

Première partie

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) La fonction de répartition de $F_{(n,n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ se calcule classiquement via les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{(n,n)}(x) &= \mathbf{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]\right) \quad \text{par définition du maximum} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq x) \quad \text{par indépendance mutuelle des } (X_i)_{1 \leq i \leq n} \\ &= (F(x))^n \quad \text{car les } (X_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ suivent toutes la même loi} \end{aligned}$$

Or la fonction de répartition F est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut-être en un nombre fini de points. Par produit de telles fonctions, $F_{(n,n)}$ a les mêmes propriétés, ce qui prouve que $X_{(n,n)}$ est une variable à densité ; une densité de cette variable aléatoire est obtenue par dérivation de $F_{(n,n)}$ là où c'est possible :

$$f_{(n,n)}(x) = nF'(x)(F(x))^{n-1} = nf(x)(F(x))^{n-1},$$

expression toujours positive qu'on peut utiliser pour tout $x \in \mathbb{R}$ (y compris en choisissant arbitrairement cette expression là où F ne serait pas dérivable).

b) Par une méthode similaire, on peut calculer cette fois la fonction de répartition de $X_{(n,1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{(n,1)}(x) &= \mathbf{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) = 1 - \mathbf{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right) \quad \text{par définition du minimum} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i > x) \quad \text{par indépendance des } (X_i)_{1 \leq i \leq n} \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \quad \text{car les } (X_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ suivent toutes la même loi} \end{aligned}$$

Là encore, sous cette forme $F_{(n,1)}$ apparaît, car c'est le cas de F , comme une fonction continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf peut-être en un nombre fini de points.

La variable aléatoire $X_{(n,1)}$ est donc à densité, et on en obtient une densité $f_{(n,1)}$ en dérivant $F_{(n,1)}$ là où c'est possible, puis en conservant la même expression sur tout \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{(n,1)}(x) = 0 - n(0 - F(x))(1 - F(x))^{n-1} = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient n et k deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_{i,x}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement $[X_i \leq x]$, c'est-à-dire :

$$Y_{i,x} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Par définition, il est clair que $Y_{i,x}(\Omega) = \{0; 1\}$, donc que $Y_{i,x}$ suit une loi de Bernoulli, de paramètre :

$$\mathbf{P}(Y_{i,x} = 1) = \mathbf{P}(X_i \leq x) = F(x).$$

b) L'événement $[X_{(n,k)} \leq x]$ est réalisé si et seulement si, après ordonnancement des variables X_1, \dots, X_n , la k -ième d'entre elles dans l'ordre, est inférieure ou égale à x .

Ceci se réalise si et seulement si k variables au moins parmi les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ prennent une valeur inférieure ou égale à x , donc si et seulement si k au moins des variables $(Y_{i,x})_{1 \leq i \leq n}$ prennent la valeur 1. Comme la seule autre valeur possible de $Y_{i,x}$ est 0, cette dernière condition nécessaire

et suffisante est bien équivalente au fait que la somme $\sum_{i=1}^n Y_{i,x}$ prend une valeur au moins égale à k (il y a au moins k termes dans la somme égaux à 1).

Ces équivalences donnent bien l'égalité d'événements :

$$[X_{(n,k)} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right].$$

c) Les variables $(Y_{i,x})_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes d'après le lemme des coalitions, car les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ le sont et $Y_{i,x}$ ne dépend que de X_i . Comme elles suivent toute la même loi de Bernoulli de paramètre $F(x)$, alors leur somme $\sum_{i=1}^n Y_{i,x}$ suit la loi **binomiale** de paramètres $(n, F(x))$, de sorte que pour tout réel x :

$$F_{(n,k)}(x) = \mathbf{P}(X_{(n,k)} \leq x) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k\right) = \sum_{\ell=k}^n \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_{i,x} = \ell\right) = \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} F(x)^\ell (1-F(x))^{n-\ell}.$$

3. Pour tout triplet d'entiers (n, k, ℓ) tel que $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq \ell \leq n$, on introduit les fonctions polynômiales $b_{n,\ell}$ et $a_{n,k}$ définies respectivement par, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$b_{n,\ell}(z) = \binom{n}{\ell} z^\ell (1-z)^{n-\ell} \quad \text{et} \quad a_{n,k}(z) = \sum_{\ell=k}^n b_{n,\ell}(z).$$

On convient également que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $b_{n-1,n}$ est identiquement nulle.

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Pour tout réel z :

$$b'_{n,\ell}(z) = \binom{n}{\ell} \cdot [\ell z^{\ell-1} (1-z)^{n-\ell} - (n-\ell) z^\ell (1-z)^{n-\ell-1}] = \ell \binom{n}{\ell} z^{\ell-1} (1-z)^{n-\ell} - (n-\ell) \binom{n}{\ell} z^\ell (1-z)^{n-\ell-1}$$

$$\text{où : } \ell \binom{n}{\ell} = \frac{\ell \cdot n!}{\ell!(n-\ell)!} = n \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!(n-\ell)!} = n \binom{n-1}{\ell-1}$$

$$\text{et } (n-\ell) \binom{n}{\ell} = \frac{(n-\ell) \cdot n!}{\ell!(n-\ell)!} = n \frac{(n-1)!}{\ell!(n-\ell-1)!} = n \binom{n-1}{\ell},$$

$$\text{donc : } b'_{n,\ell}(z) = n \left[\binom{n-1}{\ell-1} z^{\ell-1} (1-z)^{n-\ell} - \binom{n-1}{\ell} z^\ell (1-z)^{n-1-\ell} \right] = n(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)).$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. La fonction de répartition $F_{(n,k)}$ de la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ est, d'après son expression obtenue en 2.c), continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sauf peut-être en un nombre fini de points, car c'est le cas de la fonction F et par somme et produits de telles fonctions.

La variable aléatoire $X_{(n,k)}$ est donc une variable à densité, et une densité $f_{(n,k)}$ est définie partout où c'est possible par : $f_{(n,k)}(x) = F'_{(n,k)}(x)$.

En remarquant, avec les notations précédemment introduites, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{(n,k)}(x) = a_{n,k}(F(x)) = \sum_{\ell=k}^n b_{n,\ell}(F(x)),$$

alors :

$$\begin{aligned} F'_{(n,k)}(x) &= \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} F'(x) \cdot b'_{n,\ell}(F(x)) = n f(x) \sum_{\ell=k}^n \left(b_{n-1,\ell-1}(F(x)) - b_{n-1,\ell}(F(x)) \right) \\ &= n f(x) \left(b_{n-1,k-1}(F(x)) - b_{n-1,n}(F(x)) \right) \\ &= n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} \end{aligned}$$

car $b_{n-1,n}(z) = 0$ vu que $\binom{n-1}{n} = 0$, étant donné que $n > n-1$. L'expression finale est bien définie pour tout réel x , et peut-être prise comme définition d'une densité $f_{(n,k)}$ de $X_{(n,k)}$.

4. Soit x un réel tel que $0 < F(x) < 1$.

a) Soient $\alpha \in]F(x); 1[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha - F(x) > \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon > F(x)$.

Par définition :

$$\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right] = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq F(x) + \varepsilon \right] \cup \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} \leq F(x) - \varepsilon \right]$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de la partie entière :

$$\lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n < \lfloor \alpha n \rfloor + 1 \iff \alpha n - 1 < \lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n \iff \alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \leq \alpha$$

Pour n assez grand (du fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$), on aura alors :

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \implies \alpha - \frac{1}{n} > \alpha - \varepsilon \implies \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} > F(x),$$

ce qui prouve l'inclusion d'événements :

$$\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right] = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \right] \subset \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq F(x) \right] \subset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right]$$

Par croissance de la probabilité, on a donc :

$$0 \leq \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right) \leq \mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right)$$

Or :

- d'après 2.b), $\mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right) = \mathbf{P}(X_{(n,\lfloor \alpha n \rfloor)} \leq x) = F_{(n,\lfloor \alpha n \rfloor)}(x)$.

- Puisque les $(Y_{i,x})_{i \geq 1}$ sont des variables de Bernoulli de même paramètre $F(x)$ (cf. q.2.a), alors d'après la **loi faible des grands nombres** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Le théorème d'encadrement prouve donc bien que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) = 0.$$

- b) Soient $\alpha \in]0; F(x)[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $F(x) - \alpha > \varepsilon \iff F(x) - \varepsilon > \alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right] = \left[n(F(x) - \varepsilon) < \sum_{i=1}^n Y_{i,x} < n(F(x) + \varepsilon) \right],$$

et : $n(F(x) - \varepsilon) > n\alpha \geq \lfloor \alpha n \rfloor$, d'où, en effet, l'inclusion :

$$\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right] = \left[n(F(x) - \varepsilon) < \sum_{i=1}^n Y_{i,x} < n(F(x) + \varepsilon) \right] \subset \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right].$$

La croissance de la probabilité donne cette fois :

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right) = 1 - \mathbf{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right) = F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) \leq 1.$$

La loi faible des grands nombres et le théorème d'encadrement donnent donc, cette fois :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) = 1.$$

5. On suppose dans cette question qu'il existe un intervalle ouvert $I =]a; b[$, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, tel que f est continue sur I , $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus I$.

- a) Au vu des hypothèses faites précédemment : F , qui a partout où elle est de classe \mathcal{C}^1 , la fonction f pour dérivée, est strictement croissante sur $I =]a; b[$ où f' est strictement positive.

Comme F est également continue sur \mathbb{R} , donc sur I comme fonction de répartition d'une variable à densité : d'après le théorème éponyme, F réalise une bijection de I dans l'intervalle-image $F(I) =] \lim_{x \rightarrow a} F(x); \lim_{x \rightarrow b} F(x)[$.

Si a est un réel : F est constante (car f est nulle) et continue sur $] -\infty; a[$, où elle prend constamment la valeur $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ également (que a soit un réel ou $-\infty$, en fait).

De même, si b est un réel, alors F est constante (car f est nulle) et continue sur $[b; +\infty[$, où elle prend constamment la valeur $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, qui est donc aussi la valeur de $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ (que b soit un réel ou $+\infty$).

Bref, F réalise bien une bijection de I dans $]0; 1[$.

- b) On note F^{-1} la bijection réciproque de la fonction F restreinte à I et on fixe $\alpha \in]0; 1[$.

D'après les résultats de la question 4. :

- Pour tout réel $x \in I$ tel que $0 < F(x) < \alpha \iff a < x < F^{-1}(\alpha)$, on a d'après 4.a) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) = 0.$$

C'est aussi vrai pour tout réel $x \in] -\infty; a[$ car alors $F(x) = 0$

et par conséquent $F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) = \sum_{\ell=k}^n 0^\ell \cdot 1^{n-\ell} = 0$ aussi (formule obtenue en 2.c)).

- Pour tout réel $x \in I$ tel que $\alpha < F(x) < 1 \iff F^{-1}(\alpha) < x$: d'après 4.b),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [\alpha n])}(x) = 1.$$

C'est aussi vrai pour tout réel $x \in [b; +\infty[$ car alors $F(x) = 1$

et par conséquent $F_{(n, [\alpha n])}(x) = \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} 1^\ell \cdot 0^{n-\ell} = 0 + \binom{n}{n} 1^n \cdot 0^0 = 1$ aussi (cette fois il y a un terme non nul qui vaut 1 dans la somme : le terme d'indice $\ell = n$).

$$\text{Bilan : } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{F^{-1}(\alpha)\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [\alpha n])}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < F^{-1}(\alpha) \\ 1 & \text{si } x > F^{-1}(\alpha) \end{cases} = G(x)$$

où G est la fonction de répartition d'une variable certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$, qui vérifie de plus $G(F^{-1}(\alpha)) = 1$, $F^{-1}(\alpha)$ étant le seul réel en lequel G est discontinue.

Ainsi, la suite $(F_{(n, [\alpha n])}(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $G(x)$ en tout point de continuité de G : par définition, la suite $(X_{n, [\alpha n]})$ converge en loi vers une variable certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$: en écrivant

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(|X_{n, [\alpha n]} - F^{-1}(\alpha)| \geq \varepsilon\right) &= \mathbf{P}(X_{n, [\alpha n]} \leq F^{-1}(\alpha) - \varepsilon) + \mathbf{P}(X_{n, [\alpha n]} \geq F^{-1}(\alpha) + \varepsilon) \\ &= F_{(n, [\alpha n])}(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon) + 1 - F_{(n, [\alpha n])}(F^{-1}(\alpha) + \varepsilon), \end{aligned}$$

la convergence en loi démontrée à la question précédente donne, en tenant compte du fait que $F^{-1}(\alpha) - \varepsilon < F^{-1}(\alpha) < F^{-1}(\alpha) + \varepsilon$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(|X_{n, [\alpha n]} - F^{-1}(\alpha)| \geq \varepsilon\right) = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien démontré que la suite $(X_{n, [\alpha n]})$ converge en probabilité vers une variable certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$.

6. La fonction `tri` ci-dessous, rédigée en langage Python, réalise le tri d'un tableau unidimensionnel par insertion. L'idée principale pour placer le coefficient numéroté k en bonne position sachant que les éléments numérotés de 0 à $k-1$ sont déjà triés entre eux dans l'ordre croissant, consiste à comparer ce coefficient `T[k]` avec `T[k-1]` : si `T[k] >= T[k-1]`, alors `T[k]` est déjà à la bonne place (il est supérieur à `T[k-1]`), mais de fait aussi à tous les coefficients précédents !

Sinon, on échange les valeurs de `T[k]` et `T[k-1]` et on compare le coefficient à insérer, qui est maintenant `T[k-1]`, avec l'élément précédent... on continue tant que l'élément à insérer est strictement inférieur à l'élément qui est à sa gauche dans le tableau. Au pire, l'élément à insérer était strictement inférieur à tous ceux qui le précède et on le retrouvera en première position dans le tableau `T` : on ne pouvait alors plus le comparer avec un élément à sa gauche, ceci doit de fait être pris en compte dans la condition de la boucle `while` qu'on écrit.

```
def tri(T):
    n = np.size(T)
    for i in range(1, n):
        j = i # position initiale de l'élément à trier
        while j > 0 and T[j] < T[j-1]:
            T[j], T[j-1] = T[j-1], T[j] # échange par affectations simultanées
            j = j-1
        #print(T) # décommenter pour voir les étapes intermédiaires
    return T
```

La fonction appelée avec `T = np.array([38, 28, 35, 24, 31, 15])` donne bien le résultat final et les étapes intermédiaires annoncées.

7. L'énoncé fournissait le programme Python suivant à la suite de la fonction `tri` :

```
def ech(n):
    *****

def X(n,k):
    res = ech(n)
    *****

n = 2000 ; na = 20
A = np.linspace(0.01, 0.99, na)
B = np.zeros(na)
for k in range(na):
    a = A[k]
    B[k] = X(n, int(np.floor(a*n)))
plt.plot(A, B, "xk")
plt.show()
```

La fonction `ech`, supposée déjà écrite pour les trois questions suivantes a), b), c) renvoie, sous la forme d'un tableau unidimensionnel de longueur n , une réalisation du n -uplet de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) .

a) La fonction `X` doit simplement trier l'échantillon dans l'ordre croissant à l'aide de la fonction précédemment écrite : il suffira alors de renvoyer le k -ième élément du vecteur trié, qui est compte-tenu de la numérotation par Python des vecteurs à partir de l'indice 0, le coefficient de place $k - 1$.

```
def X(n,k):
    res = ech(n)
    T = tri(res)
    return T[k-1]
```

b) La suite du programme fourni par l'énoncé montre que les valeurs affichées sont celles de $X_{(n, \lfloor an \rfloor)}$ pour $n = 2000$ considéré "grand", de sorte que cette valeur peut être considérée proche de $F^{-1}(a)$, où a prend 20 valeurs régulièrement espacées à partir de 0.1 jusqu'à 0.99 ; on peut donc considérer que cet affichage donne l'allure de la courbe de F^{-1} , définie sur $]0 ; 1[$ et à valeurs dans l'intervalle ouvert I défini à la question 5., et qui correspond de fait à l'univers-image de la variable aléatoire X .

c) On observe dans le cas présent, un alignement des points qui plaide en faveur d'une fonction F^{-1} affine de $[0 ; 1]$ dans $[2 ; 6]$; la fonction originelle F serait alors (ne serait-ce que par un argument de symétrie de sa courbe vis-à-vis de celle de F^{-1} , par rapport à la droite $D : y = x$) elle-même une fonction affine de $[2 ; 6]$ dans $[0 ; 1]$, valant 0 avant 2 et 1 après 6.

Bref, il semble bien que la loi commune des X_i simulées par la fonction `ech`, soit la **loi uniforme sur $[2 ; 6]$** .

d) On sait facilement simuler la loi uniforme sur $[0 ; 1]$ avec la fonction `rd.random()` de la bibliothèque `numpy.random` importée sous l'alias `rd` ; on sait aussi que si Z est une variable aléatoire suivant cette loi, alors $4Z + 2$ suit la loi uniforme sur $[2 ; 6]$.

La fonction `ech` peut donc être complétée comme suit :

```
import numpy.random as rd

def ech(n):
    Z = rd.random(n) # l'argument n définit la taille de l'échantillon
    return 4*Z+2
```

L'exécution du programme complet, confirmera sa validité en fournissant un rendu graphique tout à fait semblable à celui de l'énoncé.

Deuxième partie

On s'intéresse dans cette partie au cas où $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda \in]0; +\infty[$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- a) On note (T_1, \dots, T_n) une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, T_i suit la loi exponentielle $\mathcal{E}((n-i+1)\lambda)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note de plus $S_k = T_1 + \dots + T_k$.

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(k)$: S_k suit la loi de densité $g_{n,k}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_{n,k} = \begin{cases} n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

I. Lorsque $k = 1$, $S_1 = T_1$ suit la loi $\mathcal{E}(n\lambda)$ qui a pour densité la fonction $x \mapsto \begin{cases} \lambda n e^{-\lambda n x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Or par définition de l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, g_{n,1}(x) = \begin{cases} n \binom{n-1}{0} \lambda e^{-\lambda(n-1+1)x} (1 - e^{-\lambda x})^{1-1} = \lambda n e^{-\lambda n x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

H. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain entier $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie.

Puisque les variables $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes, alors d'après le lemme des coalitions, $S_k = T_1 + \dots + T_k$ et T_{k+1} sont indépendantes.

On étudie donc le *produit de convolution* des densités $g_{n,k}$ et f_{k+1} : $x \mapsto \begin{cases} \lambda(n-k)e^{-\lambda(n-k)x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$

qui si il est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et définit une fonction h continue sur \mathbb{R} sauf peut-être en un nombre fini de points, fera de $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$ une variable à densité, de densité h .

Pour tout réel x , on pose donc : $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n,k}(x-t)f_{k+1}(t)dt$ dont on étudie la convergence.

Remarquons que puisque $f_{k+1}(t) = 0$ si $t = 0$, on est d'emblée ramené à étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_{n,k}(x-t)f_{k+1}(t)dt = \int_{-\infty}^x g_{n,k}(u)f_{k+1}(x-u)du$ avec le changement de variable affine immédiat $u = x - t$.

De même, puisque $g_{n,k}(x-t) = 0$ si $x-t < 0 \iff t > x$, alors deux cas sont à distinguer :

- si $x < 0$, alors $] -\infty; x]$ est entièrement inclus dans $] -\infty; 0[$ sur lequel $g_{n,k}$ est nulle, donc $h(x) = 0$.
- si $x \geq 0$, alors toujours du fait que $g_{n,k}$ est nulle sur $] -\infty; 0[$, on est ramené à étudier l'intégrale

$$h(x) = \int_0^x g_{n,k}(u)f_{k+1}(x-u)du = \int_0^x n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)u} (1 - e^{-\lambda u})^{k-1} \cdot \lambda(n-k)e^{-\lambda(n-k)(x-u)} du$$

qui est bien définie comme intégrale d'un produit de fonctions continues sur un segment. Pour

tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &= n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k)x} \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} (1 - e^{-\lambda u})^{k-1} du \\ &= n(n-k) \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k)x} \left[\frac{(1 - e^{-\lambda u})^k}{k} \right]_0^x \\ &= n \frac{n-k}{k} \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k)x} [(1 - e^{-\lambda x})^k - (1 - 1)^k] \end{aligned}$$

Puisque $\frac{n-k}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! (n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} = \binom{n-1}{k}$, alors :

$$\forall x \geq 0, \quad h(x) = n \binom{n-1}{k} \lambda e^{-\lambda(n-k)x} (1 - e^{-\lambda x})^k,$$

et h coïncide bien avec la fonction $g_{n,k+1}$ ici sur \mathbb{R}^+ , mais aussi sur $] -\infty; 0[$ où les deux fonctions sont nulles.

Comme de plus, $g_{n,k+1}$ est continue sur \mathbb{R} sauf peut-être en 0 (produit de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* , fonction constante sur \mathbb{R}_-^*), on en déduit que S_{k+1} est bien une variable à densité et que $g_{n,k+1}$ est une densité de S_{k+1} , ce qui achève de prouver que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

[C.] La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, d'après le principe de récurrence.

b) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Lorsque les X_i suivent toute la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, elles ont pour fonction de répartition commune $F : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et pour densité $f : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

D'après 3.c), la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ a alors pour densité la fonction $f_{(n,k)}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{(n,k)}(x) &= n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} \\ &= \begin{cases} n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} \times (e^{-\lambda x})^{n-k} = n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les variables aléatoires S_k et $X_{(n,k)}$ suivent donc bien la même loi dans cet exemple.

9. Soit (n, k) un couple d'entiers tel que $1 \leq k \leq n$. Puisque $X_{(n,k)}$ suit la même loi que $S_k = X_1 + \dots + X_k$, qui est elle-même une somme de k variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant chacune une espérance et une variance, alors $X_{(n,k)}$ admet une espérance et une variance qui valent respectivement :

$$\mathbf{E}(X_{(n,k)}) = \mathbf{E}(S_k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda(n-i+1)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1}$$

par linéarité de l'espérance et d'après le cours sur la loi exponentielle, avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda(n-i+1))$

$$\mathbf{V}(X_{(n,k)}) = \mathbf{V}(S_k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(\lambda(n-i+1))^2} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2}$$

par indépendance des X_i et d'après la formule de cours pour la variance d'une loi exponentielle.

10. a) Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [j; j+1]$; par stricte décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+^* et du fait que $j \leq x$, on a $\frac{1}{j} \geq \frac{1}{x} \iff 0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x}$.

D'autre part, $\varphi : x \mapsto \frac{1}{j} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ est définie et dérivable sur $[j; j+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, et a pour dérivée $\varphi' : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0$ sur l'intervalle.

La fonction φ est donc croissante sur $[j; j+1]$, et atteint sur cet intervalle, un maximum qui vaut $\varphi(j+1) = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} - \frac{2}{(j+1)^2} = \frac{j^2 + 2j + 1 - (j^2 + j) - 2j}{j(j+1)^2} = \frac{1-j}{j(j+1)^2} \leq 0$ puisque $j \geq 1$.

On a donc bien : $0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}$.

b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions comparées dans la question précédente, sont positives et continues sur $[j; j+1]$ et $j < j+1$, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_j^{j+1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{x} \right) dx \leq \int_j^{j+1} \frac{2}{x^2} dx \iff 0 \leq \frac{1}{j} - [\ln(x)]_j^{j+1} \leq \left[-\frac{2}{x} \right]_j^{j+1}$$

$$\iff 0 \leq \frac{1}{j} - (\ln(j+1) - \ln(j)) \leq 2 \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right).$$

On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\ln(n-i+2) - \ln(n-i+1) \leq \frac{1}{n-i+1} \leq \ln(n-i+2) - \ln(n-i+1) + 2 \left(\frac{1}{n-i+1} - \frac{1}{n-i+2} \right)$$

et le passage à la somme dans cette double inégalité pour i variant de 1 à k donne, en tenant compte des trois télescopes qui apparaissent :

$$\ln(n+1) - \ln(n-k+1) \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n-k+1) + 2 \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\stackrel{\lambda > 0}{\iff} \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} = \mathbf{E}(X_{(n,k)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in]0; 1[$: puisque $\alpha n < n$, alors $\lfloor \alpha n \rfloor$ est un entier naturel toujours inférieur à n , qui sera aussi strictement positif dès que $\alpha n > 1$, ce qui est toujours vrai à partir d'un certain rang.

Pour n assez grand, on peut donc reprendre l'encadrement obtenu à la question précédente avec $k = \lfloor \alpha n \rfloor$:

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} \right) \leq \mathbf{E}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} - \frac{1}{n+1} \right),$$

où : $\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \alpha}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} = \alpha$ grâce à :

l'encadrement : $\alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \leq \alpha$ obtenu à la question 4.a).

On a aussi : $\frac{1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha + 0} = 0$ qui est aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Le théorème d'encadrement assure donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha).$$

11. Soit $\alpha \in]0; 1[$: d'après 9., $\mathbf{V}(X_{(n, [\alpha n])}) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{[\alpha n]} \frac{1}{(n-i+1)^2}$, où :

$$\forall i \in \llbracket 1; [\alpha n] \rrbracket, \frac{1}{(n-i+1)^2} \leq \frac{1}{(n-[\alpha n]+1)^2} \implies \sum_{i=1}^{[\alpha n]} \frac{1}{(n-i+1)^2} \leq \frac{[\alpha n]}{(n-[\alpha n]+1)^2}$$

$$\implies \mathbf{V}(X_{(n, [\alpha n])}) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{n \cdot \frac{[\alpha n]}{n}}{n^2 \cdot \left(1 - \frac{[\alpha n]}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{\lambda n} \cdot \frac{\frac{[\alpha n]}{n}}{\left(1 - \frac{[\alpha n]}{n} + \frac{1}{n}\right)^2}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\alpha n]}{n} = \alpha$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda n} \cdot \frac{\frac{[\alpha n]}{n}}{\left(1 - \frac{[\alpha n]}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = 0 \times \frac{\alpha}{(1-\alpha+0)^2} = 0$.

Comme une variance est toujours positive, le théorème d'encadrement donne bien, finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(X_{(n, [\alpha n])}) = 0.$$

12. a) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction carrée étant continue, bijective strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ :

$$\mathbf{P}\left(\left|X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right| > \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left(X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2 > \varepsilon^2\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}\left(\left(X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2\right)$$

d'après l'**inégalité de Markov**, sachant que l'existence de la variance de $X_{(n, [\alpha n])}$ garantit celle de l'espérance de $\left(X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2$.

b) La **formule de Koenig-Huygens** donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\left(X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2\right) &= \mathbf{V}\left(X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right) + \left(\mathbf{E}\left(X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)\right)^2 \\ &= \mathbf{V}(X_{(n, [\alpha n])}) + \left(\mathbf{E}(X_{(n, [\alpha n])}) + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2 \end{aligned}$$

d'après les propriétés de l'espérance (linéarité) et de la variance. Or les résultats des questions 10.c) et 11. assurent que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(X_{(n, [\alpha n])}) + \left(\mathbf{E}(X_{(n, [\alpha n])}) + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2 = 0 + \left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2 = 0,$$

donc sachant que :

$$0 \leq \mathbf{P}\left(\left|X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\mathbf{V}(X_{(n, [\alpha n])}) + \left(\mathbf{E}(X_{(n, [\alpha n])}) + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2\right),$$

le théorème d'encadrement - encore lui! - donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|X_{(n, [\alpha n])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Cela signifie bien, par définition, que la suite de variables aléatoires $(X_{(n, [\alpha n])})$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $-\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$.

13. Le résultat de la question 5.c) dans la partie I, permet de retrouver ce résultat. On est en effet dans le cas particulier où la fonction de répartition F est continue, strictement croissante, bijective de l'intervalle ouvert $]0; +\infty[$ dans $]0; 1[$.

Pour $\alpha \in]0; 1[$, on sait donc d'après 5.c) que la suite $(X_{(n, [\alpha n])})$ converge en probabilité vers $F^{-1}(\alpha)$, unique solution $x \in]0; +\infty[$ de l'équation :

$$F(x) = \alpha \iff 1 - e^{-\lambda x} = \alpha \iff e^{-\lambda x} = 1 - \alpha \iff -\lambda x = \ln(1 - \alpha) \iff x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha).$$

14. On souhaite estimer la valeur du paramètre λ à l'aide de l'observation de l'échantillon $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela on introduit pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0; +\infty[$, la variable aléatoire :

$$V_{m,t} = \frac{\text{Card}(\{i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i > t\}) + 1}{m}.$$

- a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire qui vaut 1 si $[X_i > t]$ et 0 sinon, est une variable de Bernoulli appelée **indicatrice de l'événement** $[X_i > t]$, qu'on note traditionnellement $\mathbb{1}_{[X_i > t]}$; mais alors, $\frac{\text{Card}(\{i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i > t\})}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{[X_i > t]}$ est la moyenne empirique de m variables de Bernoulli mutuellement indépendantes (d'après le lemme des coalitions, car les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ le sont) et de même loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(X_i > t) = e^{-\lambda t}$.

La **loi faible des grands nombres** assure alors que la suite $\left(\frac{\text{Card}(\{i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i > t\})}{m} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à la probabilité de succès $\mathbf{P}(X_i > t) = e^{-\lambda t}$.

La suite de variables certaines $\left(\frac{1}{m} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge par ailleurs en probabilité vers 0 : en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $\left(\mathbf{P}\left(\frac{1}{m} > \varepsilon \right) \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire égale à 0 dès que $\frac{1}{m} \leq \varepsilon \iff m \geq \frac{1}{\varepsilon}$, donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{m} > \varepsilon \right) = 0$.

On peut donc conclure, par somme de deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité, que la suite $(V_{m,t})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $e^{-\lambda t}$.

- b) Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0; +\infty[$. Remarquons que la variable aléatoire $V_{m,t}$, grâce au "+1" dans le numérateur de sa définition, prend des valeurs strictement positives, ce qui garantit la bonne définition de son logarithme ci-dessous.

$$\begin{aligned} |V_{m,t} - e^{-\lambda t}| \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) &\iff -e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) \leq V_{m,t} - e^{-\lambda t} \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) \\ &\iff e^{-\lambda t - \varepsilon} \leq V_{m,t} \leq e^{-\lambda t}(2 - e^{-\varepsilon}) \\ &\iff -\lambda t - \varepsilon \leq \ln(V_{m,t}) \leq -\lambda t + \ln(2 - e^{-\varepsilon}) \\ &\text{par stricte croissance du logarithme sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \varepsilon \geq -\ln(V_{m,t}) - \lambda t \geq -\ln(2 - e^{-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Or :

$$-\ln(2 - e^{-\varepsilon}) \geq -\varepsilon \iff \ln(2 - e^{-\varepsilon}) \leq \varepsilon \iff 2 - e^{-\varepsilon} \leq e^\varepsilon \stackrel{\varepsilon > 0}{\iff} 2e^\varepsilon - 1 \leq e^{2\varepsilon} \iff e^{2\varepsilon} - 2e^\varepsilon + 1 \geq 0.$$

On reconnaît dans la dernière expression l'identité remarquable $(e^\varepsilon - 1)^2$ toujours positive, donc on a bien par équivalences, $-\ln(2 - e^{-\varepsilon}) \geq -\varepsilon$, et donc par transitivité de l'inégalité, l'implication :

$$|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) \implies \varepsilon \geq -\ln(V_{m,t}) - \lambda t \geq -\varepsilon \implies |-\ln(V_{m,t}) - \lambda t| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire l'inclusion d'événements :

$$\left[|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) \right] \subset \left[|-\ln(V_{m,t}) - \lambda t| \leq \varepsilon \right]$$

qui donne, par croissance de la probabilité :

$$1 \geq \mathbf{P}\left(|-\ln(V_{m,t}) - \lambda t| \leq \varepsilon \right) \geq \mathbf{P}\left(|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) \right).$$

D'après la question précédente : les réels $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$ étant fixés, puisque $(V_{m,t})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la constante $e^{-\lambda t}$, alors :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon})) = \lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - \mathbf{P}(|V_{m,t} - e^{-\lambda t}| > e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon})) = 1 - 0 = 1$$

donc par encadrement :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|-\ln(V_{m,t}) - \lambda t| \leq \varepsilon) = 1 \iff \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|-\ln(V_{m,t}) - \lambda t| > \varepsilon) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a démontré que la suite de variables aléatoires $(-\ln(V_{m,t}))_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la constante λt .

c) On fixe deux réels t_1 et t_2 tels que $0 < t_1 < t_2$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$W_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \left(\frac{\text{Card}(\{i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i > t_1\}) + 1}{\text{Card}(\{i \in \llbracket 1; m \rrbracket, X_i > t_2\}) + 1} \right).$$

Notons d'abord que W_m est bien un estimateur de λ , comme fonction de variables aléatoires dont la loi dépend de λ , sans que l'expression explicite de W_m (et donc le calcul d'une réalisation de W_m) ne fasse apparaître le paramètre λ qu'on veut estimer.

Il est ensuite clair que : $W_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot (-\ln(V_{m,t_2}) + \ln(V_{m,t_1}))$.

Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{t_2 - t_1}x$ et $b = -a : x \mapsto -\frac{1}{t_2 - t_1}x$ sont affines sont continues sur \mathbb{R} ;

puisque $\ln(V_{m,t_1}) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\mathbf{P}} \lambda t_1$ et $\ln(V_{m,t_2}) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\mathbf{P}} \lambda t_2$, alors d'après la propriété du cours,

$a(-\ln(V_{m,t_2})) = -\frac{1}{t_2 - t_1} \ln(V_{m,t_2})$ converge en probabilité vers $a(\lambda t_2) = \frac{\lambda t_2}{t_2 - t_1}$

et $b(-\ln(V_{m,t_1})) = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln(V_{m,t_1})$ converge en probabilité vers $b(\lambda t_1) = -\frac{\lambda t_1}{t_2 - t_1}$.

Par somme de deux suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité :

la suite $(W_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\frac{\lambda t_2}{t_2 - t_1} - \frac{\lambda t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\lambda(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \lambda$,

et W_m est bien un estimateur convergent de λ .

Troisième partie

15. L'énoncé admet dans cette question le théorème suivant :

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Il existe une famille $(T_{n,1}, \dots, T_{n,n})$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :

- Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire $T_{n,i}$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}((n - i + 1)\lambda)$;
- Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $X_{(n,k)} = T_{n,1} + \dots + T_{n,k}$.

À la question 8.b), on a démontré que dans le cas où les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ont pour loi commune la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_{(n,k)}$ a **même loi** qu'une somme $T_1 + \dots + T_k$ de variables aléatoires telles que T_i suit la loi $\mathcal{E}((n - i + 1)\lambda)$.

Ici le théorème affirme l'**égalité des variables aléatoires** $X_{(n,k)} = T_{n,1} + \dots + T_{n,k}$, ce qui est bien plus fort que la simple égalité des lois (l'égalité des variables aléatoires implique l'égalité des lois, mais la réciproque est fautive.)

Le but de la suite de cette partie est de démontrer ce théorème dans le cas où $n = 2$.

Soit $q \in]0; 1[$ et soit $p = 1 - q$.

On dit qu'une variable aléatoire Z à valeurs dans \mathbb{N} suit la loi $\mathcal{L}(q)$ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = k) = pq^k.$$

16. On suppose que Z suit la loi $\mathcal{L}(q)$. Il est clair que la variable aléatoire $Y = Z + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p : en effet, le fait que Z soit à valeurs dans \mathbb{N} implique que Y est à valeurs dans \mathbb{N}^* , et : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(Z + 1 = k) = \mathbf{P}(Z = k - 1) = pq^{k-1}$.

On sait d'après le cours, que Y admet une espérance et une variance : les propriétés de ces dernières assurent que c'est aussi le cas pour Z , avec :

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{p} \iff \mathbf{E}(Z) + 1 = \frac{1}{p} \iff \mathbf{E}(Z) = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{q}{p^2} \iff \mathbf{V}(Z+1) = \frac{q}{p^2} \iff \mathbf{V}(Z) = \frac{q}{p^2}.$$

On a aussi : pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(Z \geq \ell) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=\ell}^{+\infty} [Z = k]\right) \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=\ell}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} pq^k \stackrel{(2)}{=} p \frac{q^\ell}{1-q} = q^\ell$$

par union disjointe (1) et d'après la formule pour une somme de série géométrique (2) qui ne commence pas au rang 0 ici, sachant que le fait que $0 < q < 1$ garantit sa convergence.

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (Z_1, \dots, Z_n) une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{L}(q)$. On pose $U_n = \min(Z_1, \dots, Z_n)$.

- a) Soit $\ell \in \mathbb{N}$; par définition du minimum de plusieurs nombres réels, on peut affirmer l'égalité d'événements :

$$[U_n \geq \ell] = [Z_1 \geq \ell] \cap [Z_2 \geq \ell] \cap \dots \cap [Z_n \geq \ell].$$

Comme les $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$\mathbf{P}(U_n \geq \ell) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(Z_k \geq \ell) = \prod_{k=1}^n q^\ell = (q^\ell)^n = q^{n\ell}.$$

- b) Puisque U_n est le minimum de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , alors U_n est elle-même à valeurs dans \mathbb{N} et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(U_n = k) = \mathbf{P}(U_n \geq k) - \mathbf{P}(U_n \geq k + 1) = q^{nk} - q^{n(k+1)} = q^{nk}(1 - q^n),$$

ce qui prouve que U_n suit la loi $\mathcal{L}(r)$ avec $\boxed{r = q^n}$.

18. Soient Z_1, Z_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(q)$. Soient k_1, k_2 deux entiers naturels. On peut écrire, puisque Z_1 et Z_2 sont à valeurs dans \mathbb{N} :

$$[Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2] = \bigcup_{\ell=k_1}^{+\infty} ([Z_1 = \ell] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) = \bigcup_{\ell=k_1}^{+\infty} ([Z_1 = \ell] \cap [Z_2 \geq k_2 + \ell]).$$

L'union est disjointe, donc par σ -additivité :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) &= \sum_{\ell=k_1}^{+\infty} \mathbf{P}([Z_1 = \ell] \cap [Z_2 \geq k_2 + \ell]) \\
 &= \sum_{\ell=k_1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_1 = \ell) \times \mathbf{P}(Z_2 \geq k_2 + \ell) \quad \text{par indépendance de } Z_1 \text{ et } Z_2 \\
 &= \sum_{\ell=k_1}^{+\infty} pq^\ell \times q^{k_2 + \ell} = pq^{k_2} \sum_{\ell=k_1}^{+\infty} (q^2)^\ell = pq^{k_2} \times \frac{(q^2)^{k_1}}{1 - q^2} \\
 &= \frac{pq^{2k_1 + k_2}}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{1}{1 + q} q^{2k_1 + k_2} \quad \text{puisque } p = 1 - q
 \end{aligned}$$

19. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Soient x, y deux réels positifs ou nuls.

a) Soit m un entier naturel non nul. On pose $Z_1 = \lfloor mX_1 \rfloor$ et $Z_2 = \lfloor mX_2 \rfloor$.

Notons que puisque X_1 et X_2 sont à valeurs dans $]0; +\infty[$, alors mX_1 et mX_2 aussi, et leurs parties entières Z_1 et Z_2 sont donc des variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N} .

Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z_1 = k) &= \mathbf{P}(\lfloor mX_1 \rfloor = k) = \mathbf{P}(k \leq mX_1 < k + 1) \stackrel{m \geq 0}{=} \mathbf{P}\left(\frac{k}{m} \leq X_1 < \frac{k + 1}{m}\right) \\
 &= \mathbf{P}\left(X_1 \leq \frac{k + 1}{m}\right) - \mathbf{P}\left(X_1 \leq \frac{k}{m}\right) \quad \text{car } X_1 \text{ est à densité} \\
 &= 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{k+1}{m}} - 1 + e^{-\lambda \cdot \frac{k}{m}} \quad \text{car } \frac{k}{m} > 0 \text{ et } \frac{k+1}{m} > 0 \\
 &= e^{-\lambda \cdot \frac{k}{m}} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot \frac{1}{m}}) = q^k(1 - q) \quad \text{avec } q = e^{-\frac{\lambda}{m}} \in]0; 1[,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que Z_1 et de même Z_2 , suivent la loi $\mathcal{L}(q)$ avec $q = e^{-\frac{\lambda}{m}}$.

b) On conserve les notations de la question précédente et on pose de plus $k_1 = \lfloor mx \rfloor$ et $k_2 = \lfloor my \rfloor$.

Puisque $m > 0$: pour $\omega \in \Omega$,

$$X_1(\omega) > x \implies mX_1(\omega) > mx \implies Z_1(\omega) = \lfloor mX_1(\omega) \rfloor \geq \lfloor mx \rfloor = k_1,$$

implications qui prouvent bien l'inclusion d'événements $[X_1 > x] \subset [Z_1 \geq k_1]$. De même :

$$Z_1(\omega) \geq k_1 + 1 \iff \lfloor mX_1(\omega) \rfloor \geq k_1 + 1 \implies mX_1(\omega) \geq \lfloor mx \rfloor + 1 \implies mX_1(\omega) > mx \implies X_1(\omega) > x,$$

d'où l'autre inclusion $[Z_1 \geq k_1 + 1] \subset [X_1 > x]$.

Toujours selon le même principe, pour $\omega \in \Omega$:

$$Z_2(\omega) - Z_1(\omega) \geq k_2 + 2 \implies Z_2(\omega) \geq Z_1(\omega) + k_2 + 2 \implies mX_2(\omega) \geq Z_1(\omega) + k_2 + 2 > mX_1(\omega) + k_2 + 1$$

$$\implies mX_2(\omega) - mX_1(\omega) > k_2 + 1 > my \implies X_2(\omega) - X_1(\omega) > y$$

et :

$$X_2(\omega) - X_1(\omega) > y \implies mX_2(\omega) > mX_1(\omega) + my \geq \underbrace{Z_1(\omega) + k_2}_{\in \mathbb{N}} \implies \lfloor mX_2(\omega) \rfloor = Z_2(\omega) \geq Z_1(\omega) + k_2$$

$$\implies Z_2(\omega) - Z_1(\omega) \geq k_2$$

Ces deux chaînes d'implications prouvent bien les deux inclusions entre événements :

$$[Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] \subset [X_2 - X_1 > y] \subset [Z_2 - Z_1 \geq k_2].$$

c) De ce qui précède, on déduit :

$$[Z_1 \geq k_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] \subset [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y] \subset [Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2],$$

donc par croissance de la probabilité et d'après le résultat de la question 18. :

$$\mathbf{P}([Z_1 \geq k_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2]) \leq \mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \mathbf{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2])$$

$$\iff \frac{1}{1+q} q^{2(k_1+1)} q^{k_2+2} \leq \mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \frac{1}{1+q} q^{2k_1} q^{k_2} \quad \text{avec } q = e^{-\frac{\lambda}{m}}$$

$$\iff \frac{1}{1+e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor + 2}{m}} \leq \mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \frac{1}{1+e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor}{m}}.$$

d) Remarquons que le terme central de l'encadrement précédent ne dépend pas de l'entier $m \in \mathbb{N}^*$: la double inégalité reste donc vraie lorsque m tend vers $+\infty$.

Or comme on a déjà eu plusieurs fois l'occasion de le démontrer dans ce sujet :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x \text{ donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} + \frac{1}{m} = x + 0 = x \text{ et de même } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor my \rfloor + 2}{m} = y.$$

La continuité de l'exponentielle sur \mathbb{R} et les opérations sur les limites donnent alors, lorsque m tend vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question précédente :

$$\frac{1}{1+e^0} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y} \leq \mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \frac{1}{1+e^0} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$$

donc par double inégalité :

$$\mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

20. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

On note $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ les variables notées précédemment $X_{(2,1)}$ et $X_{(2,2)}$, qui ne sont autres en fait, que $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_1, X_2)$ respectivement.

a) On sait que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, et qu'une densité de X_1 est bornée entre 0 et λ : le théorème de convolution assure alors que $X_1 - X_2$ est une variable à densité, ce qui suffit pour garantir que $\mathbf{P}(X_1 - X_2 = 0) = 0 \iff \mathbf{P}(X_1 = X_2) = 0$.

Par ailleurs : $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[0; +\infty[$ comme minimum de deux variables aléatoires elles-mêmes à valeurs positives.

Mais alors : $\mathbf{P}(X_{(1)} = 0) = \mathbf{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \mathbf{P}(X_1 = 0) \times \mathbf{P}(X_2 = 0) = 0^2 = 0$, donc $\mathbf{P}(X_{(1)} > 0) = \mathbf{P}(X_{(1)} \geq 0) = 1$.

De même, par définition $X_{(2)} - X_{(1)} = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$ est une variable aléatoire à valeurs positives, et $\mathbf{P}(X_{(2)} - X_{(1)} = 0) = \mathbf{P}(\min(X_1, X_2) = \max(X_1, X_2)) = \mathbf{P}(X_1 = X_2) = 0$, donc $\mathbf{P}(X_{(2)} - X_{(1)} > 0) = \mathbf{P}(X_{(2)} - X_{(1)} \geq 0) = 1$.

Les variables aléatoires $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ sont presque sûrement à valeurs strictement positives.

b) Soient x et y deux réels positifs. Les deux événements $[X_1 \leq X_2]$ et $[X_1 > X_2]$ forment un système complet d'événements, donc la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) \\ &= \mathbf{P}([X_1 \leq X_2] \cap [X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) + \mathbf{P}([X_1 > X_2] \cap [X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) \\ &= \mathbf{P}([X_1 \leq X_2] \cap [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) + \mathbf{P}([X_1 > X_2] \cap [X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y]) \\ &= \mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) + \mathbf{P}([X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y]) \end{aligned}$$

En effet, puisque x et y sont positifs, $[X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]$ implique $[X_1 \leq X_2]$, donc $[X_1 \leq X_2] \cap [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y] = [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]$ et de même pour l'autre événement, par symétrie des rôles de X_1 et X_2 .

C'est d'ailleurs cette symétrie des rôles via les lois identiques de X_1 et X_2 , qui assure que les deux probabilités de la dernière somme sont égales, et donc qu'en effet :

$$\mathbf{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) = 2\mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]).$$

c) Puisque $X_{(2)} - X_{(1)}$ est presque-sûrement à valeurs strictement positives : pour tout réel x positif,

$$\mathbf{P}(X_{(1)} > x) = \mathbf{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > 0]) = 2\mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > 0]) = e^{-2\lambda x}$$

d'après 19.d), donc pour tout réel positif x , $F_{X_{(1)}}(x) = \mathbf{P}(X_{(1)} \leq x) = 1 - e^{-2\lambda x}$; puisque $X_{(1)}$ est presque-sûrement à valeurs strictement positives, alors $F_{X_{(1)}}(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$, ce qui prouve que $X_{(1)}$ suit la loi exponentielle de paramètre 2λ .

De même, pour tout réel positif y :

$$\mathbf{P}(X_{(2)} - X_{(1)} > y) = \mathbf{P}([X_{(1)} > 0] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) = 2\mathbf{P}([X_1 > 0] \cap [X_2 - X_1 > y]) = e^{-\lambda y}$$

d'après 19.d), donc $F_{X_{(2)}-X_{(1)}}(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ si $y \geq 0$, et $F_{X_{(2)}-X_{(1)}}(y) = 0$ si $y < 0$ puisque $X_{(2)} - X_{(1)}$ est presque sûrement à valeurs strictement positives. On reconnaît alors que $X_{(2)} - X_{(1)}$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Enfin : pour tous réels strictement positifs x et y ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) &= 2\mathbf{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y} \\ &= \mathbf{P}(X_{(1)} > x) \times \mathbf{P}(X_{(2)} - X_{(1)} > y), \end{aligned}$$

ce qui prouve que les événements $[X_{(1)} > x]$ et $[X_{(2)} - X_{(1)} > y]$ sont indépendants ; il en est donc de même de leurs événements contraires $[X_{(1)} \leq x]$ et $[X_{(2)} - X_{(1)} \leq y]$, ce qui prouve que les variables aléatoires $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ sont indépendantes.

On a donc démontré l'existence de deux variables aléatoires $T_{2,1} = X_{(1)}$ et $T_{2,2} = X_{(2)} - X_{(1)}$, mutuellement indépendantes, telles que :

- $T_{2,1}$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(2\lambda) = \mathcal{E}((2 - 1 + 1)\lambda)$ et $T_{2,2}$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}((2 - 2 + 1)\lambda)$;
- $X_{(2,1)} = X_{(1)} = T_{2,1}$ et $X_{(2,2)} = X_{(2)} = X_{(1)} + X_{(2)} - X_{(1)} = T_{2,1} + T_{2,2}$.

On a donc bien démontré le théorème admis au début de cette partie dans le cas où $n = 2$.

★★★ FIN DU SUJET ★★★