If b[x2]<b[i] Then x2 :=i ;
Writeln('X2=',x2) ;
Readln ;
End.
```

Exercice 3.8.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\ln X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer une densité f de X.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ le moment d'ordre n, $E(X^n)$ de X existe et le calculer.

3. Soit $(f_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x)[1 + \frac{1}{k}\sin(2\pi \ln x)] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est la densité d'une variable aléatoire X_k telle que pour tout $n \geqslant 1$

$$E(X_k^n) = E(X^n)$$

Conclusion ?

Solution :

1. Notons $Y = \ln X$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X \leqslant \mathrm{e}^x) = F_X(\mathrm{e}^x)$, donc par dérivation, (en choisissant une densité aussi continue que possible) :

$$f_Y(x) = \mathrm{e}^x f_X(\mathrm{e}^x).$$

Par conséquent :

$$\forall\, t > 0, f_X(t) = \frac{1}{t}\, f_Y(\ln t) = \frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \text{ et pour } t \leqslant 0,\ f_X(t) = 0.$$

2. Sous réserve de convergence, $E(X^n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 x}{2}}\, dx$.
La fonction φ à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$. Le seul problème est d à la borne infinie.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp\big((n+1)\ln x - \dfrac{\ln^2 x}{2}\big) = 0$, donc $\varphi(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et la convergence en résulte.

Pour calculer $E(X^n)$, effectuons le changement de variable $u = \dfrac{\ln x}{\sqrt{2}}$; il vient :

$$E(X^n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{n\sqrt{2}\,u}\mathrm{e}^{-u^2}\, du = \frac{\mathrm{e}^{n^2/2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u-\frac{n}{\sqrt{2}})^2}\, du,$$

soit en reconnaissant une intégrale de référence :

$$E(X^n) = \mathrm{e}^{n^2/2}$$

3. Comme $k \geqslant 1$, la fonction f_k est bien positive ou nulle et elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à évaluer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_k$, *i.e.* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} f_k$.

Soit ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(x) = \sin(2\pi \ln x) f(x)$.
Pour a et b strictement positifs, le changement de variable $u = \ln x$ donne :

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \int_{\ln a}^{\ln b} \sin(2\pi u)\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du$$

Soit $h(u) = \sin(2\pi u)\dfrac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, comme $|h(u)| \leqslant \dfrac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,du$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi il est légitime de faire tendre a vers 0 et b vers $+\infty$. De plus la fonction h étant impaire, on peut dire **maintenant** que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle.

Bref $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_k = \int_{\mathbb{R}} f + \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}+} \psi = 1$ et f_k est une densité de probabilité.

Les mêmes arguments montrent que X_k a des moments de tous ordres et le même argument d'imparité que $E(X_k^n) = E(X^n)$.

En donnant une valeur quelconque à k, par exemple $k = 2$, on vient de montrer que deux variables aléatoires n'ayant pas la même loi peuvent avoir la même suite de moments.

Exercice 3.9.

1\. a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et φ une densité de X. Montrer que X admet des moments à tous les ordres.

Préciser les moments d'ordre 1, 2 et 3.

Calculer le moment d'ordre 4 en remarquant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^4\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -t^3\varphi'(t)\,dt$, où φ' désigne la dérivée de φ.

b) On suppose maintenant que X suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$.

En écrivant X sous la forme $X = \sigma X^* + m$, calculer $E(X^2)$, $E(X^4)$, puis $V(X^2)$ en fonction de m et de σ.

2\. Un point se déplace dans le plan rapporté à un repère orthonormé, en partant de l'origine à l'instant 0.

Si à l'instant $t = k-1$, le point se trouve en (u_{k-1}, v_{k-1}), à l'instant $t = k$, il se trouvera en $(u_{k-1} + X_k, v_{k-1} + Y_k)$, où X_k et Y_k suivent des lois normales $\mathcal{N}(a,1)$.

Ainsi, au temps $t = 1$, il se trouve au point de coordonnées (X_1, Y_1), au temps $t = 2$, il se trouve en $(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$, etc.

On suppose les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ mutuellement indépendantes : les X_i sont indépendantes entre elles, de même que les Y_j et toutes les X_i sont indépendantes de toutes les Y_j.

L'objectif de cette question est l'estimation de a^2 où a est défini ci-dessus.

Pour tout n entier strictement positif, on pose $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

(A_n, B_n) sont donc les coordonnées du point à l'instant n.

a) Quelle sont les lois de A_n, de B_n, leur espérance et leur variance ?

b) Soit $D_n^2 = A_n^2 + B_n^2$ le carré de la distance du point à l'origine à l'instant n.

Exprimer $E(A_n^2)$ à l'aide de $V(A_n)$ et $E(A_n)$. En déduire $E(D_n^2)$.

Montrer que $U_n = \dfrac{X_n^2 + Y_n^2}{2n^2} - \dfrac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de a^2.

c) Exprimer la variance de A_n^2 à l'aide des résultats de la question 1. En déduire celle de U_n.

Cet estimateur est-il convergent ?

Solution :

1. a) L'intégrale $m_r = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$ existe pour tout réel $r \geqslant 0$. En effet, la fonction $t \mapsto t^r.\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on sait que pour tout $r \geqslant 0$, au voisinage de $\pm\infty$:

$$t^r.\mathrm{e}^{-t^2/2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ainsi X admet des moments à tout ordre.

Par raison de symétrie, lorsque $r \in \mathbb{N}$ est impair, il vient $m_r = 0$. Aussi :

$$E(X) = m_1 = 0, \quad E(X^2) = V(X) = 1, \quad E(X^3) = 0$$

Enfin :

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t^3)(-t\,\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}})\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t^3)\varphi'(t)\,dt$$

En intégrant par parties, il vient :

$$m_4 = \big[-t^3\varphi(t)\big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 3t^2\varphi(t)\,dt = 3m_2 = 3$$

b) On écrit :

$$\begin{cases} X^2 = \sigma^2 X^{*2} + 2m\sigma X^* + m^2 \\ X^4 = \sigma^4 X^{*4} + 4m\sigma^3 X^{*3} + 6m^2\sigma^2 X^{*2} + 4m^3\sigma X^* + m^4 \end{cases}$$

Par linéarité de l'espérance et sachant que X^* suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, il vient :

$$\begin{cases} E(X^2) = m^2 + \sigma^2 \\ E(X^4) = 3\sigma^4 + 6m^2\sigma^2 + m^4 \\ V(X^2) = 2\sigma^2(\sigma^2 + 2m^2) \end{cases}$$

2. a) A_n est une somme de n lois normales indépendantes, d'espérance a et de variance 1 ; A_n suit donc la loi normale d'espérance na et de variance n, soit $A_n \hookrightarrow \mathcal{N}(na, \sqrt{n})$. Il en est de même pour B_n.

b) On a :

$$\begin{cases} E(A_n^2) = V(A_n) + E^2(A_n) = n + n^2a^2 = E(B_n^2) \\ E(D_n^2) = 2n + 2n^2a^2 \end{cases}$$

Comme $U_n = \dfrac{D_n^2}{2n^2} - \dfrac{1}{n}$, il vient $E(U_n) = a^2$.

La variable aléatoire U_n est une fonction de $2n$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ de même loi et dépendant du paramètre a telle que $E(U_n) = a^2$. Aussi U_n est-il un estimateur sans biais de a^2.

c) Comme A_n et B_n sont indépendantes :

$$V(D_n^2) = V(A_n^2) + V(B_n^2) = 4n^2(1 + 2na^2).$$

Et : $V(U_n) = \dfrac{V(D_n^2)}{4n^4} = \dfrac{1 + 2a^2}{n^2}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} V(U_n) = 0$, on conclut que U_n est un estimateur sans biais et convergent de a^2.

Exercice 3.10.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs ou nuls par :

$$f(x) = \begin{cases} -x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit Ω un ensemble fini et P une probabilité sur cet ensemble. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, à valeurs dans un ensemble fini E, on appelle entropie de la loi de X le réel, noté $H(X)$, défini par :

$$H(X) = \sum_{x \in E} f\big(P(X = x)\big)$$

1. a) Si la loi de X est uniforme sur E, calculer $H(X)$.

b) Si X est constante, calculer $H(X)$.

2. Déterminer le signe de $H(X)$ dans le cas général.

3. a) Montrer que $\forall\, x \geqslant 0, f(x) \leqslant 1 - x$.

b) On note N le cardinal de E. Quel est le signe du réel $\sum\limits_{x \in E} f\big(N.P(X = x)\big)$?

c) En déduire une majoration de $H(X)$.

4. Pour quelle(s) variable(s) aléatoire(s) à valeurs dans E, l'entropie est-elle minimale ?

5. Pour quelle(s) variable(s) aléatoire(s) à valeurs dans E, l'entropie est-elle maximale ?

Solution :

1. a) Comme X suit la loi uniforme sur E de cardinal fini N, pour tout $x \in E$, $P(X = x) = \dfrac{1}{N}$. Donc :

$$H(X) = \sum_{x\in E} f\big(\frac{1}{N}\big) = Nf\big(\frac{1}{N}\big) = -\ln\big(\frac{1}{N}\big) = \ln N$$

b) Si X est constante, il existe $x_0 \in E$ tel que $P(X = x_0) = 1$ et pour tout $x \neq x_0, P(X = x) = 0$. Donc :

$$H(X) = f(1) + \sum_{x\neq x_0} f(0) = 0$$

2. Pour tout $x \in E, 0 \leqslant P(X = x) \leqslant 1$. Donc

- si $P(X = x) \neq 0, -P(X = x)\ln\big(P(X = x)\big) \geqslant 0$.
- si $P(X = x) = 0, f\big(P(X = x)\big) = 0$.

Ainsi $H(X)$ est la somme de réels positifs ou nuls d'où $H(X) \geqslant 0$.

3. a) Étudions $h : x \mapsto 1 - x + x\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0, h'(x) = \ln x$.
La fonction h est donc décroissante sur $]0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$. Elle atteint un minimum en $x = 1$ qui vaut 0. Donc pour tout $x > 0, h(x) \geqslant 0$. Enfin, h se prolonge par continuité en $x = 0$ par 1.
Ainsi $\forall\, x \geqslant 0, f(x) \leqslant 1 - x$.

b) Il vient, par la question précédente :

$$\sum_{x\in E} f\big(N.P(X = x)\big) \leqslant \sum_{x\in E} \big(1 - NP(X = x)\big) = N - N\sum_{x\in E} P(X = x) = 0.$$

c) On remarque que si $P(X = x) = 0$, alors :

$f\big(N.P(X = x)\big) = f\big(P(X = x)\big) = 0$. Donc :

$$0 \geqslant \sum_{x\in E} f\big(N.P(X = x)\big) = -\sum_{x\in E} N.P(X = x)\ln\big(N.P(X = x)\big)$$

Soit : $0 \geqslant -N\ln N \sum_{x\in E} P(X = x) + NH(X)$

Ainsi $H(X) \leqslant \ln N$. Finalement $0 \leqslant H(X) \leqslant \ln N$.

4. On a vu que si X est constante alors $H(X) = 0$. Montrons que seules les variables aléatoires constantes réalisent ce minimum.
Si $H(X) = 0$, H étant la somme finie de nombres positifs ou nuls, ils sont tous nuls. Donc, pour tout $x \in E, f\big(P(X = x)\big) = 0$, donc soit $P(X = x) = 0$, soit $P(X = x) = 1$.
Comme $\sum_{x\in E} P(X = x) = 1$, la seule possibilité est qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $P(X = x_0) = 1$ et pour tout $x \neq x_0, P(X = x) = 0$, ce qui signifie que X est constante.

5. On a vu que si X suit une loi uniforme sur E, H est maximale. Montrons que le maximum de H n'est atteint que pour une loi uniforme.
Supposons que $H(X) = \ln N$. On a vu dans la question 3. c) que

$$\sum_{x\in E} f(NP(X = x)) = -N\ln N + NH(X)$$

Donc ici, $\sum_{x \in E} f\big(N.P(X = x)\big) = 0$.

Les inégalités de la questions 3.b) sont donc des égalités et :

$$\sum_{x \in E} f\big(N.P(X = x)\big) = \sum_{x \in E} \big(1 - N.P(X = x)\big).$$

Ceci entraîne que pour tout $x \in E, f\big(N.P(X = x)\big) = 1 - N.P(X = x)$. En effet, puisque pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \leqslant 1 - x$, l'égalité $\sum_x f(x) = \sum_x (1 - x)$ sera vérifiée si et seulement pour tout $x, f(x) = 1 - x$.

Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $P(X = x) = 0$; dans ce cas, $f\big(N.P(X = x)\big) = 0$ et $1 - N.P(X = x) = 1$ ce qui est en contradiction avec le raisonnement précédent. Ainsi, pour tout $x \in E, P(X = x) \neq 0$.

Finalement, pour tout $x \in E$:
$-N.P(X = x) \ln\big(N.P(X = x)\big) = 1 - N.P(X = x)$, soit $N.P(X = x) = 1$ par l'étude de la fonction h. Ainsi X suit la loi uniforme sur E.

Exercice 3.11.

On réalise une suite d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, le résultat de l'expérience numéro p étant donné sous la forme d'une variable aléatoire discrète N_p à valeurs dans l'intervalle $I_N = \{1, \ldots, N\}$.
Toutes les variables aléatoires N_p suivant la même loi, donnée par les nombres $p_k = P(N_p = k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant N$.
On suppose en outre que tous les nombres p_k sont strictement positifs.

Un jeton avance sur un disque découpé en n secteurs angulaires appelés cases, numérotés dans le sens trigonométrique de 1 à n.
L'évolution du jeton est régie par la règle suivante :
à l'instant $t = 0$, le jeton est sur la case numéro 1.
à l'instant $t = 1$, selon le résultat obtenu à l'issue de l'épreuve numéro 1, on avance le jeton de N_1 cases à partir de la case 1.
à l'instant $t = 2$, selon le résultat obtenu à l'issue de l'épreuve numéro 2, on avance à nouveau le jeton de N_2 cases,.... et ainsi de suite.
Il est bien entendu que la case venant après la case n est la case 1.

On note $A_{i,p}$ l'événement : «juste après le coup numéro p, et avant le coup $p + 1$, le jeton est situé sur la case numéro i».
On suppose ici que $N + 1 \leqslant n$.
On note X_p la matrice colonne dont les coefficients seront notés $a_{i,p}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, avec $a_{i,p} = P(A_{i,p})$.

1. Déterminer la matrice $M = (m_{i,j})$ telle que, pour tout entier naturel p, l'on ait :

$$X_{p+1} = MX_p$$

2. Montrer que la matrice M admet la valeur propre 1, et donner un vecteur propre associé.

3. On suppose dans cette question que $N = n - 1$, et que la loi des variables aléatoires N_p vérifie : $p_j = p_{N+1-j}$, pour tout entier naturel $1 \leqslant j \leqslant N$.
Montrer que M est diagonalisable.
On admettra que les valeurs propres de M autres que 1 sont toutes en valeur absolue strictement inférieures à 1, et que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
En déduire une méthode pour calculer la limite du vecteur colonne X_p, lorsque p tend vers $+\infty$.

4. On suppose dans cette question que $N = 2, n = 3$ et que la loi des variables aléatoires N_p est donnée par : $p_1 = \dfrac{1}{3}, p_2 = \dfrac{2}{3}$. Diagonaliser la matrice M.

Calculer le vecteur colonne X_p, puis déterminer sa limite lorsque p tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Notons $X_p = \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$.

La formule des probabilités totales donne, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$a_{i,p+1} = \sum_{k=1}^{n} P(A_{i,p+1}/A_{k,p})P(A_{k,p})$$

On peut ainsi écrire :

$$X_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_N & \dots & p_2 & p_1 \\ p_1 & \ddots & & & \ddots & & p_2 \\ p_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & p_N \\ p_N & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & p_N & \dots & p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} X_p$$

En effet :

• pour $n \geqslant i > j \geqslant 1$, pour que le jeton soit en i en provenant de la case j au coup d'avant, il faut et il suffit que $N_p = i - j$; d'où la sous-diagonale de p_1, puis celle de p_2, ...

• Pour arriver en case i en provenance de la case i, il faudrait que N_p soit un multiple de n, ce qui est impossible ; d'où la diagonale de 0.

• Enfin, si $1 \leqslant i < j \leqslant n$, pour arriver en case i à partir de la case j, il faut et il suffit que $N_p = n - j + i$: en effet, $n - j$ sauts de la case j vers la case n, puis i sauts de la case n vers la case i.

• puisque $N + 1 \leqslant n$, il y a au moins un zéro sur la première ligne (et ensuite des 0 en descendant en diagonale).

• Quant au triangle de 0 en bas à gauche, il n'existe pas dans le cas où $n = N + 1$.

On a également : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Puisque $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, le vecteur $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice M définie ci-dessus, associé à la valeur propre 1.

3. Lorsque $n = N + 1$,la matrice M devient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p_N & \dots & p_1 \\ p_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_N \\ p_N & \dots & p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Or pour tout $j \in [\![1, n]\!], p_j = p_{N+1-j}$. La matrice M est donc symétrique réelle et diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc une matrice P orthogonale telle que $M = PD^tP$, avec $D = \operatorname{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, avec, d'après l'énoncé, $|\lambda_i| < 1$, pour $i \geqslant 2$. Or :

$$X_p = M^p X_0 = PD^p({}^tP)X_0.$$

La limite de X_p lorsque p tend vers l'infini est donc

$$P \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0)^t P X_0.$$

4. Dans cette question $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Recherchons les valeurs propres de $N = 3M$.

On sait que 3 est valeur propre. La méthode du pivot montre que le sous-espace propre associé est de dimension 1, engendré par le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les autres valeurs propres se déterminent de la même façon. On trouve :

$\mathrm{Sp}(N) = \{3, \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}\}$,, soit :

$$\mathrm{Sp}(M) = \{1, \frac{-3+i\sqrt{3}}{6}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{6}\} = \{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$$

La matrice M admet sur $\mathbb{C}$ trois valeurs propres distinctes ; elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Notons P la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres et remarquons que

$$\left|\frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{6}\right|^2 = \frac{1}{3} < 1$$

Ainsi : $X_p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^p & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}^p \end{pmatrix} P^{-1} X_0$.

Donc : $\lim\limits_{p \to +\infty} X_p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0$.

Soit (b_1, b_2, b_3) la première ligne de la matrice P^{-1}. La limite de X_p est alors

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Puisque les composantes du vecteur limite sont identiques et de somme 1, on a $b_1 = \frac{1}{3}$.

Dans sa position limite, le jeton occupe les places $1, 2, 3$ avec équiprobabilité $\frac{1}{3}$; autrement dit :

$$\lim_{p \to +\infty} X_p = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.12.

On rappelle le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans le démontrer : *si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et A, B sont deux événements, A et B sont indépendants si et seulement si A et B^c (complémentaire de B) sont indépendants.*

Soit $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$, $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi :

$$\forall k \geqslant 0, \quad P(U_k = 1) = p, \quad P(U_k = -1) = q$$

On pose :

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}U_k.$$

1. Montrer que deux variables aléatoires Z et T vérifiant $Z(\Omega) = \{0, a\}$ et $T(\Omega) = \{0, b\}$ avec $ab \neq 0$ sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(Z, T) = 0$.

2. Déduire une condition nécessaire et suffisante, portant sur p, pour que les variables $Z_k = (U_k - U_{k-1})^2, k \geqslant 1$, soient indépendantes.

On suppose par la suite cette condition réalisée.

3. Exprimer Y_n en fonction des variables $Z_1, \ldots, Z_n$. En déduire la loi de Y_n.

4. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^*$, $G_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(Y_n = k)t^k$. Montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}^*$ fixé, $G_n(t)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$. Retrouver alors la loi de Y_n.

5. On suppose que Y_n est le gain algébrique (aléatoire) d'un individu jouant $n + 1$ fois à pile ou face. Préciser la règle du jeu.

Solution :

1. On a :
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z, T) &= E(ZT) - E(Z)E(T)\\ &= ab(P(\{Z = a\} \cap \{T = b\}) - P(\{Z = a\})P(\{T = b\})).\end{aligned}$$
et ceci est nul si et seulement si $\{Z = a\}$ et $\{T = b\}$ sont indépendants.
Dans ce cas, $\{Z = a\}$ et $\{T = b\}^c = \{T = 0\}$ sont aussi indépendants, ainsi que $\{Z = a\}^c = \{Z = 0\}$ et $\{T = b\}$ ou $\{T = 0\}$, c'est-à-dire que Z et T sont indépendantes.

2. On a $Z_k = U_k^2 - 2U_kU_{k-1} + U_{k-1}^2 = 2 - 2U_kU_{k-1}$. Donc Z_k et Z_{k+1} sont indépendantes si et seulement si $U_{k+1}U_k$ et U_kU_{k-1} sont indépendantes.
D'après la première question, ceci équivaut à $\mathrm{Cov}(U_{k+1}U_k, U_kU_{k-1}) = 0$. Or :
$$\mathrm{Cov}(U_{k+1}U_k, U_kU_{k-1}) = E(U_{k+1}U_k^2U_{k-1}) - E(U_{k+1}U_k)E(U_kU_{k-1}).$$
Comme U_k^2 est la variable certaine égale à 1, il vient par indépendance :
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U_{k+1}U_k, U_kU_{k-1}) &= E(U_{k+1})E(U_{k-1}) - E(U_{k+1})E(U_k)E(U_k)E(U_{k-1})\\ &= (p-q)^2 - (p-q)^4 = (p-q)^2\big((1 - (p-q)^2\big)\end{aligned}$$
Ainsi les variables $Z_k, k \geqslant 1$ sont indépendantes si et seulement si $p = q = \frac{1}{2}$.

3. On a vu que $Z_k = 2(1 - U_kU_{k-1})$, donc : $\sum_{k=1}^{n} Z_k = 2(n - Y_n)$, soit :
$$Y_n = n - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{4}$$

Or Z_k prend la valeur 0 avec la probabilité $p^2+q^2=\dfrac{1}{2}$ (on a ici $p=q=\frac{1}{2}$) et la valeur 4 avec la proabilité $\frac{1}{2}$. Soit $\dfrac{Z}{4}\hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Par indépendance, $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{Z_k}{4}\hookrightarrow \mathcal{B}\big(n,\frac{1}{2}\big)$, et :

$$Y_n(\Omega)=\{n-2k;k\in [\![0,n]\!]\} \text{ et } P(Y_n=n-2k)=\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

4. On a :

$$\begin{aligned}G_n(t)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(P(\{Y_n=k\}\cap\{U_n=U_{n-1}\})+P(\{Y_n=k\}\cap\{U_n\neq U_{n-1}\})\big)t^k\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(P(\{Y_{n-1}=k-1\}\cap\{Z_n=0\})+P(\{Y_{n-1}=k+1\}\cap\{Z_n\neq 0\})\big)t^k\\&=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(P(\{Y_{n-1}=k-1\})+P(\{Y_{n-1}=k+1\})\big)t^k\end{aligned}$$

Soit, par indépendance de Y_{n-1} et Z_n (Z_n est indépendante de $Z_1,\dots Z_{n-1}$, donc de Y_{n-1}), et décalage des indices :

$$G_n(t)=\frac{1}{2}\big(t+\frac{1}{t}\big)G_{n-1}(t).$$

On a donc $G_n(t)=\dfrac{1}{2^n}\big(t+\frac{1}{t}\big)^n$ et le développement de cette expression par la formule du binôme permettrait de retrouver la loi de Y_n.

5. Le joueur effectue un premier lancer de la pièce pour fixer un résultat initial. Par la suite, il gagne 1 euro à chaque fois que le résultat du lancer est identique au résultat du lancer précédent et perd 1 euro dans le cas contraire.

Exercice 3.13.

1. Pour une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, de densité $\varphi : x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $]0,+\infty[$, on considère la variable aléatoire $G=-\ln T$.

a) Déterminer la fonction de répartition et une densité de G.

b) Montrer que $E(G)$ existe et vaut $-\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln u\,\mathrm{e}^{-u}\,du$ *(intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).*

c) La variable aléatoire G admet-elle une variance ?

2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère n variables aléatoires X_i indépendantes de même loi que X et on considère la variable aléatoire $Y_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$.

a) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n en fonction de F et de n.

b) Si $F(x)\neq 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$, que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(y)$ pour tout y de $\mathbb{R}$?

c) Si $F(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $h_n = \ln n$, vérifier que la suite $(Y_n - h_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire Z que l'on déterminera.

d) Dans le cas où X suit une loi exponentielle de paramètre 1, déterminer une suite $(k_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la suite $(Y_n - k_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Solution :

1. a) La variable aléatoire G est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :

$$P(G \leqslant x) = P(-\ln T \leqslant x) = P(T \geqslant \mathrm{e}^{-x}) = \int_{\mathrm{e}^{-x}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Une densité de G est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}.\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-x}$, de classe C^1, donne :

$$\int_a^b x.\mathrm{e}^{-x}.\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int_{\mathrm{e}^{-a}}^{\mathrm{e}^{-b}} \ln u.\mathrm{e}^{-u}\,du.$$

Comme $\lim\limits_{a\to-\infty} \mathrm{e}^{-a} = +\infty$, $\lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-b} = 0$, l'existence de $E(G)$ est équivalente à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-\ln u).\mathrm{e}^{-u}\,du$.

Or $f : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}\ln u$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0, $f(u)$ est équivalent à $\ln(u)$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(u)\,du$ existe donc.

On a $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2 f(u) = 0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\,du$ existe (règle de Rieammn).

Finalement :

$$E(G) = \int_0^{+\infty} (-\ln u)\,\mathrm{e}^{-u}\,du$$

c) La variance de G existe si et seulement si le moment d'ordre 2, $E(G^2)$ existe c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln u)^2\mathrm{e}^{-u}\,du$ existe.

On a $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2(\ln u)^2\mathrm{e}^{-u} = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \sqrt{u}(\ln u)^2\mathrm{e}^{-u} = 0$. En appliquant deux fois la règle de Riemann, l'existence de la variance de G est assurée.

2. a) Pour tout y réel, on a, grce à l'indépendance des variables aléatoires (X_i) :

$$R_n(y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant y) = [F(y)]^n$$

b) Si $F(y) < 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(y) = 0$.

c) Pour tout y réel,

$$H_n(y) = P(Y_n - h_n \leqslant y) = \Big(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y-\ln n}}\Big)^n = \Big(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y/n}}\Big)^n$$

et, lorsque n tend vers l'infini :

$$\ln H_n(y) = -n\ln(1+\mathrm{e}^{-y/n}) \sim -\mathrm{e}^{-y}$$

La suite de variables aléatoires $(Y_n - h_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire Z de fonction de répartition $y \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-y}}$; on reconnaît la loi de G.

d) On a $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Alors, pour tout réel y tel que $y + k_n \geqslant 0$,

$$H_n(y) = P(Y_n - k_n \leqslant y) = (1-\mathrm{e}^{-y-k_n})^n$$

On peut prendre $k_n = \ln n$ et $(Y_n - k_n)$ converge en loi vers G.

Exercice 3.14.

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes, suivant respectivement la loi exponentielle de paramètre λ et la loi exponentielle de paramètre μ.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire λX ?

2. Soit u un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $S = Y - uX$ est à densité et qu'une densité de S est l'application h vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0, \\[2mm] \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{\lambda x/u} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

3. En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $R = \dfrac{Y}{X}\cdot$
Montrer que la variable aléatoire R est à densité et préciser une densité de R.
La variable aléatoire R admet-elle une espérance ?

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{Y}{X+Y}\cdot$
Dans le cas particulier où $\lambda = \mu$, reconnaître la loi de U et préciser, s'il y a lieu, son espérance et sa variance.

Solution :

1. La variable aléatoire λX suit la loi exponentielle de paramètre 1.

2. Notons f_k la densité usuelle de la loi exponentielle de paramètre k.
Comme $u > 0$, la variable aléatoire $-uX$ est à densité et une densité est la fonction

$$g_u : t \mapsto \frac{1}{u} f_\lambda\big(-\frac{t}{u}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\lambda}{u}\,\mathrm{e}^{\lambda t/u} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

Comme les variables aléatoires Y et $-uX$ sont indépendantes, leur somme S est une variable à densité, dont une densité est :

$$h = g_u \star f_\mu : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(t) f_\mu(x-t) dt$$

Pour tout x réel :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\min(0,x)} \frac{\lambda}{u}\,\mathrm{e}^{\lambda t/u} \mu.\mathrm{e}^{-\mu(x-t)}\,dt = \frac{\lambda\mu}{u}\,\mathrm{e}^{-\mu x} \int_{-\infty}^{\min(0,x)} \mathrm{e}^{(\mu+\frac{\lambda}{u})t}\,dt$$

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u} \mathrm{e}^{-\mu x + (\mu+\frac{\lambda}{u})\min(0,x)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{\lambda x/u} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3. On a $[R \leqslant 0] = ([X < 0] \cap [Y \geqslant 0]) \cup ([X > 0] \cap [Y \leqslant 0])$.
Les événements en présence étant quasi-impossibles, l'événement $[R \leqslant 0]$ est donc de probabilité nulle. Donc pour tout $u \leqslant 0, P(R \leqslant u) = 0$.
Pour tout réel $u > 0, P(R \leqslant u) = P(Y - uX \leqslant 0)$ et en conséquence :

$$F_R(u) = P(S \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} h(t)\,dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\lambda t/u}\,dt = \frac{\mu u}{\lambda+\mu u}$$

Comme F_R est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, une densité de R est la fonction

$$\rho : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu u)^2} & \text{si } u \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $u.\rho(u) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\lambda}{\mu u}$, la variable aléatoire R n'admet pas d'espérance.

4. On montre comme précédemment que les événements $(U \leqslant 0)$ et $(U \geqslant 1)$ sont de probabilité nulle. Puis, pour $u \in]0,1[$:

$$P(U \leqslant u) = P((1-u)Y \leqslant uX) = F_R\big(\frac{u}{1-u}\big) = \frac{\mu u}{\lambda(1-u)+\mu u}.$$

Dans le cas particulier où $\lambda = \mu$, la variable U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, et admet pour espérance $\dfrac{1}{2}$ et pour variance $\dfrac{1}{12}$.

Exercice 3.15.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$.

Soit U la variable aléatoire discrète définie par :

$$U = \max\{k \;/\; \forall\, j \in \{1,\ldots,k-1\}, X_j > X_{j+1}\}$$

Soit T la variable aléatoire discrète définie par :

$$T = \max\{k \;/\; X_1 + \cdots + X_k \leqslant N\}$$

1. Déterminer la loi de U et son espérance.

2. Montrer que, pour tous entiers naturels p et q :

$$\sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_k^p = \mathrm{C}_{q+1}^{p+1}$$

(on rappelle que si $j > i$, alors $\mathrm{C}_i^j = 0$)

3. Déterminer la loi de T.

Solution :

1. Pour $n > N, P(U = n) = 0$ et $P(U \geqslant 1) = 1$,

Si $2 \leqslant n \leqslant N, P(U \geqslant n) = \dfrac{\binom{N}{n}}{N^n}$ (en effet, il existe $\dbinom{N}{n}$ n-uplets de nombres compris entre 1 et N formant une suite strictement croissante).
Donc

$$P(U = n) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N}{n}}{N^n} - \dfrac{\binom{N}{n+1}}{N^{n+1}} & \text{si } n \leqslant N-1 \\ \dfrac{1}{N^N} & \text{si } n = N \end{cases}$$

Le calcul de l'espérance de U se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{n=1}^{N} n\big(P(U \geqslant n) - P(U \geqslant (n+1))\big) \\ &= \sum_{n=1}^{N} nP(U \geqslant n) - \sum_{n=1}^{N} nP(U \geqslant (n+1)) \\ &= \sum_{n=1}^{N} nP(U \geqslant n) - \sum_{n=2}^{N} (n-1)P(U \geqslant n) = \big(1 + \frac{1}{N}\big)^N - 1 \end{aligned}$$

2. Si $q < p$, le résultat à démontrer est évident ;

si $q \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{p}{k} = \sum_{k=p}^{q} \left(\binom{p+1}{k+1} - \binom{p}{k+1}\right) = \binom{p+1}{k+1}$.

3. Il est évident que $P(T > N+1) = 0$. Montrons par récurrence sur n que pour tout j : $P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant j) = \dfrac{\binom{n}{j}}{N^n}$
En effet :

$$\begin{aligned} P(X_1 + \cdots + X_{n+1} \leqslant j) &= \sum_{k=1}^{N} P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant j - k)P(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{j-n} P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant j - k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=1}^{j-n} \binom{n}{j-k} = \frac{1}{N^{n+1}} \binom{n+1}{j}.$$

Exercice 3.16.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout entier naturel n non nul et tout $\omega \in \Omega$, on ordonne par ordre croissant $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$ et on note $M_n(\omega)$ le terme médian, c'est-à-dire le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme dans l'ordre croissant.

1. Si x et h sont deux réels tels que $0 < x < x+h < 1$, N est le nombre d'indices i tels que $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$ et $x < X_i < x+h$.

a) Montrer que :

$$P[(x < M_n < x+h) \cap (N=1)] = (n+1)\mathrm{C}_{2n+1}^{n} x^n h (1-x-h)^n.$$

On note ce nombre $A(x,n,h)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel k tel que $2 \leqslant k \leqslant 2n+1$.

$$P[(x < M_n \leqslant x+h) \cap (N=k)] \leqslant \mathrm{C}_{2n+1}^{k} h^k$$

c) Montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout x et tout h :

$$A(x,n,h) \leqslant P(x \leqslant M_n \leqslant x+h) \leqslant A(x,n,h) + Kh^2$$

2. Montrer qu'une densité de M_n est donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)\mathrm{C}_{2n+1}^{n} x^n (1-x)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Déterminer l'espérance de M_n.

Solution :

1. a) L'événement $(x < M_n < x+h) \cap (N=1)$ correspond à « pour n indices i, on a $(X_i \leqslant x)$, pour un indice i, on a $(x < X_i < x+h)$ et $X_i > x+h$ pour les autres indices. »

On a donc la réunion d'événements deux à deux disjoints chacun de probabilité $x^n h(1-x-h)^n$, car les variables (X_i) sont indépendantes et :

$$\begin{cases} P(X_i \leqslant x) = x \\ P(x < X_i < x+h) = h \\ P(X_i > x+h) = 1-x-h \end{cases}$$

Le nombre de ces événements est $(n+1)\binom{2n+1}{n}$: en effet,
les indices $i_1, i_2, \dots, i_n$ tels que $X_{i_1} \leqslant x, \dots, X_{i_n} \leqslant x$ peuvent être choisis de $\binom{2n+1}{n}$ façons ;

l'indice i_{n+1} tel que $x < X_{i_{n+1}} < x+h$ peut prendre $(n+1)$ valeurs
et enfin, il ne reste plus qu'une possibilité de ranger les indices restants en une suite strictement croissante. Finalement

$$P[(x < M_n \leqslant x+h) \cap (N=1)] = (n+1)\binom{2n+1}{n} x^n h(1-x-h)^n$$

b) On a :

$$\begin{aligned} P[(x < M_n \leqslant x+h) \cap (N=k)] &\leqslant P(N=k) \\ &\leqslant \binom{2n+1}{k} h^k (1-h)^{2n+1-k} \leqslant \binom{2n+1}{k} h^k. \end{aligned}$$

c) Par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(x < M_n \leqslant x+h) &= \sum_{k=1}^{2n+1} P[(x < M_n \leqslant x+h) \cap (N=k)] \\ &\geqslant P[(x < M_n \leqslant x+h) \cap (N=1)] \\ &\geqslant (n+1)\binom{2n+1}{n} x^n h(1-x-h)^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_n &= P(x < M_n \leqslant x+h) \\ &= P[(x < M_n \leqslant x+h) \cap (N=1)] + \sum_{k=2}^{2n+1} P[(x < M_n \leqslant x+h) \cap (N=k)] \\ &\leqslant (n+1)\binom{2n+1}{n} x^n h(1-x-h)^n + \sum_{k=2}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} h^k \\ &\leqslant (n+1)\binom{2n+1}{n} x^n h(1-x-h)^n + h^2 2^{2n+1} \end{aligned}$$

2. Notons F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire M_n.

$\star$ Soit $h > 0$ tel que $0 < x < x+h < 1$. Alors :

$$\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} = \frac{P(x < M_n \leqslant x+h)}{h}$$

Donc :

$$(n+1)\binom{2n+1}{n} x^n (1-x-h)^n \leqslant \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h}$$

$$\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} \leqslant (n+1)\binom{2n+1}{n} x^n (1-x-h)^n + h2^{2n+1}$$

En prenant la limite lorsque h tend vers 0, il vient :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} = (n+1)\binom{2n+1}{n} x^n (1-x)^n$$

$\star$ Soit $h < 0$ tel que $0 < x+h < x < 1$. Alors :

$$\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} = \frac{P(x+h < M_n \leqslant x)}{-h}$$

Donc :

$$(n+1)\binom{2n+1}{n} (x+h)^n (1-x)^n \leqslant \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{-h}$$

$$\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{-h} \leqslant (n+1) C_{2n+1}^n (x+h)^n (1-x)^n + h2^{2n+1}$$

En prenant la limite lorsque h tend vers 0, il vient

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}=(n+1)\binom{2n+1}{n}x^n(1-x)^n$$

Donc, pour tout $x\in[0,1]$, M_n admet une densité donnée par

$$f_n(x)=(n+1)\binom{2n+1}{n}x^n(1-x)^n.$$

Il est évident que pour $x\notin[0,1]$, $f_n(x)=0$.

3. On a :

$$E(M_n)=(n+1)\binom{2n+1}{n}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n\,dx=\frac{n!(n+1)!(n+1)\binom{2n+1}{n}}{(2n+2)!}$$

En effet, posons $I_{p,n}=\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx$.

Une intégration par parties montre que, pour $p\geqslant 1$, $I_{p,n}=\dfrac{p}{n+1}I_{p-1,n+1}$.

On en déduit alors, par récurrence :

$$I_{p,n}=\frac{p}{n+1}\times\frac{p-1}{n+2}\times\cdots\times\frac{1}{n+p}I_{0,n+p}=\frac{p!n!}{(n+p+1)!}$$

et donc : $I_{n+1,n}=\dfrac{n!(n+1)!}{(2n+2)!}$, d'où le résultat.

Exercice 3.17.

On lance une pièce équilibrée n fois ($n\geqslant 2$). Pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$, A_k désigne l'événement « on obtient Pile au k-ième lancer ». Soit A_{n+1} l'événement « le nombre de Piles obtenus au cours des n lancers est pair ».

1. Déterminer les probabilités des événements $A_k, k=1,2,\ldots,n+1$.

2. a) Déterminer la probabilité

$$P(A_{n+1}\mid A_1\cap\ldots\cap A_n)$$

b) En déduire que les événements $A_1,\ldots,A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants (*i.e.* $P(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})\neq P(A_1)\cdots P(A_n)P(A_{n+1})$).

3. Montrer que toute sous famille de n événements choisis parmi $A_1,\ldots,A_n,A_{n+1}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

Solution :

1. $\star$ Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $P(A_k)=\dfrac{1}{2}$.

$\star$ Si X est la variable aléatoire représentant le nombre de Piles obtenus au cours des n lancers, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$ et :

$$P(A_{n+1}) = P\Big(\bigcup_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(X = 2k)\Big) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k}\big(\frac{1}{2}\big)^n = \big(\frac{1}{2}\big)^n \times \frac{2^n}{2} = \frac{1}{2}$$

(il suffit de développer $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ par la formule du binôme de Newton...)

2. a) On a évidemment :

$$P(A_{n+1}/A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

b) Donc :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= P(A_{n+1}/A_1 \cap \ldots \cap A_n)P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Tandis que $P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ ne sonr donc **jamais** mutuellement indépendants.

3. • si l'on choisit les événements parmi $(A_1, \ldots, A_n)$, c'est clair.

• sinon, on peut supposer que les événements choisis sont $(A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1})$. Ils sont mutuellement indépendants si et seulement si, pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$, pour tout $(i_1, \ldots, i_m) \in [\![2, n]\!]^m$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m} \cap A_{n+1}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_m})P(A_{n+1}).$$

Or : $P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_m})P(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2^{m+1}}$; et

$$\begin{aligned} &P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m} \cap A_{n+1}) \\ &\quad = P(A_{n+1}/A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m})P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

En effet, si l'événement $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}$ est réalisé, on a obtenu m Piles en n lancers,

• si $m = 2p$, on a obtenu un nombre pair de Piles sur les $(n - m - 1)$ autres lancers et

$$\begin{aligned} &P(A_{n+1}/A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) \\ &\quad = \frac{1}{2^{n-m-1}}\Big(\binom{n-m-1}{0} + \binom{n-m-1}{2} + \cdots\Big) = \frac{2^{n-m-2}}{2^{n-m-1}} ; \end{aligned}$$

• si $m = 2p+1$, on a obtenu un nombre impair de Piles sur les $(n - m - 1)$ autres lancers et

$$\begin{aligned} &P(A_{n+1}/A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) \\ &\quad = \frac{1}{2^{n-m-1}}\Big(\binom{n-m-1}{1} + \binom{n-m-1}{3} + \cdots\Big) = \frac{2^{n-m-2}}{2^{n-m-1}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne la conclusion.

Exercice 3.18.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer une densité h de leur somme $Z = X + Y$, puis déterminer la fonction de répartition de Z.

2. On se propose de retrouver cette fonction de répartition par une méthode géométrique :
On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[0,1]$.

a) Soient a, b, c, d quatre réels vérifiant $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et $0 \leqslant c < d \leqslant 1$.
Quelle est la probabilité de l'événement $[a < X < b] \cap [c < Y < d]$?
Dessiner dans le plan le rectangle de sommets $(a,c), (b,c), (b,d)$ et (a,d) et vérifier que la probabilité trouvée est égale à l'aire de ce rectangle.

b) De façon générale, les points de coordonnées X et Y étant uniformément répartis dans le carré, on admet que pour toute partie A de $[0,1] \times [0,1]$, la probabilité de l'événement $[(X,Y) \in A]$ est égale à l'aire de A.
Soit $z \in [0,2]$. Représenter dans le carré $[0,1] \times [0,1]$ l'ensemble A des points de coordonnées (X,Y) vérifiant $X + Y < z$.
On séparera les cas $0 < z \leqslant 1$ et $1 < z \leqslant 2$.
Calculer dans chacun des cas l'aire de A et retrouver ainsi la fonction de répartition de Z.

3. a) On se propose d'utiliser cette méthode géométrique pour déterminer la fonction de répartition de $T = XY$.
Soit $z \in [0,1]$. Représenter dans le carré $[0,1] \times [0,1]$ l'ensemble des points vérifiant $XY < z$. Déterminer la fonction de répartition de T.

b) Calculer l'espérance de T et vérifier que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Solution :

1. On a $(X+Y)(\Omega) = [0,2]$. Aussi, pour tout $x \notin [0,2], h(x) = 0$.

Soit $x \in [0,2]$. On sait que $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) g_Y(x-t)dt$.

• Si $x \in [0,1], f_X(t)g_Y(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \in [0,x]$ et $h(x) = \displaystyle\int_0^x dt = x$.

• Si $x \in [1,2], f_X(t)g_Y(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \in [x-1,1]$ et

$$h(x) = \int_{x-1}^{1} dt = 2 - x.$$

Finalement : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

La fonction de répartition de $Z = X + Y$ est alors

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 - \dfrac{(2-x)^2}{2} & \text{si } x \in [1,2] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2. a) Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a
$P([a < X < b] \cap [c < Y < d]) = P(a < X < b)P(c < Y < d) = (b-a)(d-c)$
ce qui représente l'aire du rectangle $ABCD$.

b) $\star$ Pour $0 < z \leqslant 1$, $P(Z \leqslant z) = \dfrac{z^2}{2}$. C'est l'aire du triangle délimité par l'intersection du carré $[0,1] \times [0,1]$ et du demi-plan $x + y \leqslant z$.

$\star$ Pour $1 \leqslant z < 2$, $P(Z \leqslant z)$ est l'aire du polygone délimité par l'intersection du carré $[0,1] \times [0,1]$ et du demi-plan $x + y \leqslant z$. Cette aire est égale à la différence entre l'aire du carré (soit 1) et du triangle délimité par l'intersection du carré $[0,1] \times [0,1]$ et du demi-plan $x + y \geqslant z$ (soit $\dfrac{1}{2}(2-z)^2$).

3. a) On a $T(\Omega) = [0,1]$.
Soit $z \in [0,1]$. L'ensemble des points vérifiant $[T \leqslant z]$ est la partie du carré $[0,1] \times [0,1]$ situé sous l'hyperbole d'équation $XY = z$. D'où :

$$P(T \leqslant z) = \int_0^z dt + \int_z^1 \frac{z}{t}\, dt = z - z \ln z.$$

Une densité de T est alors :

$$\begin{cases} -\ln z & \text{si } z \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Le calcul de l'espérance de T se fait grce à une intégration par parties :

$$E(T) = \int_0^1 -t \ln t\, dt = \Big[-\frac{t^2}{2} \ln t\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{2}\, dt = \frac{1}{4} = E(X)E(Y).$$

Exercice 3.19.

Dans tout le problème, n et m sont deux entiers positifs non nuls ; on pose, pour $t \in [0,1]$,

$$B(t,n,m) = \int_0^t u^{n-1}(1-u)^{m-1}\mathrm{d}u, \quad \beta(n,m) = B(1,n,m)$$

1. Montrer les relations $\beta(n,m) = \beta(m,n)$ et, pour $m \geqslant 2$,

$$\beta(n,m) = \frac{m-1}{n}\beta(n+1, m-1)$$

2. Calculer $\beta(n,1)$ et en déduire $\beta(n,m)$.

3. Soit $r \in [\![1,n]\!]$; on pose, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$P_{n,r}(y) = \sum_{i=r}^{n} \mathrm{C}_n^i y^i (1-y)^{n-i}$$

a) Montrer que $P_{n,r}$ est de degré inférieur ou égal à n et que 0 est racine d'ordre r de $P_{n,r}$.

b) On admet que 1 est racine d'ordre $n-r$ de $P'_{n,r}$. Montrer l'identité

$$P_{nr}(y) = \frac{B(y,r,n-r+1)}{\beta(r,n-r+1)}$$

On pourra commencer par montrer que le membre de droite de l'égalité précédente est une fonction polynomiale, et que sa dérivée est égale à $P'_{n,r}$.

4. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi. On note G la fonction de répartition commune, et, pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$Y_{t,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k \in]-\infty, t] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad S_{t,n} = \sum_{k=1}^{n} Y_{t,k}$$

a) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, justifier que $(Y_{t,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

b) Quelle est la loi suivie par $Y_{t,k}$? En déduire la loi de $S_{t,n}$ puis montrer que pour $r \in [\![1,n]\!], P(S_{t,n} \geqslant r) = P_{nr}(G(t))$.

c) En déduire que $F : t \mapsto P(S_{t,n} \geqslant r)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire notée $X_{(r)}$.

d) On pose $n = 2p+1$ et on suppose que les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que

$$\forall\, t \in [0,1], \;\; F(t) = \frac{(2p-1)!}{((p-1)!)^2} \int_0^t [u(1-u)]^{p-1} \mathrm{d}u$$

Solution :

1. La première relation est immédiate après le changement de variable $v = 1-u$, tandis que la seconde découle d'une intégration par parties (les fonctions en jeu étant polynomiales sont de classe C^∞).

2. On a directement $\beta(n,1) = \dfrac{1}{n}$ et en écrivant la seconde relation, on obtient de proche en proche :

$$\beta(n,m) = \frac{m-1}{n}\beta(n+1,m-1) = \frac{(m-1)(m-2)}{n(n+1)}\beta(n+2,m-2) = \cdots$$
$$= \frac{(m-1)!}{n(n+1)\cdots(n+m-2)}\beta(n+m-1,1) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

3. a) Le degré de $P_{n,r}$ est inférieur ou égal à n, puisque chaque terme de la somme est de degré n. On peut de plus factoriser $P_{n,r}$ par y^r et le coefficient de ce facteur vaut $\binom{n}{r} \neq 0$.

b) On a $B'(y, r, n-r+1) = y^{r-1}(1-y)^{n-r}$, donc 0 est racine d'ordre $r-1$ et 1 est racine d'ordre $n-r$ de $y \mapsto B'(y, r, n-r+1)$ et de $P'_{n,r}$.
D'après le résultat admis, ces deux polynômes sont de degré commun $n-1$; par suite, ils concident à une constante multiplicative près, ainsi que leurs primitives respectives qui s'annulent en zéro.
Donc $B(y, r, n-r+1)$ et $P_{n,r}(y)$ concident à une constante multiplicative près.
Comme $P_{n,r}(1) = 1$ et $B(1, r, n-r+1) = \beta(r, n-r+1)$, l'identité est prouvée.

4. a) C'est un résultat de cours.

b) Chaque variable $Y_{t,k}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre
$$E(Y_{t,k}) = P(X_k \leqslant t) = G(t).$$
Par indépendance des $Y_{t,k}$, $S_{t,n}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $G(t)$. On a donc :
$$\begin{aligned} P(S_{t,n} \geqslant r) &= \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} \big(G(t)\big)^i \big(1-G(t)\big)^{n-i} = P_{nr}\big(G(t)\big) \\ &= \frac{B(G(t), r, n-r+1)}{\beta(r, n-r+1)} \end{aligned}$$
c) La fonction polynomiale de classe C^∞ : $P_{n,r}$, vérifie $P_{n,r}(0) = 0$ et $P_{n,r}(1) = 1$. Par conséquent, les propriétés de limites sont propagées par composition. Elle est strictement croissante et positive sur $[0, 1]$ d'après son expression intégrale, donc $t \mapsto P_{n,r}(G(t))$ l'est sur $\mathbb{R}$.
Enfin, les propriétés de continuité sur $\mathbb{R}$ et de dérivabilité sauf éventuellement en un nombre fini de points se propagent par la composition à F qui est bien une fonction de répartition.

d) Dans le cas où $n = 2p+1$, $X_{(p)}$ est la médiane de l'échantillon ordonné $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \cdots \leqslant Y_n$, obtenu à partir des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On a dans le cas particulier de la distribution uniforme, puisque $n-p-1 = p$,
$$F(t) = \frac{B(t, p, p)}{\beta(p, p)} = \frac{(2p-1)!}{((p-1)!)^2} \int_0^t [u(1-u)]^{p-1} \mathrm{d}u.$$

Exercice 3.20.

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f continue sur $\mathbb{R}_+$ et de fonction de répartition F et pour tout triplet de $\mathbb{R}_+$, (t, x, y) avec $t \leqslant x \leqslant y$ on définit la probabilité conditionnelle
$$\pi(x, y, t) = P(x \leqslant X < y / X \geqslant t)$$

et lorsqu'elle existe $a(x,t) = \lim\limits_{y\to x} \dfrac{\pi(x,y,t)}{y-x}$.

1. Que représentent $\pi(x,y,t)$ et $a(x,t)$ si X est la durée de vie d'un individu pris au hasard dans une population ? Exprimer $a(x,t)$ en fonction de f et F.

2. On appelle **fonction de hasard** de X, l'application h définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(x) = a(x,x)$.
Interpréter h dans le cadre précisé dans la question précédente.
Après avoir vérifié qu'il s'agit bien d'une densité, préciser la fonction de hasard dans le cas où $f(x) = x.\mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour tout $x \geqslant 0$.

3. Dans le cas général exprimer F puis f en fonction de la primitive de h s'annulant en 0.
Déterminer les lois à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ à fonctions de hasard constantes.

4. En adaptant les définitions précédentes au cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$,

a) préciser la fonction de hasard pour la loi de fonction de répartition définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$;

b) étudier les variations de la fonction de hasard de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pourra appeler Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, poser $\varphi = \Phi'$ et utiliser le résultat :

$$1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Solution :

1. Le réel $\pi(x,y,t)$ représente la probabilité que l'individu décède entre les dates x et y sachant qu'il est toujours en vie à la date t.

Pour tout $t \geqslant 0$, $a(x,t)$ est la densité en x de la loi conditionnelle de X sachant que $(X \geqslant t)$ est réalisé. Autrement dit, $a(x,t)\Delta x$ est la probabilité de décès instantané (entre x et $x + \Delta x$) à la date x sachant que l'individu est vivant à la date t.

Avec $[x \leqslant X < y] \subset [X \geqslant t]$, on a :

$$\pi(x,y,t) = \frac{P(x \leqslant X < y)}{P(X \geqslant t)} = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(t)}$$

et

$$a(x,t) = \lim_{y\to x} \frac{F(y) - F(x)}{(y-x)(1-F(t))} = \frac{F'(x)}{1-F(t)} = \frac{f(x)}{1-F(t)}$$

2. $\star$ $h(x)\Delta x$ représente la probabilité de décès instantané entre les instants x et $x + \Delta x$, sachant que l'individu est en vie à la date x. On a donc $h(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$.

$\star$ La fonction $f : t \mapsto t.\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et

$$\int_0^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \big[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\big]_0^{+\infty} = 1$$

Pour tout $x \geqslant 0$: $F(x) = \displaystyle\int_0^x t.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}$, et $h(x) = x$.

3. La fonction $x \mapsto -\ln\big(1 - F(x)\big)$ admet h pour dérivée sur $\mathbb{R}^+$. Comme $F(0) = 0$, on a :

$$\ln\big(1 - F(x)\big) = -\int_0^x h(t)\,dt$$

et

$$F(x) = 1 - \exp\Big(-\int_0^x h(t)\,dt\Big),\quad f(x) = h(x)\exp\Big(-\int_0^x h(t)\,dt\Big)$$

Lorsque $h(x) = \lambda > 0$, on a $f(x) = \lambda.\mathrm{e}^{-\lambda x}$ et on reconnaît la loi exponentielle de paramètre λ.

4. a) La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, f(x) = F'(x) = \mathrm{e}^{-x}.\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1.$$

On a ainsi pour tout x réel :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}}{1 - (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}})} = \mathrm{e}^{-x}$$

b) Pour tout x réel $h(x) = \dfrac{\varphi(x)}{1 - \Phi(x)}$.

On a immédiatement $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$, et l'équivalent $h(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$ entraîne que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Avec $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, on a :

$$h'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1 - \Phi(x))^2}\big(-x(1 - \Phi(x)) + \varphi(x)\big)$$

Le signe de $h'(x)$ est celui de $\psi(x) = \varphi(x) - x + x\Phi(x)$, dont la dérivée est

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - 1 + \Phi(x) + x\varphi(x) = \Phi(x) - 1 < 0$$

Avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(1 - \Phi(x)\big) = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$. Cela entraîne que ψ reste positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration de l'équivalent proposé.

Soit $x > 0$.

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{t}\,dt = \Big[-\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$$

On a : $0 < \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{x^2}\big[1 - \Phi(x)\big]$.

Donc, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt = o\big(1 - \Phi(x)\big)$.

Par suite, au voisinage de $+\infty$: $1 - \Phi(x) \sim \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Exercice 3.21.

On considère un entier n supérieur ou égal à 2 (susceptible de varier dans certaines questions).

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire successivement et sans remise toutes les boules en notant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, X_k le numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée. Tous les tirages sont équiprobables.

On dit qu'un tirage complet des n boules présente un pic au rang $k \in [\![1, n]\!]$ si, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $X_i \leqslant X_k$.

En particulier, tout tirage présente un pic au rang 1.

On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de pics apparus dans un tirage.

1. Calculer $P\big([S_n = n]\big)$ et $P\big([S_n = 1]\big)$.

2. L'entier k étant compris entre 1 et n, on considère la variable aléatoire T_k prenant la valeur 1 si le tirage présente un pic au rang k, la valeur 0 sinon.

   a) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de T_i.

   b) Calculer l'espérance de la variable S_n et en donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

3. On admet que, pour tout couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a : $P\big([T_i = 1] \cap [T_j = 1]\big) = \dfrac{1}{ij}$.

Soit (i, j) un couple d'entiers vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Les variables T_i et T_j sont-elles indépendantes ?

4. Calculer la variance de la variable S_n et en donner un équivalent quand n tend vers l'infini.

5. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\Big(\Big[\Big|\frac{S_n}{\ln n} - 1\Big| \geqslant \varepsilon\Big]\Big) = 0$.

Solution :

On considèrera le modèle $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, où Ω est l'ensemble des n–listes d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties de Ω, et P la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

1. $\star$ L'événement $(S_n = n)$ est réalisé si et seulement si les n numéros sont tirés dans l'ordre croissant ; donc $P(S_n = n) = \dfrac{1}{n!}$.

$\star$ L'événement $(S_n = 1)$ est réalisé si et seulement si le seul pic du tirage est obtenu au rang 1, ce qui est réalisé si et seulement si n est le premier numéro tiré ; ainsi $(S_n = 1) = (X_1 = n)$ et $P(S_n = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

2. a) Notons d'abord que T_1 est presque sre, de valeur 1.

Soit $i \in [\![2, n]\!]$. La famille $(X_i = k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ formant un système complet d'événements, on a :

$$P(T_i = 1) = \sum_{k=1}^{n} P[(T_i = 1) \cap (X_i = k)].$$

Or la probabilité de tirer k au rang i et de tirer dans $[\![1, k-1]\!]$ entre les rangs 1 et $i-1$ est, après simplification, $\dfrac{\mathrm{A}_{k-1}^{i-1}}{\mathrm{A}_n^i}$. Donc :

$$P(T_i = 1) = \frac{1}{\mathrm{A}_n^i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{k-1}^{i-1} = \frac{1}{\mathrm{A}_n^i} \sum_{k=i}^{n} \mathrm{A}_{k-1}^{i-1} = \frac{(i-1)!}{i!\binom{n}{i}} \sum_{k=i}^{n} \binom{k-1}{i-1}$$
$$= \frac{(i-1)!}{i!\binom{n}{i}} \binom{n}{i} = \frac{1}{i}$$

[On peut aussi dire : on ne considère que les i premiers tirages, la probabilité que le plus grand numéro soit le $i^{\text{ème}}$ vaut, par raison de symétrie, $\frac{1}{i}$.]

On en déduit que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$.

b) Comme $S_n(\Omega) \subseteq [\![1, n]\!]$, S_n admet une espérance. Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, il vient, lorsque n tend vers l'infini :

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i} \sim \ln n$$

3. Soit (i, j) un couple d'entiers tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Alors

$$P[(T_i = 1) \cap (T_j = 1)] = \frac{1}{i.j} = P(T_i = 1)P(T_j = 1)$$

Les événements $(T_i = 1)$ et $(T_j = 1)$ sont indépendants. Il en va de même des événements $(T_i = 0)$ et $(T_j = 0)$, des événements $(T_i = 1)$ et $(T_j = 0)$, et des événements $(T_i = 0)$ et $(T_j = 1)$. Les variables aléatoires T_i et T_j sont donc indépendantes.

4. Il s'ensuit que : $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}\right)$.

La série $\sum \dfrac{1}{i^2}$ étant convergente, il vient $V(S_n) \sim \ln n$.

5. Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque n tend vers l'infini, $E(S_n)$ étant équivalent à $\ln n$, il existe $N \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\left|\frac{E(S_n)}{\ln n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $n \geqslant N$:

$$\left[\left|\frac{S_n}{\ln n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{S_n - E(S_n)}{\ln n}\right| \geqslant \varepsilon - \left|\frac{E(S_n)}{\ln n} - 1\right|\right] \subset \left[\left|\frac{S_n - E(S_n)}{\ln n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Cebishev, pour tout $n \geqslant N$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{\ln n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{4V(S_n)}{(\varepsilon \ln n)^2} \sim \frac{4}{\varepsilon^2 \ln n}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{\ln n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 3.22.

La sécurité routière fait une enquête sur le nombre d'accidents survenus par semaine sur un tronçon d'autoroute. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'accidents par semaine. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ inconnu.

On se propose d'évaluer le paramètre $e^{-\lambda} = P(X = 0)$.

On note les observations $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pendant n semaines. Les X_i sont supposées indépendantes et de même loi que X.

1. Soit Y_n le nombre de fois où l'on n'a pas observé d'accident dans la semaine d'observation, c'est-à-dire le nombre d'indices i tels que $X_i = 0$.

Montrer que $\dfrac{Y_n}{n}$ est un estimateur sans biais convergent de $e^{-\lambda}$.

Pourtant cet estimateur ne tient pas compte du fait que X suit une loi de Poisson et on peut donc espérer trouver un meilleur estimateur sans biais convergent.

2. a) Montrer que $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ est un estimateur sans biais convergent de λ.

b) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Quelle est la loi de S_n ?

Calculer l'espérance de $e^{-\overline{X}_n}$ à l'aide du théorème de transfert. Montrer que $e^{-\overline{X}_n}$ est un estimateur biaisé de $e^{-\lambda}$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} E(e^{-\overline{X}_n}) = e^{-\lambda}$.

On dit alors que $e^{-\overline{X}_n}$ est asymptotiquement sans biais.

c) Calculer la variance de $e^{-\overline{X}_n}$. En conclure que $e^{-\overline{X}_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais convergent de $e^{-\lambda}$.

Solution :

1. Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $p = P(X = 0) = e^{-\lambda}$.

Donc $E(Y_n) = n.\mathrm{e}^{-\lambda}$, $V(Y_n) = n.\mathrm{e}^{-\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$. Ainsi

$$E\Big(\frac{Y_n}{n}\Big) = \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad V\Big(\frac{Y_n}{n}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})}{n}$$

ce qui signifie que $\dfrac{Y_n}{n}$ est un estimateur sans biais convergent de $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

2. a) $\overline{X_n}$ est une fonction des variables aléatoires (X_i), et

$$E(\overline{X_n}) = \frac{nE(X_1)}{n} = \lambda, \quad V(\overline{X_n}) = \frac{nV(X_1)}{n^2} = \frac{\lambda}{n}$$

ce qui signifie que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais convergent de λ.

b) On sait (stabilité de la loi de Poisson) que S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$ et $\overline{X_n} = \dfrac{S_n}{n}$.

L'espérance $E(\mathrm{e}^{-\overline{X_n}})$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_k \mathrm{e}^{-k/n}P(S_n = k)$ converge.

Or $0 \leqslant \mathrm{e}^{-k/n}P(S_n = k) \leqslant \mathrm{e}^{-k/n}$, ce dernier terme étant le terme général d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1/n} < 1$. Ainsi ;

$$E(\mathrm{e}^{-\overline{X_n}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k/n}P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k/n}\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

$$= \mathrm{e}^{-n\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(n\lambda e^{-1/n})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda[1-\mathrm{e}^{-1/n}]}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $1-\mathrm{e}^{-1/n} \sim \dfrac{1}{n}$; donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\lambda(1-\mathrm{e}^{-1/n}) = \lambda \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda[1-\mathrm{e}^{-1/n}]} = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On conclut que $\mathrm{e}^{-\overline{X_n}}$ est asymptotiquement sans biais en tant qu'estimateur de $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

c) On sait que $V(\mathrm{e}^{-\overline{X_n}}) = E(\mathrm{e}^{-2\overline{X_n}}) - E^2(\mathrm{e}^{-\overline{X_n}})$. Or :

$$E(\mathrm{e}^{-2\overline{X_n}}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2k/n}\mathrm{e}^{-2n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda[1-\mathrm{e}^{-2/n}]}.$$

d'où :

$$V(\mathrm{e}^{-\overline{X_n}}) = \mathrm{e}^{-n\lambda[1-\mathrm{e}^{-2/n}]} - \mathrm{e}^{-2n\lambda[1-\mathrm{e}^{-1/n}]}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, alors $1-\mathrm{e}^{-2/n} \sim \dfrac{2}{n}$; donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\lambda(1-\mathrm{e}^{-2/n}) = 2\lambda \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n\lambda[1-\mathrm{e}^{-2/n}]} = \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\mathrm{e}^{-\overline{X_n}}) = 0$, ce qui signifie que $\mathrm{e}^{-\overline{X_n}}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais convergent de $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Exercice 3.23.

Un étudiant doit passer un examen sous forme de questionnaire à choix multiples (QCM). Le programme de l'examen comporte 100 sujets. Le QCM

ne comporte que 20 questions choisies au hasard parmi les sujets étudiés. Le candidat désirant optimiser son temps de révision se demande quelle proportion p de sujets il doit réviser pour que ses chances de réussite soient suffisantes. On suppose qu'il révise au moins 20 sujets.
Dans la correction du QCM, chaque réponse juste donne 1 point, une réponse fausse donne 0. Si le candidat a révisé une question, sa réponse est forcément juste. S'il ne connaît pas la question, il choisit une réponse au hasard parmi les quatre solutions proposées.
Soit p la proportion de sujets que l'étudiant a révisés. (On suppose que $100p$ est un entier). Soit N la note qu'il a obtenu à l'examen.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de sujets qui tombent à l'examen et que l'étudiant a étudiés et Y le nombre de réponses justes parmi celles qu'il donne au hasard.
1. Soit $(k, n) \in [\![0, 20]\!]^2$.
Donner, en fonction de p, la loi suivie par X ainsi que son espérance.
Préciser la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
En déduire la probabilité $P(N = n)$ en fonction de p (on ne cherchera pas à simplifier l'expression).

2. a) Donner l'espérance de la loi conditionnelle de Y, conditionnée par la réalisation de l'événement $[X = k]$. Cette espérance est notée $E(Y/[X = k])$.

b) Montrer que $E(Y) = \sum_{k=0}^{20} E(Y/[X = k])P([X = k])$. En déduire l'espérance de Y puis celle de N. Combien l'étudiant doit-il réviser de sujets pour que l'espérance de N soit égale à 14 ?

3. a) L'étudiant, consciencieux, décide de réviser 64 sujets. Dans la suite, l'unité de temps est l'heure. Le temps qu'il met pour réviser le sujet numéro k est une variable aléatoire notée T_k qui suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$. Les variables T_k sont mutuellement indépendantes. T est le temps total que doit passer l'étudiant pour effectuer ses révisions.
Préciser la loi de T, son espérance et sa variance.

b) Par quelle loi peut-on approcher la loi de T ?
Cet étudiant travaille 8 heures par jour. Combien de temps de révision doit-il prévoir pour avoir le temps de réviser les 64 sujets choisis avec une probabilité au moins égale à 0,84 ?
On rappelle que $\Phi(1) \simeq 0{,}8413$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Solution :

1. a) $\star$ Chaque question ne tombant qu'une seule fois, X suit la loi d'un tirage sans remise, c'est-à-dire une loi hypergéométrique. Donc X suit la loi $\mathcal{H}(100, 20, p)$ et $E(X) = 20p$.

$\star$ Si $[X = k]$ est réalisé, alors $20 - k$ fois, l'étudiant choisit une réponse au hasard avec la probabilité $1/4$ de succès. Ainsi Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 - k, 1/4)$.

Soit $n \in [\![0, 20]\!]$. La famille $([X = k])_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est un système complet d'événements.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \sum_{k=0}^{20} P(N = n/X = k)P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{20} \frac{\binom{100p}{k}\binom{100(1-p)}{20-k}}{\binom{100}{20}} \times \binom{20-k}{n-k} \big(\tfrac{1}{4}\big)^{n-k} \big(\tfrac{3}{4}\big)^{20-n} \end{aligned}$$

Bien entendu $P(N = n/X = k) = P(Y = n - k/X = k)$.

2. a) On a $E(Y/[X = k]) = \dfrac{20 - k}{4}$.

b) On a $Y(\Omega) = [\![0, 20]\!]$ et :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^{20} iP(Y = i) = \sum_{i=0}^{20} i\Big(\sum_{k=0}^{20} P(Y = i/X = k)P(X = k)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{20} P(X = k)\Big(\sum_{i=0}^{20} iP(Y = i/X = k)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{20} E(Y/[X = k])P(X = k) = \sum_{k=0}^{20} \big(5 - \tfrac{k}{4}\big)P(X = k) \\ &= 5\sum_{k=0}^{20} P(X = k) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{20} kP(X = k) = 5 - 5p. \end{aligned}$$

Comme $N = X + Y$, il vient $E(N) = E(X) + E(Y) = 20p + 5 - 5p = 5 + 15p$.

$E(N) = 14$ entraîne que $15p = 9$ soit $p = \dfrac{3}{5}$. L'étudiant doit réviser 60 sujets.

3. a) Les variables aléatoires T_k suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2) = \Gamma(2, 1)$. Par stabilité de la somme des lois Gamma indépendantes, T suit une loi $\Gamma(2, 64)$. Ainsi $E(T) = 128, V(T) = 256$.

b) Comme on peut considérer 64 comme un grand nombre, le théorème de la limite centrée permet de dire que la loi de $\dfrac{T/n - E(T_k)}{\sigma(T_k)/\sqrt{n}}$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Donc $\dfrac{T}{16} - 8$ suit quasiment la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Si Φ est sa fonction de répartition :

$$P(T \leqslant \alpha) \geqslant 0.84 \iff P\Big(\frac{T}{16} - 8 \leqslant \frac{\alpha}{16} - 8\Big) \geqslant 0.84$$

On choisit α tel que $\Phi\big(\frac{\alpha}{16} - 8\big) = 0.8413 = \Phi(1)$.

Par injectivité de Φ, on prend donc : $\alpha = 9 \times 16 = 144$.

En travaillant 8 heures par jour, l'étudiant devra prévoir 18 jours de révisions.

Exercice 3.24.

Soit a un nombre réel, $a \neq -1$.

1. a) On pose pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)^{n+1}}$

Déterminer en fonction de a la nature de la série $\sum\limits_n u_n$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définisse une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$.

c) Soit $K \in \mathbb{N}$ fixé. Pour quelle valeur de c (dépendant de a et K) la suite $(cu_n)_{n\geqslant K}$ définit–elle une distribution de probabilité ?

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de même loi définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad X_i(\Omega) = [\![K, +\infty[\![, \text{ et } \forall k \in X_i(\Omega), P(X_i = k) = c\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

où c a été défini dans la question précédente.

2. On suppose dans cette question que K est connu et on souhaite estimer a.

On note : $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

Déterminer en fonction de $\overline{X_n}$ un estimateur sans biais de a. Cet estimateur est–il convergent ?

3. On suppose maintenant que a est connu et on souhaite estimer K.

On note : $Y_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

Déterminer la loi de Y_n ; Y_n est–il un estimateur sans biais de K ?

Solution :

1. a) On peut écrire $u_n = \dfrac{1}{1+a}\Big(\dfrac{a}{1+a}\Big)^n$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\Big|\dfrac{a}{1+a}\Big| < 1$ soit, si et seulement si $a > -1/2$.

b) (u_n) définit une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$ si et seulement si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$, soit $a \geqslant 0$;
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$. Or, pour tout $a \geqslant 0$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+a}\Big(\dfrac{a}{1+a}\Big)^n = 1$.

En conclusion, (u_n) définit une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$ si et seulement si $a > 0$ (car $a = 0$ donne $u_0 = 1$ et $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$, ce qui ne définit pas une loi de probabilité **sur** $\mathbb{N}$).

c) Il suffit de calculer :

$$\sum_{n=K}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1+a}\sum_{n=K}^{+\infty}\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^n = \Big(\frac{a}{1+a}\Big)^K.$$

Comme $a > 0$, il suffit de prendre $c = \left(\frac{a+1}{a}\right)^K$ pour que la suite $(cu_n)_{n \geqslant K}$ définisse une distribution de probabilité sur $[\![K, +\infty[\![$.

2. Pour tout $k \in X_i(\Omega), P(X_i = k) = \dfrac{1}{1+a}\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^{k-K}$.
Ainsi $X_i' = X_i - (K-1)$ suit la loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{1+a}$.
Dès lors :

$$E(\overline{X_n}) = E(X_1) = K - 1 + E(X_1') = K + a$$

et $Z_n = \overline{X_n} - K$ est un estimateur sans biais de a. De plus

$$V(Z_n) = V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}V(X_1) = \frac{1}{n}V(X_1') = \frac{a(a+1)}{n}$$

entraîne que Z_n est un estimateur convergent de a.

3. Par indépendance des variables aléatoires (X_i), il vient, pour tout $k \geqslant K$

$$P(Y_n > k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > k)$$

Or

$$P(X_i > k) = \frac{1}{1+a}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\left(\frac{a}{1+a}\right)^{j-K} = \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k+1-K}$$

Donc $P(Y_n > k) = \left(\dfrac{a}{1+a}\right)^{n(k+1-K)}$, et pour tout $k \geqslant K$

$$P(Y_n = k) = \left(\frac{a}{1+a}\right)^{n(k-K)} - \left(\frac{a}{1+a}\right)^{n(k+1-K)}.$$

Clairement, $Y_n' = Y_n - (K-1)$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1 - \left(\dfrac{a}{1+a}\right)^n\right)$ et :

$$E(Y_n) = K - 1 + \frac{1}{1 - (\frac{a}{1+a})^n}$$

Y_n n'est pas un estimateur sans biais de K, mais un estimateur asymptotiquement sans biais de K, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 - (\frac{a}{1+a})^n} = 1$.

Exercice 3.25.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des entiers positifs. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^{n} iP(X = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Les nombres a et b sont des entiers naturels non nuls tels que $a \leqslant b$.
On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite infinie de tirages avec remise, en rajoutant dans l'urne a boules blanches supplémentaires après chaque tirage ayant donné une boule blanche.
On note, pour tout entier naturel n non nul, A_n l'événement « les n premiers tirages ont tous donné une boule blanche ».

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_{n+1}) = \frac{na+b}{na+2b}P(A_n)$$

puis,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(A_n) \leqslant \frac{b}{na+b}$$

2. Déterminer la probabilité de l'événement : $B =$ «la boule noire n'a jamais été tirée».
On note alors X la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage auquel est apparue la boule noire.
Comparer les événements $X > k$ et A_k.

3. Calculer $P(A_n)$.
Étudier l'existence et si elle existe donner la valeur de l'espérance de X, dans chacun des cas suivants :

a) $b = a$.
b) $b = 2a$.

On pourra dans ce dernier cas montrer l'existence de deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}.$$

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} iP(X=i) &= \sum_{i=0}^{n} i\big(P(X>i-1) - P(X>i)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} iP(X>i-1) - \sum_{i=0}^{n} iP(X>i)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)P(X>i) - \sum_{i=0}^{n} iP(X>i)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P(X>i) - nP(X>n)\end{aligned}$$

2. On peut écrire : $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) = \dfrac{na+b}{na+2b}P(A_n)$.

En effet, «les n premiers tirages ont donné une boule blanche» correspond à une remise de a boules blanches après chaque tirage.

Montrons par récurrence sur n, que pour tout $n \geqslant 1$ $P(A_n) \leqslant \dfrac{b}{na+b}$.

C'est vérifié pour $P(A_1) = \dfrac{b}{2b} \leqslant \dfrac{b}{a+b}$, car $b \geqslant a$.

Supposons que la relation est vérifié pour n. Alors, car $b \geqslant a$,

$$P(A_{n+1}) = \frac{na+b}{na+2b}P(A_n) \leqslant \frac{na+b}{na+2b}\times\frac{b}{na+b} = \frac{b}{na+2b} \leqslant \frac{b}{(n+1)a+b}.$$

3. L'événement $B =$ « la boule noire n'a jamais été tirée » correspond à

$$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Or la suite $(A_n)_n$ est une suite décroissante. Donc

$$P(B) = P\big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} P(A_n)\big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0.$$

car $0 \leqslant P(A_n) \leqslant \dfrac{b}{na+b}$

La variable aléatoire X est ainsi définie sur $\overline{B}$ de probabilité 1.

On a $A_k = (X > k)$. En effet, si le rang d'apparition de la première boule noire est strictement supérieur à k, cela signifie que les k premiers tirages ont donné une boule blanche.

Réciproquement, si l'on n'a tiré que des boules blanches lors des k premiers tirages, le rang d'apparition de la première boule noire sera supérieur ou égal à $k+1$.

4. On a évidemment : $P(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+ka}{2b+ka}$.

a) Si $a = b$, $P(A_n) = \dfrac{1}{n+1}$, et d'après la première question, $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum P(X > k) = \sum P(A_k)$ converge. Ici $E(X)$ n'existe pas.

b) si $b = 2a$, il vient $P(A_n) = \dfrac{6}{(n+2)(n+3)}$. L'espérance $E(X)$ existe et, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nP(A_n) = 0$, il vient :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

On peut écrire : $\dfrac{6}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{6}{n+2} - \dfrac{6}{n+3}$, donc :

$$\sum_{n=0}^{N} P(X > n) = 6\Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+3}\Big) = 6\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+3}\Big).$$

Finalement $E(X) = 3$.

Exercice 3.26.

Pour $m \geqslant 1$, on considère une série statistique $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ à deux variables. La première variable est notée Z, la seconde T et on écrit $M_i(z_i, t_i)$ pour tout i de $\{1, \ldots, m\}$.

Pour les applications numériques on prend $\overline{Z} = \overline{T} = 10$, $V(Z) = V(T) = 9$ et $\mathrm{cov}(Z, T) = 4$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

On identifie les éléments de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. a) Diagonaliser A dans une base orthonormale (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire usuel.
Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tPAP$ soit diagonale.

b) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = (\,x \quad y\,) \times A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Montrer que l'application $(x, y) \mapsto \dfrac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ admet un minimum et un maximum sur $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, extremums que l'on déterminera (on pourra travailler dans la base (e_1, e_2)).

c) En déduire les (α, β) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ qui donnent une série statistique $\alpha\, Z + \beta\, T$ de variance maximale ; même question pour $\alpha Z + \beta T$ de variance minimale. Déterminer les extremums.

d) Si l'on appelle $u_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ un couple qui donne une série statistique de variance minimale, déterminer une équation de la droite passant par le point moyen de la série et dirigée par ce vecteur.
Montrer que cette droite est celle qui réalise le minimum de la somme des carrés des distances des points M_i à une droite Δ passant par le point moyen $\Omega(\overline{Z}, \overline{T})$, d'équation $\alpha\, x + \beta\, y + c = 0$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique *(on pourra utiliser la formule $d(M_i, \Delta) = \dfrac{|\alpha\, z_i + \beta\, t_i + c|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ qui donne la distance d'un point M_i à la droite Δ d'équation $\alpha\, x + \beta\, y + c = 0$).*
Qu'en est-il si l'on n'impose plus à la droite de passer par Ω ?

2. Déterminer les (α, β) tels que $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\alpha + \beta = 1$ pour lesquels la série statistique $\alpha Z + \beta T$ admet une variance maximale que l'on déterminera ; même question pour $\alpha Z + \beta T$ de variance minimale.

Solution :

1. a) La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. La méthode du pivot permet de déterminer les valeurs propres de A, qui sont 5 et 13. Les sous-espaces propres associés sont

$$E_{13} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad E_5 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, il vient :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ avec } {}^tP = P^{-1}.$$

b) Pour tout $u = (x, y)$ de E, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On peut alors écrire $X = PX'$, avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et

$$^tXAX = {}^t({}^tPAP)X = {}^tX'DX' = 13x'^2 + 5y'2.$$

La matrice P étant orthogonale, on a $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, et donc

$$f(u) = \frac{13x'^2 + 5y'2}{x'^2 + y'^2} \text{ et } 5 \leqslant f(u) \leqslant 13.$$

c) On sait que

$$V(\alpha Z + \beta T) = \alpha^2 V(Z) + 2\alpha\beta \operatorname{Cov}(Z, T) + \beta^2 V(T) = f(\alpha, \beta).$$

Pour $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, on obtient deux séries statistiques $U_1 = \dfrac{Z + T}{\sqrt{2}}$ et $-U_1$ de variance maximale 13 et deux séries statistiques $U_2 = \dfrac{Z - T}{\sqrt{2}}$ et $-U_2$ de variance minimale 5 .

d) On prend $u_1 = (\alpha_1, \beta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ et $M(x, y) \in \Delta = \left(\Omega \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ \overline{T} \end{pmatrix}, u_1\right)$ si et seulement s'il existe λ réel tel que $(x - \overline{Z}, y - \overline{T}) = \lambda u_1$, c'est-à-dire si et seulement si $x - \overline{Z} = -y - \overline{T}$ ou $x + y + (\overline{T} - \overline{Z}) = 0$, soit $x + y = 0$.

Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha\overline{Z} + \beta\overline{T} = -c$, la somme considérée est :

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\alpha z_i + \beta t_i + c)^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{[\alpha(z_i - \overline{Z}) + \beta(t_i - \overline{T})]^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\big(\alpha^2 V(Z) + 2\alpha\beta \operatorname{cov}(Z, T) + \beta^2 V(T)\big) = \frac{f(\alpha, \beta)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

D'après ce qui précède, le minimum est atteint pour la droite indiquée.

Si l'on n'impose plus à la droite Δ de passer par Ω, on rajoute à $g(\alpha, \beta)$ le terme $m\,\dfrac{(\alpha\overline{Z} + \beta\overline{T} + c)^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ qui est positif ; la droite déterminée précédemment est donc la meilleure.

2. Avec $\alpha + \beta = 1$, on obtient :

$$V(\alpha Z + \beta T) = f(\alpha, 1 - \alpha) = \alpha^2 V(Z) + 2\alpha(1 - \alpha) \operatorname{Cov}(Z, T) + (1 - \alpha)^2 V(T).$$

ou : $h(\alpha) = 10\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 10\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{13}{2}$.

Le maximum est atteint pour $\alpha \in \{0, 1\}$ et vaut 9, le minimum est atteint pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et vaut $\frac{13}{2}$.

Exercice 3.27.

Un groupe de n naufragés, numérotés de 1 à n, a trouvé refuge sur une île déserte. Ils décident d'organiser des tours de garde : chaque jour et à tour de rôle, l'un d'entre eux est chargé de scruter l'horizon pour tenter d'apercevoir un bateau salvateur.

Le naufragé numéro 1 prend le premier tour, ... et au bout de n jours le cycle recommence.

L'unité de temps est le jour, l'histoire commence à l'instant 0 et on suppose que le temps d'attente T du premier navire visible à l'horizon suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On note N le jour où le vigile aperçoit un navire. Reconnaître la loi de N et donner son espérance et sa variance.

(Le jour 1 commence à l'instant 0 et se termine à l'instant 1 ...)

2 Soit X le numéro du naufragé qui aperçoit les secours. Déterminer la loi de X.

3. a) Montrer que T est une variable *sans mémoire*, c'est–à–dire que T vérifie
$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ P(X > x+t/T > x) = P(T > t)$$

b) Soit Y la variable aléatoire égale à l'heure où les naufragés aperçoivent les secours (on exprime cette heure en fraction de jour : minuit = 0, midi =1/2, 18h= 3/4, ...).

Déterminer la fonction de répartition de Y et la loi de Y.

On estime à 6 heures le temps nécessaire à l'embarquement des naufragés.

Quelle est la probabilités que les naufragés soient embarqués le jour même où ils aperçoivent les secours ?

Solution :

1. a) On a immédiatement $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geqslant 1$,
$$P(N = k) = P(k-1 < T \leqslant k) = \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)} - \mathrm{e}^{-\lambda k} = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})(\mathrm{e}^{-\lambda})^{k-1}.$$
Ainsi N suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $\mu = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$. On en déduit :
$$E(N) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}, \quad V(N) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^2}.$$

b) On a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Le $k^{\text{ème}}$ naufragé est de garde les jours k, $k+n$, $k+2n, , \dots, k+pn, \dots$. Ainsi
$$(X = k) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (N = k + in)$$
et
$$P(X = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(N = k+in) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(k-1+in)}$$
$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-n\lambda}} \mathrm{e}^{-(k-1)\lambda}.$$

Posons $q = \mathrm{e}^{-\lambda} \in]0,1[$. Comme, pour tout $p \geqslant 0$ $\dfrac{d}{dq}\big(\sum\limits_{k=0}^{p} q^k\big) = \sum\limits_{k=1}^{p} kq^{k-1}$, on obtient aisément :

$$E(X) = \frac{1 + n.\mathrm{e}^{-(n+1)\lambda} - (n+1).\mathrm{e}^{-n\lambda}}{(1-\mathrm{e}^{-\lambda})(1-\mathrm{e}^{-n\lambda})}.$$

2. a) On vérifie que T est sans mémoire (c'est d'ailleurs une caractéristique de la loi exponentielle).

b) On a $Y(\Omega) = [0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$:

$$(Y \leqslant t) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (k < T \leqslant k+t).$$

Donc

$$P(Y \leqslant t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k < T \leqslant t+k) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

Une densité de Y est ainsi :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,1] \\ \dfrac{\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

La probabilité que les naufragés embarquent le jour même où ils aperçoivent les secours est :

$$P(T < 0.75) = \frac{1-\mathrm{e}^{-3\lambda t/4}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

Exercice 3.28.

1. a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Déterminer une densité de X^2.
Montrer que la loi suivie par X^2 est une loi Gamma dont on précisera les paramètres.

b) Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$.
Préciser la loi suivie par Y_n, son espérance et sa variance.
On dit que Y_n suit une loi du χ^2 à n degrés de liberté.

2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une projection orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. Un point M, extrémité d'un vecteur V, se déplace de façon aléatoire dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique, la norme associée

étant notée $||.||$, de façon que ses coordonnées X_1, X_2 et X_3 suivent des lois normales indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Quelle est la loi de $||V||^2$?

b) Soit P le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. On note D la variable aléatoire égale au minimum de la distance de M au plan P, c'est-à-dire $D = \min\limits_{V' \in P} ||V - V'||$.
Déterminer une densité de la variable aléatoire D.

Quelle est « en moyenne » la distance de ce point au plan ?

Solution :

1. a) Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors $X^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1.$$

Une densité de X^2 est donnée par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} \mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi X^2 suit la loi $\Gamma(2, 1/2)$.

b) Par stabilité de la somme de lois gamma indépendantes, Y_n suit la loi $\Gamma(2, n/2)$ et

$$E(Y_n) = n, V(Y_n) = 2n.$$

2. On montre que $A^2 = A$, ce qui prouve que A est la matrice d'une projection. On trouve :

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im} A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}.$$

Cela montre que $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont orthogonaux, donc que A est la matrice d'une projection orthogonale.

3. a) On a $||V||^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$. Donc $||V||^2$ suit la loi du χ^2 à 3 degrés de liberté, *i.e.* la loi $\Gamma(2, 3/2)$.

b) $D = ||V - V'||$, où $V' = f(V)$. La matrice associée à f étant A, il vient :

$$V' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2X_1 - X_2 - X_3 \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 \\ -X_1 - X_2 + 2X_3 \end{pmatrix}$$

et

$$V - V' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 \end{pmatrix} \implies ||V - V'||^2 = \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + X_3)^2.$$

Par stabilité des lois normales indépendantes, $X_1+X_2+X_3$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sqrt{3})$; donc $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sqrt{3}/3)$.

Comme $D=\frac{1}{3}|X_1+X_2+X_3|$, on a $D(\Omega)=\mathbb{R}^+$ et pour tout $x\geqslant 0$:

$$P(D\leqslant x)=P(-x\leqslant \frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)\leqslant x)$$

Une densité de D est donc, en revenant à la loi $\mathcal{N}(0,\sqrt{3}/3)$:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-3x^2/2} & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

L'espérance de D se calcule aisément :

$$E(D)=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x.\mathrm{e}^{-3x^2/2}\,dx=\sqrt{\frac{2}{3\pi}}.$$

Exercice 3.29.

On identifie $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique au plan de la géométrie usuelle. Soit A une partie de $[0,1]\times[0,1]$ d'aire a.
On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, la probabilité de l'événement $[(X,Y)\in A]$ est égale à a.
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même. On rappelle que l'aire située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la probabilité de l'événement $[Y\leqslant f(X)]$?

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on appelle Z_n la variable de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $[Y_n\leqslant f(X_n)]$ est réalisé, 0 sinon.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $S_n=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$.
Quelle est la loi de S_n ? Quelle est la limite en loi de la variable $S_n^*=\dfrac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$?
Dans la suite de l'exercice, on suppose que n est assez grand pour identifier la loi de S_n^* à cette loi limite. Quelle loi assigne-t-on alors à $\dfrac{S_n}{n}$?

3. Soit Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que l'on a : $\Phi(1{,}96)\simeq 0{,}975$. Déterminer $P(-1{,}96\leqslant S_n^*\leqslant 1{,}96)$. En déduire que :

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-\int_0^1 f(t)dt\Big|\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\geqslant 0{,}95$$

4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(\frac{-x^2u^2}{2}\big)du$.

On pourrait vérifier que pour tout $0 < x < \sqrt{2\pi}$, la restriction de la fonction $u \mapsto \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(\frac{-x^2u^2}{2}\big)$ à l'intervalle $[0,1]$ est à valeurs dans $[0,1]$.

On rappelle qu'en Pascal un appel à la fonction `random` produit un réel de $[0,1[$ suivant la loi uniforme sur cet intervalle et que les appels successifs à cette fonction sont indépendants.

On considère la fonction définie en Pascal de la manière suivante.

```
function PHI(X :real) :real ;
var U , Y :real ; k, S :integer ;
Begin
S := 0 ;
For k := 1 to 10000 do
Begin T :random ; Y :=random ; if Y<X* exp(-X*X*T*T/2)/sqrt(2*pi)
    then S := S+1 End ;
PHI : = 0.5 + S/10000
end ;
```

Quel résultat fournit un appel à la fonction PHI pour $0 < X < \sqrt{2\pi}$?

Solution :

1. D'après les remarques de l'énoncé, l'événement $[Y \leqslant f(X)]$ représente l'aire située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $X = 0$ et $X = 1$. Donc

$$P(Y \leqslant f(X)) = \int_0^1 f(t)dt$$

2. La variable aléatoire S_n est la somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, donc S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, avec $p = \int_0^1 f(t)\,dt$.

D'après le théorème de la limite centrée, la suite $(S_n^*)_n$ converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour n assez grand, on peut supposer que $\frac{S_n}{n}$ suit la loi $\mathcal{N}\big(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\big)$.

3. On sait que $P(-1.96 \leqslant S_n^* \leqslant 1.96) = 0.95$. En posant $M_n = \frac{S_n}{n}$, on en déduit que

$$P(|M_n - E(M_n)| \leqslant 1.96\sqrt{M_n}) = 0.95.$$

Comme $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, on a $\sqrt{M_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4n}}$ et $1.96\sqrt{M_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - \int_0^1 f(t)\,dt\Big|\Big) \geqslant 0.95.$$

4. Le changement de variable affine $t = xu$ donne :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}dt.$$

Donc

$$\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \Phi(x).$$

La fonction $h : u \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2u^2/2}$ restreinte à l'intervalle $[0,1]$ y est positive, est décroissante et $h(0) = \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}} < 1$, $h(1) < 1$. Elle est donc à valeurs dans $[0,1]$.

D'après ce qui précède, l'appel à `PHI(X)` fournit avec une probabilité supérieure à 0.95, une valeur approchée à moins de 1% de $\Phi(X)$.

Exercice 3.30.

On dispose de n pièces non équilibrées ($n \geqslant 2$). Chaque pièce peut amener Pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On lance les n pièces de monnaie en l'air toutes ensemble.

1. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces ayant amené Pile. Déterminer la loi de X.

2. Justine a les yeux bandés et n'a pas assisté au lancer. Elle choisit au hasard k pièces parmi les n, k étant un nombre fixé *a priori* avec $0 < k < n$. Ele gagne alors parmi les k pièces celles qui présentent Pile. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre de pièces gagnées par Justine.

3. On soupçonne Justine d'avoir triché en ayant essayé de deviner au toucher les pièces ayant amené Pile. On lui demande donc de relancer les k pièces qu'elle a choisies ; elle gagnera celles, parmi les k, qui amèneront Pile.
Soit Z la variable aléatoire représentant ce nouveau gain.

a) Déterminer la loi de Z. Quel commentaire peut–on faire ?

b) Soit W la variable aléatoire représentant le nombre de Pile parmi les $n - k$ pièces non choisies par Justine.
Déterminer la loi de W.

Solution :

1. On lance les n pièces ensemble. Chaque pièce a la probabilité p d'amener Pile, X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

2. On a $Y(\Omega) = [\![0,k]\!]$. En utilisant le système complet d'événements $(X = i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, on peut écrire, pour tout $j \in [\![0,k]\!]$:

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{n} P(Y = j/X = i)P(X = i).$$

Or si l'événement $(Y = j)$ est réalisé, on a $j \leqslant i$ et $k-j$ Faces ont été choisis, donc il y a eu $n-(k-j)$ Pile au maximum. Ainsi :

$$P(Y = j) = \sum_{i=j}^{n-k+j} P(Y = j/X = i)P(X = i).$$

Or $P(Y = j/X = i) = \dfrac{\binom{i}{j}\binom{n-i}{k-j}}{\binom{n}{k}}$ et $P(X = i) = \binom{n}{i}p^i q^{n-i}$. Donc :

$$P(Y = j) = \sum_{i=j}^{n-k+j} \frac{\binom{i}{j}\binom{n-i}{k-j}}{\binom{n}{k}} \times \binom{n}{i}p^i q^{n-i}$$

$$P(Y = j) = \binom{k}{j}p^j q^{k-j} \sum_{i=j}^{n-k+j} \binom{n-k}{i-j} p^{i-j} q^{n-k-(i-j)} = \binom{k}{j}p^j q^{k-j}$$

Ainsi Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k,p)$.

3. a) La variable aléatoire Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k,p)$ (comme somme de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre). Ainsi Y et Z suivent la même loi ; ceci n'est pas étonnant car il n'y a aucune différence entre d'une part, choisir k pièces après les avoir lancées, et sélectionner k pièces parmi n et les lancer pour observer le nombre de Piles apparus, d'autre part.

b) Par le même raisonnement W suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-k,p)$.

Exercice 3.31.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

On note arcsin sa bijection réciproque.

Montrer que la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

2. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale est convergente et la calculer (On pourra effectuer le changement de variable $u = 1-2x$).

3. a) Montrer que la fonction f donnée par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

définit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit la loi Beta$(1/2, 1/2)$ ou loi de l'arcsinus.

b) Déterminer la fonction de répartition de X, ainsi que son espérance (pour le calcul de l'espérance, on pourra poser $x = \sin^2(\theta)$).

4. L'univers est l'ensemble des années écoulées depuis l'invention du thermomètre ! Soit X la variable aléatoire associant à chaque année la température relevée à Paris le 1er janvier à midi.
On estime que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X+16}{32}$ suit la loi de l'arcsinus.
Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
Calculer les probabilités suivantes :

$$P\left([-16 < X < -8] \cup [8 < X < 16]\right) \text{ et } P(-8 < X < 8).$$

(On donne $\arcsin(1/2) = \pi/6$ car $\sin(\pi/6) = 1/2$.)
Avez-vous un commentaire à faire ?

Solution :

1. La fonction $g : x \mapsto \sin x$ est continue et strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Elle réalise une bijection entre ces deux intervalles.
On a $g'(x) = \cos x$; donc g^{-1} est dérivable sauf en $g(-\pi/2) = -1$ et $g(\pi/2) = 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. La fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0, 1[$.
Au voisinage de 0, $h(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dont l'intégrale converge (critère de Riemann).
Au voisinage de 1, $h(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ dont l'intégrale converge (critère de Riemann).
Ainsi I existe. Le changement de variable proposé est affine. On obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\pi}\big[\arcsin u\big]_{-1}^1 = 1$$

3. a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, elle y est continue, sauf en 0 et en 1 et son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1. Ainsi f est une densité de probabilité.

b) Si $0 \leqslant x < 1$, en posant le changement de variable affine $u = 1 - 2t$, il vient :

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}} = \frac{1}{\pi}\int_{1-2x}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin(1-2x).$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x(1-x)}} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ est continue sur $[0, 1[$ et équivalente au voisinage de 1 à $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. L'espérance de X existe donc, et en posant le changement de variable $x = \sin^2\theta$ de classe C^1, on obtient :

$$E(X) = \int_0^1 \frac{x}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}$$

Notons que ce résultat était évident par symétrie par rapport à $\frac{1}{2}$ de f.

4. On a $X(\Omega) =]-16, 16[$ et :

$$P(-16 < X < -8) = P(0 < \frac{X+16}{32} < \frac{1}{4}) = F\big(\tfrac{1}{4}\big) - F(0) = \frac{1}{3}$$

car $F\big(\frac{1}{4}\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Par symétrie $P(8 < X < 16) = \dfrac{1}{3}$; donc

$$P[(-16 < X < -8) \cup (8 < X < 16)] = \frac{2}{3}, \quad \text{et} \quad P(-8 < X < 8) = \frac{1}{3}$$

Il semble qu'il y ait plus de températures «extrêmes» que de températures «normales».

Exercice 3.32.

On considère une expérience aléatoire modélisée par le programme suivant

```
Program exoescp ;
Uses crt ;
Var  x,i,n,a :Integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(n) ;
x := 0 ;
For i := 1 To n Do
 Begin
   If x=0 Then x := -1+Random(2)*2 Else x := -1+Random(3) ;
   Write(x,' ')
 End ;
Readln
End.
```

1. Décrire l'expérience ainsi modélisée.

On rappelle que `Random(n)` *(n est une variable du type* `Integer`*) retourne au hasard une des n valeurs comprises entre* 0 *et* $n-1$.

2. Pour tout entier $k \leq n$, on note X_k la variable aléatoire «k-ème nombre affiché». Déterminer $X_k(\Omega)$ puis la loi de X_{k+1} conditionnée par celle de X_k.

3. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_k. Pouvait-on prévoir la valeur de l'espérance ?

4. Modifier le programme précédent pour qu'il donne la première valeur (non nulle) de k pour laquelle $X_k = 0$. On note Y cette valeur.

5. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y.

Solution :

1. Il s'agit d'une marche aléatoire sur un axe marqué de 3 points, -1, 0 et 1. Le mobile x part de 0. Quand il est en 0, il va avec la même probabilité $1/2$ en l'un des 2 autres points 1 ou -1. Lorsqu'il est en l'un des autres points, il va avec la même probabilité $1/3$ en l'un des 3 points possibles 1, -1 ou 0.

2. X_k est l'affixe du mobile à l'instant k. On a $X_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.
La loi conditionnelle de X_{k+1} sachant X_k est donnée par le tableau suivant :

$X_k \backslash X_{k+1}$	-1	0	1
-1	$1/3$	$1/3$	$1/3$
0	$1/2$	0	$1/2$
1	$1/3$	$1/3$	$1/3$

3. En notant a_k, b_k et c_k respectivement $P(X_k = -1)$, $P(X_k = 0)$ et $P(X_k = 1)$, on a d'après la formule des probabilités totales et le tableau précédent :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \qquad\quad + \frac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

Comme on pouvait s'y attendre $a_{n+1} = c_{n+1}$ (-1 et 1 jouant des rôles symétriques)

On a aussi $a_n = c_n$ et $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n-1}$.

Cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 a pour équation caractéristique $3x^2 - 2x - 1 = 0$, de racines 1 et $-1/3$, ce qui donne : il existe λ, μ tels que

$$a_n = \lambda\big(-\frac{1}{3}\big)^n + \mu$$

En tenant compte des conditions initiales (x part de 0, donc $a_0 = c_0 = 0, b_0 = 1$), il vient

$$a_n = \frac{3}{8}\Big(\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + 1\Big)$$

On obtient ainsi la loi demandée :

$$P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{3}{8}(1 - (-\frac{1}{3})^n), P(X_n = 0) = \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^{n-1})$$

On obtient bien entendu $E(X_n) = 0$, ce qui est normal vu la symétrie du problème, et

$$V(X_n) = E(X_n^2) = \frac{3}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)$$

4. On peut par exemple écrire le programme suivant :

```
Program exoescp03 ;
```

```
Uses crt ;
Var x,y,a : Integer ;
Begin
Randomize ; Clrscr ;
x := 0 ; y := 0 ; a := 0 ;
Repeat
y := y+1 ;
If x=0 Then Begin a := a+1 ;
x := -1+Random(2)*2
End
      Else x :=-1+Random(3) ;
Until(a=2) ;
Writeln(' y = ',y) ; Readln ;
End.
```

5. $Y-1$ suit la loi géométrique de paramètre $1/3$ (revenir en 0 à partir de 1 ou -1)

On a donc $E(Y)=3+1=4$ et $V(Y)=\dfrac{1-1/3}{(1/3)^2}=6$.

Exercice 3.33.

Soit X une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $a>0$, $X_a=\lfloor \dfrac{X}{a} \rfloor$ ($\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière) et on suppose que X_a suit une loi géométrique, au sens où il existe $q(a)\in]0,1[$ tel que :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad P(X_a=k)=(1-q(a))(q(a))^k$$

On pose, pour $x\in\mathbb{R}$ et $a>0$ fixé, $G(x)=1-F(ax)$.

1. Exprimer $P(X_a=k)$ à l'aide de G.

2. En déduire que pour tout $a>0$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$F(ak)=1-(q(a))^k$$

3. Soient $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$; exprimer $q(\frac{m}{n})$ en fonction de $q(1)$, m et n. En déduire $q(a)$ en supposant connu le résultat suivant :

deux fonctions continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ qui concident sur les nombres rationnels de I sont égales sur I.

4. Quelle est la loi suivie par X ?

5. Étudier la convergence en loi de $Y_a=aX_a$ lorsque $a\to 0$.

Solution :

1. On a :

$P(X_a = k) = P(k \leqslant \dfrac{X}{a} < k+1) = F(a(k+1)) - F(ak) = G(k) - G(k+1).$

2. On a donc, pour tout $k \geqslant 1$, $G(k) - G(k+1) = (q(a))^k - (q(a))^{k+1}$; en sommant sur les j de 1 à k, on obtient $G(k) = (q(a))^k - 1 + G(0) = (q(a))^k$ puisque F est continue et $X \geqslant 0$. Donc, en posant $H(x) = 1 - F(x)$

$$\forall\, a > 0, \forall\, k \in \mathbb{N}, H(ak) = 1 - F(ak) = (q(a))^k$$

3. De $H(ak) = (q(a))^k$, on tire $H(a) = q(a)$ $(k = 1)$ donc $q(ak) = (q(a))^k$ pour tout $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$.
Il en résulte que pour k entier, $q(k) = (q(1))^k$ puis

$$q(m) = q\big(\frac{m}{n}n\big) = (q(\frac{m}{n}))^n = (q(1))^m, \text{ donc } q(\frac{m}{n}) = (q(1))^{\frac{m}{n}}.$$

Par le résultat admis, on prolonge la formule précédente par continuité à la demi-droite réelle positive. En posant $q(1) = \exp(-\lambda)$ avec $\lambda > 0$, on a :

$$q(a) = \exp(-\lambda a)$$

4. On en déduit immédiatement que X suit la loi exponentielle de paramètre λ et on vérifie que la réciproque est vraie.

5. On peut écrire :

$$\begin{aligned} P(Y_a > t) &= P(aX_a > t) = P(X_a > \frac{t}{a}) \\ &= \sum_{n=n_0(a)}^{+\infty} (1 - q(a))(q(a))^n = (q(a))^{n_0(a)}. \end{aligned}$$

où $n_0(a) = \inf\{n \in \mathbb{N} \ / \ n > \dfrac{t}{a}\} = \lfloor \dfrac{t}{a} \rfloor + 1$. Donc, lorsque a tend vers 0 :

$$P(Y_a > t) = \exp\big(-\lambda a(\lfloor \frac{t}{a} \rfloor + 1)\big) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \exp(-\lambda t).$$

Ainsi la fonction de répartition F_a de la variable aléatoire Y_a converge, point par point, vers F lorsque a tend vers 0 (*i.e.* Y_a converge en loi vers X).

Exercice 3.34.

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et b un nombre réel strictement positif.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \dfrac{b^i\, \mathrm{e}^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Soit Z la variable aléatoire $Z = X - Y$. Déterminer sa loi.

5. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \frac{b^i \,\mathrm{e}^{-b}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} = \frac{b^i \,\mathrm{e}^{-b}}{i!}$$

Ainsi X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(b)$. On sait qu'alors $E(X) = V(X) = b$.

2. Recommençons pour la loi de Y. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $j = \mathbb{N}$:

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \frac{a^j \,\mathrm{e}^{-b} b^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{(b(1-a))^{i-j}}{(i-j)!}$$

$$= \frac{a^j \,\mathrm{e}^{-b} b^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(b(1-a))^{i}}{i!} = \frac{(ab)^j}{j!} \,\mathrm{e}^{-ab}.$$

Ainsi Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(ab)$.

3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car, par exemple :

$$P(X = 0 \cap Y = 1) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 1).$$

4. On a de nouveau $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Z = k) = P\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} [(X = j + k) \cap (Y = j)]\Big)$$

$$= \frac{b^k (1-a)^k \,\mathrm{e}^{-b}}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(ab)^j}{j!} = \frac{(b(1-a))^k}{k!} \,\mathrm{e}^{-b(1-a)}$$

Ainsi Z suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(b(1-a))$.

5. Les variables aléatoires Z et Y sont indépendantes car, pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$:

$$P(Y = j \cap Z = k) = P(Y = j \cap X = j + k) = \frac{b^{j+k} \,\mathrm{e}^{-b} a^j (1-a)^k}{j!k!}$$

et

$$P(Y = j)P(Z = k) = \frac{(ab)^j}{j!} \,\mathrm{e}^{-ab} \times \frac{(b(1-a))^k}{k!} \,\mathrm{e}^{-b(1-a)} = \frac{b^{j+k} \mathrm{e}^{-b} a^j (1-a)^k}{j!k!}$$

Exercice 3.35.

X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$.

1. a) Déterminer la loi de Y. On note $LN(m, \sigma)$ cette loi.

   b) Calculer l'espérance de Y.

On pourra admettre que $V(Y) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)$.

2. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $LN(m_1, \sigma_1)$ et $LN(m_2, \sigma_2)$.

Quelle est la loi de $Z = Y_1 Y_2$? son espérance ? sa variance ?

3. Quelle est la loi du produit de n variables indépendantes suivant la loi $LN(m, \sigma)$?

4. On pose $T = \dfrac{Y - \mathrm{e}^m}{\sigma.\mathrm{e}^m}$.

a) Calculer $E(T)$ et $V(T)$ et étudier leur limite lorsque σ tend vers 0.

b) Déterminer une densité g_σ de T qui soit continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. a) On a $Y(\Omega) =]0, +\infty[$, et pour tout $y > 0$:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(\mathrm{e}^X \leqslant y) = P(X \leqslant \ln y) = F_X(\ln y)$$

Par dérivation, une densité de Y est alors définie par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Par le théorème de transfert, il vient :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{m+\sigma^2/2}\,dx = \mathrm{e}^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

De même :

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m-2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{2m+2\sigma^2}\,dx = \mathrm{e}^{2m+2\sigma^2}$$

et

$$V(Y) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1).$$

2. On a $Z(\Omega) =]0, +\infty[$, et $\ln Z = \ln Y_1 + \ln Y_2$.

On sait que $\ln Y_1$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, et que $\ln Y_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$.

Comme Y_1 et Y_2 sont indépendantes, $\ln Y_1$ et $\ln Y_2$ le sont également et Z suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Par la question précédente Z suit la loi $LN(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$, et :

$$E(Z) = \mathrm{e}^{m_1+m_2+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}, V(Z) = \mathrm{e}^{2(m_1+m_2)+\sigma_1^2+\sigma_2^2}(\mathrm{e}^{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 1)$$

3. Une récurrence élémentaire sur n montre que le produit de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $LN(m, \sigma)$ suit la loi $LN(nm, \sigma\sqrt{n})$.

4. a) Par propriétés de l'espérance et de la variance

$E(T)=\dfrac{1}{\sigma\,\mathrm{e}^m}(E(Y)-\mathrm{e}^m)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sigma^2/2}-1}{\sigma}, V(T)=\dfrac{1}{\sigma^2\,\mathrm{e}^{2m}}V(Y)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)}{\sigma^2}$

Lorsque σ tend vers 0, on a $E(T)\sim\dfrac{\sigma}{2}$ et $\lim\limits_{\sigma\to 0}E(T)=0$; de même $\lim\limits_{\sigma\to 0}V(T)=1$.

b) On peut écrire :

$$T=\frac{Y-\mathrm{e}^m}{\sigma e^m}\iff Y=\mathrm{e}^m(1+\sigma T)\iff X=m+\ln(1+\sigma T)$$
$$\iff\frac{X-m}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\ln(1+\sigma T).$$

Ainsi $T(\Omega)=]-1/\sigma,+\infty[$ et pour tout $x>-\dfrac{1}{\sigma}$:

$$F_T(x)=P(T\leqslant x)=P\Big(\frac{X-m}{\sigma}\leqslant\frac{1}{\sigma}\ln(1+\sigma x)\Big)=\Phi\Big(\frac{1}{\sigma}\ln(1+\sigma x)\Big).$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Une densité g_σ de T est alors définie par :

$$g_\sigma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\dfrac{1}{2\sigma^2}[\ln(1+\sigma x)]^2+\ln(1+\sigma x)\Big) & \text{si } x>-1/\sigma\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On remarque que $\lim\limits_{x\to-(1/\sigma)^+}g_\sigma(x)=0=g_\sigma(0)$, ce qui signifie que g_σ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.36.

1. Soit $q\in]0,1[$. Étudier la convergence de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1\frac{-\ln t}{(1-qt)^2}dt$.

Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall\, t\notin\{0,1/q\},\frac{1}{t\,(1-qt)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{1-qt}$$

et en déduire le calcul de l'intégrale I.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $U_n=\min\limits_{1\leq k\leq n}(X_k)$.

Déterminer la loi de U_n, son espérance et sa variance.

3. Soit N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ sur $\mathbb{N}^*$. On suppose N indépendante des X_k pour tout k. On définit, pour ω appartenant à l'univers Ω :

$$U(\omega)=\min_{1\leq k\leq N(\omega)}\big(X_k(\omega)\big)$$

Déterminer la loi de U et son espérance si elle en admet une.

Solution :

1. La fonction $\varphi : t \mapsto -\dfrac{\ln t}{(1-qt)^2}$ est continue sur $]0,1]$ car $0 < q < 1$, et vérifie $\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} -\ln t > 0$, qui est d'intégrale convergente en 0 (primitive de limite finie ou règle de Riemann) ; il en va donc de même pour φ et I converge.

On trouve par identification :

$$\frac{1}{t\,(1-qt)} = \frac{1}{t} + \frac{q}{1-qt}$$

Pour exploiter la décomposition demandée, on procède d'abord à une intégration par parties, avec une *borne propre* à la place de 0, où les termes écrits *divergent*.

Pour $a \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
-\int_a^1 \ln t \,\frac{1}{(1-qt)^2}\,dt &= -\Big[\ln t\,\frac{1}{q}\,\frac{1}{1-qt}\Big]_a^1 + \int_a^1 \frac{1}{t}\,\frac{1}{q}\,\frac{1}{1-qt}\,dt\\
&= \frac{\ln a}{q\,(1-qa)} + \frac{1}{q}\int_a^1 \big(\frac{1}{t} + \frac{q}{1-qt}\big)dt = \frac{\ln a}{q\,(1-qa)} + \Big[\frac{1}{q}\,\ln\big(\frac{t}{1-qt}\big)\Big]_a^1\\
&= \frac{\ln a}{q\,(1-qa)} + \frac{1}{q}\,\ln\big(\frac{1}{1-q}\big) - \frac{1}{q}\,\ln\big(\frac{a}{1-qa}\big)\\
&= -\frac{1}{q}\,\ln(1-q) + \frac{\ln a}{q}\,\big[\frac{1}{1-qa} - 1\big] + \frac{1}{q}\,\ln(1-qa)\\
&= -\frac{1}{q}\,\ln(1-q) + \frac{a\ln a}{1-qa} + \frac{1}{q}\,\ln(1-qa) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{q}\,\ln(1-q).
\end{aligned}$$

Soit :

$$I = -\frac{\ln(1-q)}{q}$$

2. Les variables U_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ comme les X_k et, par indépendance des X_k, pour $x > 0$,

$$P(U_n > x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) = \mathrm{e}^{-n\,x}$$

donc U_n suit la loi exponentielle de paramètre n, d'espérance $\dfrac{1}{n}$ et de variance $\dfrac{1}{n^2}$.

3. En conditionnant par le système complet d'événements $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on a, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
P(U > x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(U > x/N = n)\,P(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n > x)\,P(N = n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,x}\,p\,q^{n-1} = p\,\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(q.\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{p\,\mathrm{e}^{-x}}{1-q\,\mathrm{e}^{-x}}
\end{aligned}$$

(où $q = 1-p$), d'où la fonction de répartition G de U :

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-x}}{1-q\,\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1-q\,\mathrm{e}^{-x}} & \text{pour } x > 0\\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

Par dérivation, une densité de U sur $\mathbb{R}^+$ est :

$$g(x) = \frac{e^{-x}(1-q\,e^{-x}) - (1-e^{-x})\,q\,e^{-x}}{(1-q\,e^{-x})^2} = \frac{(1-q)\,e^{-x}}{(1-q\,e^{-x})^2}$$

Alors, la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $x\,g(x) \underset{+\infty}{\sim} px\,e^{-x} = o(1/x^2)$, donc a une intégrale convergente en $+\infty$ d'après la règle de Riemann, et U admet une espérance.

Le changement de variable $t = e^{-x}$ donne :

$$E(U) = \int_0^{+\infty} \frac{p\,x\,e^{-x}}{(1-q\,e^{-x})^2}dx = p\int_0^1 \frac{-\ln t}{(1-qt)^2}dt = p\,I$$

Soit :

$$E(U) = -\frac{p}{q}\ln p.$$

Exercice 3.37.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. On pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer a_n pour que f_n soit une densité d'une variable aléatoire réelle continue.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de densité f_n.
Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, X_n possède un moment d'ordre k, que l'on calculera.

3. Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.
Déterminer pour tout x réel, la limite $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$. On note cette limite $F(x)$.
La fonction F est–elle une fonction de répartition d'une variable aléatoire ?
La suite (X_n) admet-elle une limite en loi ? Si oui, la déterminer.

Solution :

1. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $x = 0$. Elle y est positive si et seulement si $a_n \geqslant 0$. Enfin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = a_n\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = a_n\frac{n}{n+1}.$$

Ainsi f_n est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a_n = \dfrac{n+1}{n}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^k f_n(x)$ est continue sur $[0,n]$. Ainsi tous les moments existent.
Une intégration par parties élémentaire donne :

$$I_{n,k} = \int_0^n x^k\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{kn}{n+1}\int_0^n x^{k-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}dx = \frac{kn}{n+1}I_{n+1,k-1}$$

D'où :

$$I_{n,k} = \frac{k!n^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n+k}dx = \frac{n^{k+1}}{\binom{n+k}{k}(n+k+1)}$$

3. Il vient :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-(1-\frac{x}{n})^{n+1} & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x \geqslant n \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ *fixé. Pour tout $n > x$ on a

$$\ln(1-F_n(x)) = (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1-\mathrm{e}^{-x}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. La suite (X_n) tend, en loi, vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Exercice 3.38.

Soit f la fonction définie par :

$\forall\, x \in]0,1[, f(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{1}{1+x}$ et $\forall\, x \in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[, f(x) = 0.$

1. a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

c) Déterminer l'existence et la valeur éventuelle de $E(X)$ et $V(X)$.

2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et $N = \lfloor \dfrac{1}{X} \rfloor$ (N est la partie entière de $\dfrac{1}{X}$).

a) Déterminer la loi de Y.

b) Déterminer la loi de N.

c) Y et N ont-elles une espérance ?

3. On pose $Z = Y - N$. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ?

Solution :

1. a) La fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sauf en 0 et 1 et

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln 2}\times\frac{dt}{1+t} = 1.$$

Ainsi f est une densité sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction de répartition F_X de X est alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

c) On a :

$$E(X+1)=\int_0^1 \frac{dx}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2} \text{ et } E(X)=\frac{1}{\ln 2}-1$$

et $E\big((X+1)^2\big)=\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\ln 2}\,dx=\frac{3}{2\ln 2}$, d'où :

$$V(X)=V(X+1)=\frac{3\ln 2-2}{2(\ln 2)^2}$$

2. a) On a $Y(\Omega)=]1,+\infty[$ et pour tout $y>1$:

$$P(Y\leqslant y)=P(X\geqslant \frac{1}{y})=1-F_X(\frac{1}{y})$$

Une densité de Y est donc définie par :

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0 & \text{si } y\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{1}{y(1+y)} & \text{si } y>1 \end{cases}$$

b) On a $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned} P(N=n)&=P\big(n\leqslant \frac{1}{X}<n+1\big)=P\big(\frac{1}{n+1}<X\leqslant\frac{1}{n}\big)\\ &=\frac{1}{\ln 2}\big(\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n+1})\big)=\frac{1}{\ln 2}\ln\big(1+\frac{1}{n(n+2)}\big). \end{aligned}$$

c) Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dy}{1+y}$ diverge, Y n'admet pas d'espérance.

D'autre part, $n\ln\big(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\big)\sim\dfrac{1}{n}$ et la variable N n'admet pas d'espérance.

3. On a $Z(\Omega)=[0,1[$ et pour tout $0\leqslant z<1$:

$$\begin{aligned} P(Z\leqslant z)&=P\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(n\leqslant\frac{1}{X}<n+z)\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}P\big(n\leqslant\frac{1}{X}<n+z\big)\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}(F_Y(n)-F_Y(n+z)). \end{aligned}$$

Or

$$F_Y(n)-F_Y(n+z)=\frac{1}{\ln 2}\big(\ln(n+1)-\ln n-\ln(n+1+z)+\ln(n+z)\big)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N}[F_Y(n)-F_Y(n+z)]=\frac{1}{\ln 2}\big(\ln(1+z)+\ln\frac{N+1}{N+1+z}\big), \text{ et}$$

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}[F_Y(n)-F_Y(n+z)]=\frac{\ln(1+z)}{\ln 2}$$

Donc, finalement :

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \\ \dfrac{\ln(1+z)}{\ln 2} & \text{si } 0\leqslant z<1 \\ 1 & \text{si } z\geqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi Z suit la même loi que X et admet les mêmes moments.