

Copie anonyme - n°anonymat : 871425

V6-00095
871425
Mat Appli



Code épreuve : 288

Nombre de pages : 11

Session : 2024

Épreuve de : Maths appliquées ESSEC/HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 1.

$$1. n = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad \text{car on prend 3 sommets parmi les } n$$

2.a) Y_k vaut 1 si t_k est un triangle de G et 0 sinon
donc $Y_k = 1$ si u, v et w sont chacun reliés par une arête aux deux autres. Il y a une arête si $T_{u,v} = T_{v,w} = T_{u,w} = 1$
si au moins une arête manque, $T_{u,v} T_{v,w} T_{u,w} = 0$
et il n'y a pas de triangle
donc on retrouve que $Y_k = T_{u,v} T_{v,w} T_{u,w}$

$$b) P(Y_k = 1) = P(T_{u,v} T_{v,w} T_{u,w} = 1) = P((T_{u,v} = 1) \cap (T_{v,w} = 1) \cap (T_{u,w} = 1))$$

$$= \underbrace{P(T_{u,v} = 1)}_{\text{indépendance}} P(T_{v,w} = 1) P(T_{u,w} = 1) = \boxed{p^3}$$

$Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$ d'après l'énoncé
donc $Y_k \mapsto \mathcal{B}(p^3)$

c) Z_n compte le nombre de triangles dans G et Y_k vaut 1 si t_k est un triangle et 0 sinon
donc en faisant la somme des $Y_k \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,
on obtient le nombre de triangles dans G
donc $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$

$$E(Z_n) = E\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) \stackrel{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=1}^n E(Y_k) = \sum_{k=1}^n p^3 = p^3 n = \boxed{\binom{n}{3} p^3}$$

3. a) ~~$V(Z_n) = V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = V\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j\right) =$~~
~~car X_i et X_j seraient une Bernoulli~~

b) $(i, j) \in E \Leftrightarrow i \neq j$ et $i \neq j \Leftrightarrow k_i$ et k_j n'ont aucun élément en commun donc la probabilité que X_i ou X_j soient des triangles ne dépendent pas l'une de l'autre donc X_i et X_j sont indépendantes

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + \sum_{i, j, i \neq j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{k=1}^n V(X_k) + \sum_{(i, j) \in E} \text{cov}(X_i, X_j) + \sum_{(i, j) \in F} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{k=1}^n V(X_k) + \sum_{(i, j) \in E} \text{cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

c) $V(Z_n) = \sum_{i=1}^n p^3(1-p^3) + \sum_{(i, j) \in E} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j))$
 $X_i \sim \mathcal{B}(p^3)$ + formule de Boenig Huygens

$$= p^3(1-p^3)n + \sum_{(i, j) \in E} E(X_i X_j) - \sum_{(i, j) \in E} p^3 p^3$$

$$= np^3(1-p^3) + \sum_{(i, j) \in E} E(X_i X_j) - p^6 a_n$$

car $\sum_{(i, j) \in E} 1$ est la somme de a_n termes

4. si $i \equiv j$, k_i et k_j ont 2 sommets en commun

$$\text{donc } P(X_i X_j = 1) = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$$

$$= P((T_{u,v} T_{v,w} T_{w,x} = 1) \cap (T_{v,w} T_{w,x} T_{u,x} = 1))$$

avec $u < v < w < x$

u, v et w sommets de k_i et v, w, x sommets de k_j

indépend = $P((T_{u,v} = 1) \cap (T_{v,w} = 1) \cap (T_{u,w} = 1) \cap (T_{w,x} = 1) \cap (T_{v,x} = 1))$
 $= p^5$

donc $(Y_i, Y_j) \in \mathcal{B}(p^5)$ donc $E(Y_i, Y_j) = p^5$

$$(Y_i, Y_j) \in \mathcal{Q} = \{0, 1\}$$

$$A_n = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} p^5 = p^5 a_n$$

pareil que pour a_{n-3}

$$V(Z_n) = n p^3 (1 - p^3) + a_n p^5 - a_n p^6$$

$$= \binom{n}{3} (p^3 - p^6) + a_n (p^5 - p^6)$$

5. a) On prend d'abord 2 sommets pour former l'arête parmi les n puis on reprend 1 sommet parmi les $(n-2)$ restants puis 1 parmi les $(n-3)$ restants. Il y a donc $\binom{n}{2} \binom{n-2}{1} \binom{n-3}{1}$ triplets

$$b) a_n = \binom{n}{2} \binom{n-2}{1} \binom{n-3}{1} = \frac{n!}{2! (n-2)! (n-3)! (n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$$

6 def triangles(s, L):

 cpt = 0

 adj = L[s]

 for i in range(len(adj)):

 for j in range(i, len(adj)):

 if j in L[s]:

 cpt += 1

 return cpt

7. def nbTriangles(L):

 T = 0

 for s in range(len(L)):

 T = T + triangles(s, L)

 supprimeDer(L)

 return T

8. Elle retourne $E(Z_n)$

9. a) si $x > y \Rightarrow g(x) > g(y)$ et $f(x) > f(y)$
 donc $f(x) - f(y) > 0$ et $g(x) - g(y) > 0$
 f et g sont croissantes
 donc $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) > 0$

si $x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$ et $f(x) < f(y)$
 f et g croissantes
 donc $(f(x) - f(y)) < 0$ et $(g(x) - g(y)) < 0$
 donc par produit de 2 termes négatifs,
 $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) > 0$

donc $\forall (x, y) \in X(\Omega)^2$,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) > 0$$

b) $X \in X(\Omega)$ donc on remplace x par X

$$(f(X) - f(y))(g(X) - g(y)) > 0$$

$$\Rightarrow E((f(X) - f(y))(g(X) - g(y))) > E(0) = 0$$

$$\Rightarrow E(f(X)g(X) - f(y)g(X) - g(y)f(X) + f(y)g(y)) > 0$$

$$\Rightarrow E(f(X)g(X)) - f(y)E(g(X)) - g(y)E(f(X)) + f(y)g(y) > 0$$

$\uparrow$ linéarité

$$\Rightarrow E(f(X)g(X)) + f(y)g(y) > g(y)E(f(X)) + f(y)E(g(X))$$

c)

Copie anonyme - n°anonymat : 871425

Emplacement QR Code	Code épreuve : 288	Nombre de pages : 11	Session : 2024
	Épreuve de : Maths appliquées ESSEC/HEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$\begin{aligned}
 10a) E(Y_{k+1}Z_{k+1}) &= E(f(X_1, \dots, X_{k+1})g(X_1, \dots, X_{k+1})) \\
 &= \sum_{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_{k+1}(\Omega)} f(x_1, \dots, x_{k+1})g(x_1, \dots, x_{k+1})P(X_1=x_1 \cap \dots \cap X_{k+1}=x_{k+1}) \\
 &\quad \text{théorème de transfert d'ordre } k+1 \\
 &= \sum_{x_{k+1} \in X_{k+1}(\Omega)} \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_k(\Omega)} (f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})g(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})P(\bigcap_{i=1}^k X_i=x_i))P(X_{k+1}=x_{k+1}) \\
 &\quad \text{indépendance} \\
 &= \sum_{x_{k+1} \in X_{k+1}(\Omega)} P(X_{k+1}=x_{k+1}) \cdot E(f(X_1, \dots, X_k, x_{k+1})g(X_1, \dots, X_k, x_{k+1})) \\
 &\quad \text{théorème de transfert d'ordre } k \text{ et en posant} \\
 &\quad x = x_{k+1} \text{ car la lettre est muette}
 \end{aligned}$$

b)

c) soient $x > y$

$$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_h, x) > f(x_1, \dots, x_h, y)$$

$\uparrow$ f est $(h+1)$ croissante

$$\Rightarrow E(f(x_1, \dots, x_h, x)) > E(f(x_1, \dots, x_h, y))$$

$\Rightarrow u(x) > u(y)$ donc u est croissante sur $X_{h+1}(\Omega)$

En remplaçant f par g , on retrouve que u est croissante

$$E(Y_{h+1} Z_{h+1}) > \sum_{\substack{x \in X_{h+1}(\Omega) \\ q > 0}} E(f(x_1, \dots, x_h, x) g(x_1, \dots, x_h, x)) P(X_{h+1} = x)$$

$$> \sum_{\substack{x \in X_{h+1}(\Omega) \\ q > 0}} E(f(x_1, \dots, x_h, x)) E(g(x_1, \dots, x_h, x)) P(X_{h+1} = x)$$

$$\Rightarrow E(Y_{h+1} Z_{h+1}) > \sum_{x \in X_{h+1}(\Omega)} u(x) u(x) P(X_{h+1} = x) \stackrel{\text{théorème de transfert}}{=} E(u(X_{h+1}) u(X_{h+1}))$$

d)

11. $\bigcap_{0 \leq u < v \leq n-1} (t_{u,v} = 0)$ signifie qu'il n'y a aucune arête dans le graphe et par conséquent, il n'y a aucun triangle donc $z_n = 0$
donc $\left[\bigcap_{0 \leq u < v \leq n-1} (t_{u,v} = 0) \subset (z_n = 0) \right]$

En passant aux probabilités,

$$\begin{aligned} P(z_n = 0) &\geq P\left(\bigcap_{0 \leq u < v \leq n-1} (t_{u,v} = 0)\right) = \prod_{0 \leq u < v \leq n-1} P(t_{u,v} = 0) = \prod_{0 \leq u < v \leq n-1} (1-p) \\ &= \prod_{v=1}^{n-1} \prod_{u=0}^{v-1} (1-p) = \prod_{v=1}^{n-1} (1-p)^v = (1-p)^{\sum_{v=1}^{n-1} v} = (1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (1-p)^{\binom{n}{2}} \\ &> 0 \text{ car } p < 1 \\ \text{donc } \left[P(z_n = 0) > (1-p)^{\binom{n}{2}} > 0 \right] \end{aligned}$$

$$12. P(Y_i = 0) = 1 - p^3 = 1 - E(Y_i) = E(1 - Y_i)$$

q2. l. $\hat{=} Y_i \sim \mathcal{B}(p^3)$ $\hat{=} \text{linéarité}$

$$P(z_{n,i} = 0) = P\left(\sum_{k=1}^i Y_k = 0\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^i (Y_k = 0)\right) =$$

$$14. P_m: P\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(B_i) "$$

Initialisation

$$P_2: P\left(\bigcup_{i=1}^2 B_i\right) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \leq \sum_{i=1}^2 P(B_i)$$

car $P(B_1 \cap B_2) \geq 0$

P_2 est vraie

Hérédité:

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons P_k vraie et montrons que P_{k+1} est vraie:

$$P_{k+1}: P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \cup B_{k+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) + P(B_{k+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \cap B_{k+1}\right)$$

$$\leq P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) + P(B_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i) + P(B_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i)$$

car $P\left(\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \cap B_{k+1}\right) \geq 0$ hypothèse de récurrence

P_{k+1} est vraie

Conclusion:

P_k est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence

$$15. P_{B|C}(A) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(C)P_C(A)P_{A|C}(B)}{P(B \cap C)} = P_C(A)P_{A|C}(B) \left(\frac{P(B|C)}{P(C)} \right)$$

probabilités conditionnelles probas composées

$$= P_C(A)P_{A|C}(B) \frac{1}{P_C(B)} \geq P_C(A)P_{A|C}(B)$$

car $P_C(B) \in]0, 1]$ donc $\frac{1}{P_C(B)} \geq 1$

16. A_i dépend de i alors que $C_i = \bigcap_{j \in J_i} A_j$ désigne l'intersection des $A_j \forall j \neq i$ donc par le lemme des conditions, A_i et C_i sont indépendantes

si A_i et C_i sont indépendantes, $\bar{A}_i$ et C_i aussi

On reprend la q 15 en posant $B = B_i$, $C = C_i$ et $A = \bar{A}_i$ et on obtient:

$$P_{B_i|C_i}(\bar{A}_i) \geq P_{C_i}(\bar{A}_i)P_{\bar{A}_i|C_i}(B_i) = \boxed{P(\bar{A}_i)P_{\bar{A}_i|C_i}(B_i)}$$

$\hat{=}$ A_i et C_i sont indépendantes

Emplacement QR Code	Code épreuve : <u>288</u>	Nombre de pages : <u>11</u>	Session : <u>2024</u>
	Épreuve de : <u>Maths appliquées ESSEC/HEC</u>		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

b) $P_{\overline{A_i} \cap C_i}(B_i) = \frac{P(\overline{A_i} \cap C_i \cap B_i)}{P(\overline{A_i} \cap C_i)} = \frac{P(A_i \cap (\bigcap_{j=1}^n \overline{A_j}))}{P(A_i)P(C_i)} = \frac{P(\bigcap_{j=1}^n \overline{A_j})}{P(A_i)P(C_i)}$

$= \frac{P(\bigcap_{j=1}^n \overline{A_j})}{P(A_i)P(C_i)} = \frac{1 - P(\bigcup_{j=1}^n A_j)}{P(A_i)P(C_i)} \stackrel{\text{Boole}}{>} \frac{1 - \sum_{j=1}^n P(A_j)}{P(A_i)P(C_i)} = \frac{1}{P(A_i)P(C_i)} - \sum_{j=1}^n \frac{P(A_j)}{P(A_i)P(C_i)}$

$\gg 1 - \sum_{j \in I_i} \frac{P(A_j)}{P(A_i)P(C_i)}$

c) $P_{B_i \cap C_i}(A_i) = \frac{P(B_i \cap C_i \cap A_i)}{P(B_i \cap C_i)} = \frac{P(\bigcap_{j=1}^n \overline{A_j})}{P(B_i \cap C_i)} = \frac{P(\bigcap_{j=1}^n \overline{A_j})}{P(B_i)P(C_i)} = \frac{1 - P(\bigcup_{j=1}^n A_j)}{P(B_i)P(C_i)}$

$=$

d) Soit $g(x) = e^{-x} + x - 1$
 $g'(x) = -e^{-x} + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g(0) = 0$
 donc d'après le tableau
 $g(x) = e^{-x} + x - 1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{1 - x \leq e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

On pose $x = P(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)$
 On obtient

$1 - P(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right) \leq \exp\left(-P(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j \in I_i} P_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)\right)$
 $= \exp\left(-P(\overline{A_i}) + \sum_{j \in I_i} P(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$

9 / 12

et avec la q 16c, on obtiens

$$P_{B_i \cap C_i}(A_i) \leq \exp\left(-P(\bar{A}_i) + \sum_{j \in I_i} P(\bar{A}_j \cap \bar{A}_i)\right)$$

$$17a) P(Z_n = 0) = P\left(\sum_{k=1}^n Y_k = 0\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (Y_k = 0)\right) = \boxed{P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)}$$

$Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$

$$= P(A_1) P_{A_1}\left(\bigcap_{i=2}^n A_i\right) \stackrel{\text{probabilité composée}}{=} P(A_1) P_{A_1}(A_2) \dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$$

$$= P(A_1) \prod_{i=2}^n P_{\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i) = \boxed{P(A_1) \prod_{i=2}^n P_{B_i \cap C_i}(A_i)}$$

$$b) P(Z_n = 0) = P(A_1) \prod_{i=2}^n P_{B_i \cap C_i}(A_i) \stackrel{q 16d}{\leq} P(A_1) \prod_{i=2}^n \exp\left(-P(\bar{A}_i) + \sum_{j \in I_i} P(\bar{A}_j \cap \bar{A}_i)\right)$$

$$= P(A_1) \exp\left(\sum_{i=2}^n \left(-P(\bar{A}_i) + \sum_{j \in I_i} P(\bar{A}_j \cap \bar{A}_i)\right)\right)$$

$$18a) \lim_{n \rightarrow +\infty} -\binom{n}{3} \left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2} \left(\frac{c}{n}\right)^5$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \frac{c^3}{n^3} + \frac{n^4}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{c}{n}\right)^5 \right)$$

$$\underbrace{a_n \sim \frac{n^4}{2} \text{ (q.s.b.)}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{c^3}{6} + \frac{c^5}{4n^5} \right) = \boxed{-\frac{c^3}{6}}$$

$$\underbrace{n(n-1)(n-2) \sim n^3}$$

$$b) \ln\left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right) \sim -\frac{c^3}{n^3} \text{ et } \binom{n}{3} \sim \frac{n^3}{6}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{3} \ln\left(1 - \frac{c^3}{n^3}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{n^3}{6} \frac{c^3}{n^3} \right) = \boxed{-\frac{c^3}{6}}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{c}{n}\right)^3\right)^{\binom{n}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\binom{n}{3} \ln\left(1 - \left(\frac{c}{n}\right)^3\right)\right) = e^{-\frac{c^3}{6}}$$

par composition de e^x qui est continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\binom{n}{3} \left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2} \left(\frac{c}{n}\right)^5\right) = e^{-\frac{c^3}{6}} \quad \swarrow$$

$$\text{donc par encadrement, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = e^{-\frac{c^3}{6}}}$$

19. Oui c'est cohérent.

