

EXERCICE 1

1. a) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$: elle est donc convergente d'après le cours.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ est, d'après la question précédente, le terme général d'une série convergente.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est donc absolument convergente, donc convergente.

c) Les règles sur les équivalents donnent : $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2}$ converge puisque c'est à un facteur constant près, la série de Riemann de la question a).

Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, assure que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est elle-même convergente.

On note :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$; en, travaillant sur les sommes partielles des séries précédentes :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.$$

$$\text{Or, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - (-1)^n = \begin{cases} 1 - (-1) = 2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases},$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \text{ est impair}}} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient (toutes les séries convergent d'après 1.) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \boxed{A - B = 2C}.$$

Remarque : les séries étant toutes convergentes, il est aussi licite de travailler directement à partir des sommes totales des séries.

Selon le même principe, en séparant la somme partielle $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2}$ selon la parité de l'indice n :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N+1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N+1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Les séries sont toutes convergentes, donc on peut faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \boxed{A = \frac{1}{4}A + C}.$$

3. a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; d'après les formules de trigonométrie :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{cases} \implies \boxed{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)}.$$

b) Montrons alors par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall t \in [0; \pi[, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)},$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[I.] Pour $n = 1$: d'une part, pour tout $t \in [0; \pi[, \quad \sum_{k=1}^1 (-1)^k \cos(kt) = -\cos(t)$,

et d'autre part :

$$-\frac{1}{2} + (-1)^1 \cdot \frac{\cos\left(\frac{2+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(t + \frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(t + \frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{2\cos(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\cos(t).$$

On aura reconnu en effet [à cette étape](#), la formule de a) avec $\alpha = t$ et $\beta = \frac{t}{2}$.

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est initialisée.

[H.] Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie,

$$\text{soit : } \forall t \in [0; \pi[, \quad \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Soit $t \in [0; \pi[$. D'après la relation de Chasles pour les sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) + (-1)^{n+1} \cos((n+1)t) \\ &\stackrel{H.R.}{=} -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} + (-1)^{n+1} \cos(nt+t) \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt+t)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &\stackrel{3.a)}{=} -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(nt + \frac{t}{2}\right) - \left[\cos\left(nt + t + \frac{t}{2}\right) + \cos\left(nt + t - \frac{t}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{-\cos\left(nt + \frac{3t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

[C.] La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

4. On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$.

- a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur le segment $[a; b]$: le théorème associé (souvent appelé *des bornes atteintes*) assure que f atteint un minimum et un maximum sur $[a; b]$, donc est bornée, ce qui peut se traduire par le fait qu'il existe un réel positif K_1 tel que :

$$\forall t \in [a; b], \quad |f(t)| \leq K_1.$$

Concrètement, on peut prendre $K_1 = \max \left(\left| \max_{[a; b]} f \right|, \left| \min_{[a; b]} f \right| \right)$ mais citer le théorème suffit.

De même, le fait que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ implique que f' est continue sur $[a; b]$, donc aussi bornée selon le même théorème, d'où l'existence d'un réel positif K_2 tel que :

$$\forall t \in [a; b], \quad |f'(t)| \leq K_2.$$

Il suffit alors de prendre $M = \max(K_1, K_2)$, qui est bien un réel positif et qui vérifie :

$$\forall t \in [a; b], \quad |f(t)| \leq M \quad \text{et} \quad |f'(t)| \leq M.$$

Attention : il fallait bien ici, que M majore à la fois $|f|$ et $|f'|$ sur $[a; b]$!

- b) Soit $\lambda > 0$. La fonction $t \mapsto f'(t) \sin(\lambda t)$ est continue sur $[a; b]$ comme produit de fonctions qui le sont et $a < b$, donc d'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| \cdot |\sin(\lambda t)| dt.$$

Or pour tout $t \in [a; b]$: $|f'(t)| \leq M$ et $|\sin(\lambda t)| \leq 1$, donc $|f'(t)| \cdot |\sin(\lambda t)| \leq M$, et donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b |f'(t)| \cdot |\sin(\lambda t)| dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a) \xrightarrow{\lambda \geq 0} 0 \leq \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} M(b-a).$$

Puisque $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} M(b-a) = 0$, alors d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| = 0 \iff \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

- c) Soit $\lambda > 0$. Dans l'intégrale $\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$u(t) = f(t) \longrightarrow u'(t) = f'(t)$$

$$v'(t) = \cos(\lambda t) \longrightarrow v(t) = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t)$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, donc par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \left[f(t) \cdot \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t) \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{f(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} - \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt.$$

On a déjà vu à la question précédente, que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

Par ailleurs : $0 \leq \left| \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} \right| = \frac{|f(a)| \cdot |\cos(\lambda a)|}{\lambda} \leq \frac{M}{\lambda}$ puisque $|\cos(\lambda a)| \leq 1$ et $\lambda > 0$.

Le théorème d'encadrement donne alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} \right| = 0 \iff \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} = 0$,

et on obtient de même $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} = 0$.

Ainsi par somme de limites, l'intégration par parties montre bien que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

Ce résultat très classique est généralement connu sous le nom de **lemme de Lebesgue**.

5. Soit φ la fonction définie sur $]0; \pi]$ par :

$$\forall t \in]0; \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

a) Sur l'intervalle $]0; \pi]$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $]0; \frac{\pi}{2}]$ sur lequel la fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule jamais ($0 < t \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 < \sin(t) \leq 1$).

La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \pi]$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle où le dénominateur ne s'annule jamais, et :

$$\forall t \in]0; \pi], \quad \varphi'(t) = \frac{1 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) - t \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}.$$

b) Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0$, alors on peut utiliser l'équivalent classique : $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ pour écrire :

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2} \implies 2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \text{soit } \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2$$

par compatibilité de l'équivalence avec le quotient. Ce résultat implique que $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 2$, donc que φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 2$.

L'énoncé note encore φ la fonction ainsi prolongée.

c) On utilise ici le *théorème de prolongement* $\mathcal{C}^1$: φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \pi]$, prolongeable par continuité en 0.

On étudie alors $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t)$, en faisant intervenir les développements limités de $\sin$ et de $\cos$ en 0 à l'ordre 2 :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

donc puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0$, alors :

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \left(1 - \frac{t^2}{8}\right) + o(t^2) = o(t^2).$$

Or au dénominateur : $\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{t}{2}\right)^2 \sim \frac{t^2}{4}$, donc : $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{t^2/4} = 0$ par définition d'un "petit o".

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = 0$ existe et est finie, le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ s'applique donc, qui assure que :

φ prolongée par continuité en b), est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$, et vérifie $\varphi'(0) = 0$.

d) Soit f la fonction définie sur $[0; \pi[$ par :

$$\forall t \in [0; \pi[, \quad f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

L'énoncé admettait que : $\forall t \in [0; \pi[, \quad f(t) = \varphi(\pi - t)$.

La fonction affine $t \mapsto \pi - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi[$, à valeurs dans $]0; \pi]$ sur lequel φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Le fait de pouvoir prolonger φ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$ garantit bien que f se prolonge elle-même (par continuité en π d'abord), en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.

6. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans l'intégrale $\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt$, on pose :

$$u(t) = \pi - t \quad \longrightarrow \quad u'(t) = -1$$

$$v'(t) = \cos(kt) \quad \longrightarrow \quad v(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt &= \left[(\pi - t) \frac{1}{k} \sin(kt) \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kt) dt \\ &= \underbrace{(\pi - \pi) \frac{1}{k} \sin(k\pi) - \frac{\pi}{k} \sin(0)}_{=0} + \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{k} \cos(kt) \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{k^2} \cos(k\pi) + \frac{1}{k^2} \cos(0) = \begin{cases} -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = 0 & \text{si } k \text{ est pair car alors } \cos(k\pi) = 1 \\ \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair car alors } \cos(k\pi) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Soit alors N un entier naturel non nul : par linéarité de l'intégrale et de la somme,

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt \stackrel{6.a)}{=} \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2N+1 \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \frac{2}{k^2} = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}$$

car $k \in \llbracket 1; 2N+1 \rrbracket$ est impair si et seulement s'il est de la forme $k = 2n+1$ avec $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$.

7. a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$: d'après les résultats précédents, et en remarquant qu'on peut écrire, pour tout $t \in [0; \pi]$, $(\pi - t) = f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt) dt = -\frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cos(kt) dt \\ &\stackrel{3.b)}{=} -\frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + (-1)^{2N+1+1} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right) dt \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{4N+3}{2}t\right) dt$$

Or $\int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^\pi (\pi - t) dt \stackrel{[u=\pi-t]}{=} \int_\pi^0 u(-du) = \int_0^\pi u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$ et d'après 4.,

puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{4N+3}{2} = +\infty$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{4N+3}{2}t\right) dt = 0$, donc lorsqu'on passe à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans la dernière égalité ci-dessus, on obtient bien :

$$C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b) Il suffit alors de réutiliser les relations obtenues à la question 2 pour obtenir :

$$A = C + \frac{1}{4}A \iff \frac{3}{4}A = \frac{\pi^2}{8} \iff A = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad A - B = 2C \iff B = A - 2C = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

EXERCICE 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie I

1. a) La famille $(I_3, M, M^2, \dots, M^9)$ compte 10 matrices de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension 9 : le fait que $10 > 9$ suffit alors, d'après le cours, pour conclure que cette famille est nécessairement liée.
- b) Le fait que la famille précédente soit liée, implique par définition l'existence d'un 10-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_9) \in \mathbb{R}^{10}$ non nul (c'est-à-dire dans lequel au moins un des coefficients a_i est non nul) tel que :

$$a_0 I_3 + a_1 M + a_2 M^2 + \dots + a_9 M^9 = 0_3.$$

Mais cette relation signifie que $P(M) = 0_3$, où $P(x) = \sum_{i=0}^9 a_i x^i$, donc que P est un polynôme annulateur de M , non nul puisque ses coefficients sont les $(a_i)_{0 \leq i \leq 9}$ dont l'un au moins est non nul, et de degré inférieur ou égal à 9.

2. L'énoncé admettait que $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 - 12x - 48$ est un polynôme annulateur de M .
- a) La fonction Python utilise un nombre minimal de commandes pour vérifier que φ est bien un polynôme annulateur de M , c'est-à-dire que $M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3 = 0_3$.

```
1 import numpy as np
2
3 def PolyAnn(M):
4     M2 = np.dot(M,M) # calcul de M au carré
5     M3 = np.dot(M2,M) # calcul de M au cube
6     if M3-4*M2-12*M-28*np.eye(3) == np.zeros((3,3)):
7         return True
8     else:
9         return False
```

Remarque : les lignes 6 à 9 peuvent être rempacées par la seule commande :

```
return M3-4*M2-12*M-28*np.eye(3) == np.zeros((3,3))
```

car le résultat d'un test est toujours un booléen (et la première rédaction du test signifie en substance : *si le test est vrai, renvoyer vrai sinon renvoyer faux... autant renvoyer directement le booléen résultat du test !*)

- b) La relation : $M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3 = 0_3$ s'écrit aussi :

$$M^3 - 4M^2 - 12M = 28I_3 \iff \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3)M = I_3,$$

ce qui prouve que M est inversible, d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3)$.

3. a) On redémontre ici dans un cas particulier, l'implication du cours concernant les polynômes annulateurs.

Soit λ une valeur propre de M , et $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}$ un vecteur propre associé.

Alors : $MV = \lambda V$, donc $M^2V = M(\lambda V) = \lambda MV = \lambda^2 V$ et $M^3V = M(\lambda^2 V) = \lambda^2 MV = \lambda^3 V$, donc :

$$(M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3)V = 0_{3,1} \iff M^3V - 4M^2V - 12MV - 28V = 0_{3,1}$$

$$\iff (\lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda - 28)V = 0_{3,1} \iff \lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda - 28 = 0 \text{ car } V \neq 0_{3,1},$$

donc on a bien montré : λ est valeur propre de $M \implies \varphi(\lambda) = 0$.

b) La fonction φ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12.$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 64 + 144 = 208 > 0$, donc il admet deux racines distinctes, et puisque $208 = 2 \times 104 = 4 \times 52 = 16 \times 13$:

$$r_1 = \frac{8 - \sqrt{208}}{6} = \frac{8 - 4\sqrt{13}}{6} = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3} \text{ et } r_2 = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}.$$

Le tableau de variation de φ sur $\mathbb{R}$ est donc le suivant :

x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	0	+
φ	$-\infty$	$\varphi(r_1)$	$\varphi(r_2)$	$+\infty$

Un polynôme étant équivalent à son terme de plus haut degré aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$:

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^3, \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

L'énoncé admettant que $\varphi(r_1) > 0$, alors d'après les variations de φ , $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; r_2]$ donc φ n'admet aucune racine sur cet intervalle.

Sur $[r_2; +\infty[$, φ est continue, strictement croissante : d'après le théorème éponyme, elle réalise donc une bijection de $[r_2; +\infty[$ dans $[\varphi(r_2); +\infty[$ qui contient 0 puisque $\varphi(r_2) < \varphi(r_1) < 0$.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution λ_0 sur $[r_2; +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}$.

Le fait que $r_2 < \frac{4 + 2\sqrt{16}}{3} = \frac{12}{3} = 4$ et que $\varphi(4) = 4^3 - 4^3 - 12 \times 4 - 28 = -48 - 28 < 0 = \varphi(\lambda_0)$ assure alors que $r_2 < 4 < \lambda_0$ par comparaison des images sur un intervalle où la fonction est strictement croissante.

L'implication obtenue en a) se traduit alors par l'inclusion : $\text{Sp}(M) \subset \{\lambda_0\}$, qui signifie bien que M admet au plus une valeur propre réelle, et que celle-ci est strictement supérieure à 4.

c) On effectue ici un raisonnement par l'absurde classique : si M était diagonalisable, alors elle admettrait au moins une valeur propre, et comme il ne peut s'agir que de λ_0 , alors M serait semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 \cdot I_3$: il existerait P inversible telle que :

$$M = P(\lambda_0 I_3)P^{-1} \iff M = \lambda_0 P I_3 P^{-1} \iff M = \lambda_0 I_3.$$

La matrice M ne serait donc pas seulement semblable à $\lambda_0 \cdot I_3$: elle lui serait *égale*, ce qui n'est évidemment pas le cas !

On a donc montré, par l'absurde, que M n'est *pas* diagonalisable.

Partie 2

On pose $S = {}^tMM$.

4. D'après les propriétés de la transposée d'un produit ($\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$:

$${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM {}^t({}^tM) = {}^tMM = S,$$

donc S est bien une matrice symétrique.

Remarque : on pouvait aussi tout simplement calculer $S = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 18 \\ 4 & 13 & 14 \\ 18 & 14 & 24 \end{pmatrix}$ et constater qu'elle est effectivement symétrique, mais c'est finalement plus long... !

5. Notons d'emblée que d'après le théorème spectral matriciel, la matrice S est diagonalisable, donc possède au moins une valeur propre.

Soit alors λ une valeur propre de S , et X un vecteur propre associé : on a donc

$$SX = \lambda X \iff {}^tMMX = \lambda X \implies {}^tX {}^tMMX = \lambda {}^tXX \implies \|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

en utilisant la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, défini par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))^2, \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY \quad \text{et donc} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle = {}^tXX.$$

Puisque X est un vecteur propre, alors il est non nul et $\|X\|^2 > 0$, mais puisque M est inversible,

$$\text{on a aussi } MX \neq 0_{3,1} \implies \|MX\|^2 > 0 \implies \lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} > 0.$$

Toute valeur propre de S est bien strictement positive.

6. Le théorème spectral matriciel assure que S , matrice symétrique réelle, est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : il existe P orthogonale et D diagonale telles que $S = PD {}^tP$.

L'énoncé admettait à cet instant que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$.

7. a) Toute matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ a pour carré $\Delta^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$, donc par identification des coefficients :

$$\Delta^2 = D \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = 49 \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \{-1; 1\} \\ b \in \{-4; 4\} \\ c \in \{-7; 7\} \end{cases}$$

L'ensemble des triplets (a, b, c) solution est donc $\{-1; 1\} \times \{-4; 4\} \times \{-7; 7\}$: il y a donc $2^3 = 8$ matrices diagonales Δ telles que $\Delta^2 = D$.

L'énoncé note, dans la suite, Δ une telle matrice diagonale.

b) Quelle que soit la matrice Δ parmi les 8 possibilités, il s'agit d'une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous différents de zéro : on sait donc que Δ est inversible.

8. Grâce à ce qui précède, on peut introduire la matrice $R = P\Delta {}^tP$: c'est une matrice carrée d'ordre 3, qui vérifie :

$${}^tR = {}^t({}^tP) {}^t\Delta {}^tP = P\Delta {}^tP$$

car D , diagonale, est symétrique donc égale à sa transposée : R est elle-même symétrique, et elle vérifie de plus :

$$R^2 = P\Delta \underbrace{{}^tPP}_{=I_3} \Delta {}^tP = P\Delta^2 {}^tP = PD {}^tP = S.$$

9. La matrice $R = P\Delta {}^tP$ est alors inversible comme produit de trois matrices qui le sont (tP étant ici égale à P^{-1} puisque P est orthogonale); la formule pour l'inverse d'un produit donne :

$$R^{-1} = ({}^tP)^{-1}\Delta^{-1}P^{-1} = P\Delta^{-1}{}^tP.$$

10. On note $U = MR^{-1}$: c'est une matrice carrée d'ordre 3 qui vérifie

$${}^tUU = {}^t(MR^{-1})MR^{-1} = {}^t(R^{-1}){}^tMMR^{-1} = ({}^tR)^{-1}SR^{-1} = R^{-1}R^2R^{-1} = I_3$$

car R est symétrique, et $S = R^2$. La matrice U est donc bien orthogonale.

Partie 3

L'énoncé admet qu'il existe une matrice Δ diagonale vérifiant $\Delta^2 = D$: d'après ce qui précède, la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ convient.

On considère cette matrice Δ et les matrices U et R définies dans la partie précédente, associées à cette matrice avec les propriétés qu'on leur a démontrées.

11. La matrice $R = P\Delta {}^tP$ est semblable à Δ , donc ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres, qui sont par conséquent strictement positives vue l'hypothèse faite sur Δ .

L'énoncé suppose qu'il existe une matrice V orthogonale et T une matrice symétrique réelle à valeurs propres strictement positives telles que $M = VT$, puis pose $N = PT {}^tP$ et C_1, C_2, C_3 les vecteurs colonnes de P .

12. La relation $M = VT$ et le fait que V est orthogonale, donc inversible d'inverse $V^{-1} = {}^tV$ permettent d'écrire :

$$T = V^{-1}M = {}^tVM \text{ et } {}^tT = T, \text{ donc } T^2 = {}^tTT = {}^tMV {}^tVM = {}^tMI_3M = {}^tMM = S.$$

$$\text{et : } N^2 = ({}^tPTP)^2 = {}^tPT \underbrace{P {}^tP}_{=I_3} TP = {}^tPT^2P = {}^tPSP = D \quad \text{puisque } S = PD {}^tP \text{ et } {}^tP = P^{-1}.$$

13. Le plus simple ici est de constater que : $T^2 = S \implies ST = T^2T = T^3 = TT^2 = TS$, donc S et T commutent.

14. Soit i un entier de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$.

- a) Le vecteur E_i décrit dans l'énoncé est le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Comme celui-ci a toutes ses coordonnées nulles sauf la i -ème qui vaut 1, alors le produit matriciel PE_i se résume à la matrice colonne égale à la i -ème colonne de P , c'est-à-dire en effet la matrice C_i .

- b) D'après les relations précédemment obtenues :

$$SC_i = PD \underbrace{{}^tP \times P}_{=I_3} E_i = {}^tPDE_i.$$

Or DE_i est, comme à la question précédente, la i -ème colonne de D , qui contient un élément non nul noté λ_i à la i -ème ligne, et des zéros partout ailleurs.

Cela signifie que $DE_i = \lambda_i.E_i$, donc $SC_i = \lambda_i PE_i = \lambda_i C_i$.

Comme C_i n'est pas le vecteur nul, c'est bien un vecteur propre de S pour la valeur propre λ_i , qui correspond au i -ème élément diagonal de D .

- c) En utilisant 13. : $S(TC_i) = STC_i = TSC_i = T(\lambda_i C_i) = \lambda_i(TC_i)$, donc TC_i appartient au sous-espace propre de S associé à la valeur propre λ_i .

- d) On doit rappeler ici que S est une matrice carrée d'ordre 3, diagonalisable et qui possède trois valeurs propres distinctes 1, 16 et 49.
- Une conséquence de ce fait est que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1 : les deux vecteurs C_i et TC_i , qui appartiennent au même sous-espace propre de S , sont donc nécessairement colinéaires puisqu'ils forment une famille de 2 vecteurs d'un espace de dimension 1.
15. D'après la question précédente : pour chaque entier $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe un réel μ_i tel que $TC_i = \mu_i C_i$. Mais alors, cela signifie que tPTP est une matrice diagonale, puisque (C_1, C_2, C_3) forment une base (orthonormée) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (acquis depuis que leur matrice P est inversible car orthogonale) formée de vecteurs propres pour T : la formule de changement de base assure que $PT {}^tP = N$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.
16. La matrice diagonale N vérifie : $N^2 = {}^tPTP {}^tPTP = {}^tPT^2P = {}^tPSP = D$. Or on a vu à la Partie 2 que parmi toutes les matrices diagonales dont le carré vaut D , une seule d'entre elle a des éléments diagonaux, qui sont aussi ses valeurs propres, toutes strictement positives :

$$N = \text{Diag}(1, 4, 7).$$

Mais cette matrice est aussi Δ , ce qui implique : $T = PN {}^tP = P\Delta {}^tP = R$.

17. Pour finir : $V = MT^{-1} = MR^{-1} = U$.

PROBLÈME

Partie 1

1. Soient x et y deux réels.
- a) Lorsque t tend vers 0, $(1-t)^{y-1} = e^{(y-1)\ln(1-t)}$ tend vers $e^{(y-1)\ln(1)} = e^0 = 1$ par continuité de $\ln$ en 1 et de $\exp$ en 0, donc :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}.$$

- b) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est définie, continue et positive sur $]0; \frac{1}{2}]$.

Or l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}} dt$ est une intégrale de Riemann impropre en 0 qui converge si et seulement si : $1-x < 1 \iff x > 0$.

Le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues, positives assure qu'il en est de même pour l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

- c) Le changement de variable $s = 1-t$ est affine, donc de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant ici et bijectif de $]0; \frac{1}{2}]$ dans $[\frac{1}{2}; 1[$.

Le théorème de changement de variable assure donc que les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

et $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{x-1}s^{y-1}(-ds) = \int_{\frac{1}{2}}^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

- d) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est définie, continue et positive sur $]0; 1[$: par définition d'une intégrale doublement impropre, $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ convergent, donc si et seulement si $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1} dt$ convergent d'après c).

D'après a), on peut donc effectivement conclure que :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \text{ converge si et seulement si } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

On note désormais, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

2. Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$; l'intégrale $B(x, y)$ est donc convergente, et le changement de variable affine $s = 1 - t$ est toujours licite, qui assure que :

$$B(x, y) = \int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}(-ds) = \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds = B(y, x)$$

puisque la variable d'intégration est muette.

3. Soit $x > 0$:

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^0dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{t^x}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} = \frac{1}{x} - 0 \text{ puisque } x > 0.$$

L'intégrale n'était plus impropre qu'en 0, et $B(x, 1) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

4. a) Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$: alors $x+1 > 0$ et $y+1 > 0$, donc les intégrales $B(x, y)$, $B(x+1, y)$ et $B(x, y+1)$ convergent et la linéarité de l'intégrale (impropre convergente) peut être utilisée, qui donne :

$$\begin{aligned} B(x+1, y) + B(x, y+1) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^ydt = \int_0^1 (t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y)dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}[t+1-t]dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = B(x, y). \end{aligned}$$

- b) soit $(x, y) \in]0; +\infty[$, et soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$.

Dans l'intégrale $\int_a^b xt^{x-1}(1-t)^ydt$, on pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1-t)^y &\longrightarrow & u'(t) = -y(1-t)^{y-1} \\ v'(t) &= xt^{x-1} &\longrightarrow & v(t) = t^x \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ donc sur $[a; b]$, donc par intégration par parties :

$$x \int_a^b t^{x-1}(1-t)^ydt = \left[t^x(1-t)^y \right]_a^b + y \int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt = b^x(1-b)^y - a^x(1-a)^y + y \int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt.$$

Puisque $x > 0$ et $y > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 0$ et $\lim_{a \rightarrow 0^+} (1-a)^y = 1^y = 1$,

et de même $\lim_{b \rightarrow 1^-} b^x = 1^x = 1$ et $\lim_{b \rightarrow 1^-} (1-b)^y = 0$; puisque $B(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt$ converge, on peut passer à la limite dans l'égalité précédente lorsque a tend vers 0^+ et b tend vers 1^- , pour obtenir :

$$x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^ydt = y \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt, \quad \text{soit} \quad \boxed{xB(x, y+1) = yB(x+1, y)}.$$

c) Des deux questions précédentes, on déduit que pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$:

$$B(x+1, y) = B(x, y) - B(x, y+1) = B(x, y) - \frac{y}{x}B(x+1, y) \implies \left(1 + \frac{y}{x}\right)B(x+1, y) = B(x, y),$$

Soit puisque $1 + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x}$:
$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y}B(x, y).$$

5. Raisonnons ici par récurrence sur p pour montrer que la propriété

$$\mathcal{P}(p) : \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!},$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

[I.] Pour $p = 1$: $\forall q \in \mathbb{N}^*, B(1, q) \stackrel{q.2.}{=} B(q, 1) \stackrel{q.3}{=} \frac{1}{q}$, et puisque $\frac{(1-1)!(q-1)!}{(1+q-1)!} = \frac{0!(q-1)!}{q!} = \frac{1}{q}$, alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

[H.] Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(p+1)$ est encore vraie, soit : $\forall q \in \mathbb{N}^*, B(p+1, q) = \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!}$.

D'après 4.c) :
$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q}B(p, q) \stackrel{H.R.}{=} \frac{p}{p+q} \times \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!},$$

donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(p)$ l'est.

[C.] La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

Ainsi :
$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Partie 2

6. L'énoncé rappelle ici la définition de la fonction Gamma : $\forall \nu \in]0; +\infty[, \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}dt$, rappelle que cette intégrale est bien convergente pour tout $\nu \in]0; +\infty[,$ et définit sur cet intervalle une fonction qui vérifie : $\forall \nu \in]0; +\infty[, \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

a) La relation qui vient d'être rappelée permet de conjecturer et démontrer sans difficulté, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\mathcal{Q}(n)$: " $\Gamma(n+1) = n!$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

[I.] Pour $n = 0$: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-e^{-t} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$, donc $\Gamma(0+1) = 1$ est bien égal à $0!$ et $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

[H.] Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{Q}(n+1)$ est encore vraie, soit : $\Gamma(n+2) = (n+1)!$.

Puisque $n+1 > 0$, on sait que : $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) \stackrel{H.R.}{=} (n+1) \times n! = (n+1)!$, donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(n)$ l'est.

[C.] La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Puisque $\frac{1}{2} > 0$, alors l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ est convergente (l'intégrale est doublement impropre).

Or la fonction $\psi : t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0; +\infty[$ dans lui-même, donc le changement de variable $u = \sqrt{2t}$ est licite.

On a alors $du = \frac{2}{2\sqrt{2t}}dt \iff \sqrt{2}du = \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et $t = \frac{u^2}{2}$.

Le théorème de changement de variable assure alors que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \times \sqrt{2}du$ sont toutes deux convergentes (puisque la première intégrale l'est), et égales.

Or le cours sur la loi normale centrée, réduite nous apprend que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge et vaut 1. Comme la fonction intégrée est clairement paire sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

$$\text{donc } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \boxed{= \sqrt{\pi}}.$$

Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$, on définit $f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$

7. a) Remarquons d'emblée que $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ est strictement positive comme intégrale convergente d'une fonction continue, strictement positive sur $]0; +\infty[$ (propriété de *stricte positivité* de l'intégrale).

$$\text{Sous réserve de convergence : } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt} dt.$$

Le changement de variable $u = bt$ est affine donc licite, et assure que $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ est de même naturel, et égale en cas de convergence, à :

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{b}\right)^{a-1} e^{-u} \frac{du}{b} = \frac{b^a}{\Gamma(a)b^a} \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du.$$

On reconnaît l'intégrale $\Gamma(a)$ qui converge puisque $a > 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge et on a déjà montré ici, que cette intégrale vaut 1.

b) Pour tout $t > 0$, $f_{a,b}(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} > 0$ puisque $a > 0$, $b > 0$, $t^a > 0$, $e^{-bt} > 0$

et pour tout $t \leq 0$, $f_{a,b}(t) = 0 \geq 0$ donc $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f_{a,b}$ est aussi continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont, et est continue car constante (nulle) sur $] -\infty; 0]$, donc $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

Ces deux propriétés et le résultat de la question précédente, prouvent que $f_{a,b}$ est bien une densité de probabilité.

8. a) La fonction $f_{a,1} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ est la densité de la loi gamma $\gamma(a)$: c'est la loi suivie par une variable aléatoire X de densité $f_{a,1}$.

Le cours sur cette loi donne alors : $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = a$.

b) La fonction $f_{1,b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{b^1}{\Gamma(1)} t^{1-1} e^{-bt} = b e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ est celle d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(b)$:

c'est la loi suivie par une variable aléatoire X de densité $f_{1,b}$.

Le cours sur cette loi donne : $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{b}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{b^2}$.

L'énoncé demandant cependant spécifiquement de montrer l'espérance de la variance, il faudrait refaire ici la démonstration du cours ; pourquoi pour celle-ci et pas la précédente ?

9. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité $f_{a,b}$.

a) Par transformation affine, bX est encore une variable à densité, et une densité de bX est la fonction g définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{1}{|b|} f_{a,b}\left(\frac{t}{b}\right) = \begin{cases} \frac{1}{b} \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} e^{-b\frac{t}{b}} = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{t}{b} \leq 0 \iff t \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que bX suit la loi gamma $\gamma(a)$.

b) On sait qu'alors $\mathbf{E}(bX)$ et $\mathbf{V}(bX)$ existent toutes deux et sont toutes deux égales à a .

La linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance assurent alors que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ existent et vérifient :

$$b\mathbf{E}(X) = a \iff \boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{a}{b}} \quad \text{et} \quad b^2\mathbf{V}(X) = a \iff \boxed{\mathbf{V}(X) = \frac{a}{b^2}}.$$

10. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité, indépendantes et de densités respectives $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$ où a_1 , a_2 et b sont trois réels strictement positifs.

a) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont à densité et indépendantes : leur somme $X_1 + X_2$ est alors à densité si le *produit de convolution* de $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

On étudie donc la convergence, pour tout réel x , de :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t) \cdot f_{a_2,b}(x-t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} t^{a_1-1} e^{-bt} \cdot f_{a_2,b}(x-t) dt.$$

Le changement de variable $u = x - t$ est affine donc licite : cette intégrale est de même nature, et égale en cas de convergence, à

$$\int_x^{-\infty} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} (x-u)^{a_1-1} e^{-b(x-u)} \cdot f_{a_2,b}(u) \cdot (-du) = \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} e^{-bx} \int_{-\infty}^x (x-u)^{a_1-1} e^{bu} \cdot f_{a_2,b}(u) du.$$

Comme $f_{a_2,b}$ est nulle sur $] -\infty ; 0]$, alors cette intégrale est convergente nulle pour tout $x \leq 0$.

Pour tout $x > 0$, sous réserve de convergence et toujours du fait que $f_{a_2,b}$ est nulle sur $] -\infty ; 0]$, elle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} e^{-bx} \int_0^x (x-u)^{a_1-1} e^{bu} \cdot \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} u^{a_2-1} e^{-bu} du &= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^x (x-u)^{a_1-1} u^{a_2-1} du \\ &= \frac{x^{a_1+a_2-2} b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{a_1-1} \cdot \left(\frac{u}{x}\right)^{a_2-1} du \end{aligned}$$

Le changement de variable $z = \frac{u}{x}$, encore affine donc licite, assure que cette dernière intégrale converge (pour $x > 0$) si et seulement si l'intégrale ci-dessous converge, et dans ce cas elle lui est égale :

$$\int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{a_1-1} \cdot \left(\frac{u}{x}\right)^{a_2-1} du = \int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} x dz = x \int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz.$$

On reconnaît ici l'intégrale $B(a_1, a_2)$, bien convergente d'après la partie I puisque $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.

En définitive, le produit de convolution de $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$ converge bien pour tout réel x et définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Cette fonction h est bien continue sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle, et est continue sur $] -\infty; 0[$ comme fonction constante ; elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, soit en un nombre fini de points.

Le théorème de convolution assure donc que $X_1 + X_2$ est une variable à densité, et que h est une densité de $X_1 + X_2$.

b) Une conséquence du résultat précédent est donc que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1$.

Or il apparaît que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^{+\infty} b^{a_1+a_2} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \cdot \Gamma(a_1+a_2) \int_0^{+\infty} f_{a_1+a_2,b}(x) dx.$$

Comme la fonction $f_{a_1+a_2,b}$ est elle-même une densité de probabilité nulle sur $] -\infty; 0]$, son intégrale entre 0 et $+\infty$ vaut aussi 1 ! Donc nécessairement :

$$\frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \cdot \Gamma(a_1 + a_2) = 1 \iff B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1 + a_2)}.$$

Remarque : on a alors pour tout $x > 0$, $h(x) = \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1 + a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx}$, ce qui prouve en fait que $X_1 + X_2$ suit une loi du même type que X_1 et X_2 (appelée loi Gamma à deux paramètres, hors-programme officiel depuis la dernière réforme).

c) De tout ce qui précède, on déduit que $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est bien définie puisque $\frac{1}{2} > 0$, et vaut :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(1)} = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{0!} = \pi.$$

Partie 3

Dans cette partie et pour les questions d'informatique, les bibliothèques suivant sont importées ainsi :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
```

11. Soit (x, y) un couple de réels strictement positifs.

a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme (à densité) sur $]0; 1[$.

Une densité de U est alors la fonction $f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ étant continue et positive sur $]0; 1[$: d'après le théorème de transfert, la variable $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$, qui est presque-sûrement bien définie car $U(\Omega) =]0; 1[$, admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante converge (absolument) :

$$\int_{U(\Omega)} t^{x-1}(1-t)^{y-1} \cdot f_U(t) dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

On reconnaît l'intégrale $B(x, y)$ qui converge bien d'après la partie I puisque $x > 0$ et $y > 0$, donc $\mathbf{E}(U^{x-1}(1-U)^{y-1})$ est bien définie et :

$$\mathbf{E}(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(x, y).$$

L'énoncé admettait alors que $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ possède une variance.

- b) La fonction Python ci-dessous renvoie une simulation de $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ lorsque les réels (qui doivent être strictement positifs) x et y sont passés en arguments :

```
1 def Simul(x,y):
2     U = rd.random()    # simulation de la loi uniforme sur ]0;1[
3     return U**(x-1)*(1-U)**(y-1)
```

- c) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $]0;1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1}$, c'est-à-dire la moyenne empirique de l'échantillon $(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1})_{1 \leq k \leq n}$.

Comme $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ possède une espérance et une variance, alors il en est de même des variables $(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1})_{k \geq 1}$, qui sont aussi mutuellement indépendantes car les $(U_k)_{k \geq 1}$ le sont, d'après le lemme des coalitions.

La loi faible des grands nombres s'applique alors, qui assure que la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ des moyennes empiriques de ces variables aléatoires, converge en probabilité vers la variable certaine égale à l'espérance commune des $(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1})_{k \geq 1}$:

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1} \xrightarrow{\mathbf{P}} B(x, y).$$

- d) Il y a deux façons très classiques de simuler R_n .

```
1 def Rn(x,y):
2     S = 0
3     for k in range(n):
4         S = S + Simul(x,y)
5     return S/n
```

La boucle **for** construit une somme de n simulations indépendantes de la loi de $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ avec la fonction précédente; on divise par l'effectif pour obtenir la moyenne empirique.

On peut aussi construire un vecteur de n simulations indépendantes :

```
def Rn(x,y):
    V = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        V[k] = Simul(x,y)
    return np.mean(V)    # mean : moyenne arithmétique du vecteur
```

- e) Dans la figure proposée par l'énoncé, obtenue par simulations successives de R_n pour $x = y = \frac{1}{2}$ et pour des valeurs de plus en plus grandes de n , on constate bien la convergence (*assez rapide, d'ailleurs*) des moyennes empiriques vers une valeur constante cohérente avec le résultat obtenu à la fin de la partie 2 : $\pi = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

12. soit a un réel supérieur ou égal à 1.

- a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Une densité de X est

$$\text{alors la fonction } f_X : t \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

La fonction $t \mapsto t^{a-1}$ est continue et positive sur $]0; +\infty[= X(\Omega)$, donc d'après le théorème de transfert, $\mathbf{E}(X^{a-1})$ existe si et seulement si $\int_{X(\Omega)} t^{a-1} f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ est (absolument) convergente.

Or on reconnaît ici l'intégrale $\Gamma(a)$, bien convergente puisque $a > 0$: $\mathbf{E}(X^{a-1})$ existe et vaut

$$\mathbf{E}(X^{a-1}) = \Gamma(a).$$

De même, X^{a-1} admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $(X^{a-1})^2 = X^{2a-2}$ admet une espérance : c'est le cas si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2a-2} e^{-t} dt$ converge.

On reconnaît l'intégrale $\Gamma(2a-1)$, qui converge puisque $a \geq 1 \implies 2a-1 \geq 1 > 0$, donc X^{a-1} admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$\mathbf{E}(X^{2a-2}) = \Gamma(2a-1).$$

La variable aléatoire X^{a-1} admet donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}(X^{a-1}) = \mathbf{E}(X^{2a-2}) - (\mathbf{E}(X^{a-1}))^2 = \Gamma(2a-1) - (\Gamma(a))^2.$$

- b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{a-1}$.

Notons d'abord que M_n est bien un estimateur de $\Gamma(a)$ comme fonction de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ qui dépend certes de a (supposé connu), mais pas de $\Gamma(a)$ qu'on veut estimer.

D'après la question précédente, pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{E}(X_k^{a-1})$ existe et vaut $\Gamma(a)$ donc par linéarité de l'espérance, M_n admet une espérance qui vaut :

$$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k^{a-1}) = \frac{1}{n} \times n\Gamma(a) = \Gamma(a),$$

ce qui achève de prouver que M_n est un estimateur sans biais de $\Gamma(a)$.

L'indépendance mutuelle des $(X_k)_{k \geq 1}$ assure celle des $(X_k^{a-1})_{k \geq 1}$ (lemme des coalitions) ; l'existence de $\mathbf{V}(X_k^{a-1})$ pour tout $k \geq 1$ assure celle de M_n , qui vaut :

$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{n^2} \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k^{a-1}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k^{a-1}) = \frac{1}{n^2} \times n\mathbf{V}(X^{a-1}) = \frac{\mathbf{V}(X^{a-1})}{n}.$$

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(M_n) = 0$, ce qui implique d'après le cours, que M_n est un estimateur convergent de $\Gamma(a)$.

Au sens où la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\Gamma(a)$.

- c) Considérons la fonction `Myst` suivante :

```
1 def Myst(n):
2     U = rd.random(n)
3     X = -np.log(1-U)
4     return X
```

Elle crée un vecteur U contenant n réalisations considérées indépendantes, de la loi uniforme à densité sur $]0; 1[$.

Les opérations de la ligne suivante s'appliquent terme à terme à ce vecteur, et X contient alors n réalisations indépendantes de la variable aléatoire $-\ln(1-U)$.

On est en présence d'une utilisation classique de la *méthode d'inversion* : puisque $U(\Omega) =]0; 1[$, alors $(1-U)(\Omega) =]0; 1[$ donc $W = -\ln(1-U)$ est presque sûrement définie et $\ln(1-U)(\Omega) =]-\infty; 0[\implies W(\Omega) =]0; +\infty[$.

Ainsi $F_W(x) = \mathbf{P}(W \leq x) = 0$ pour tout $x \leq 0$, et pour tout $x > 0$:

$$F_W(x) = \mathbf{P}(W \leq x) = \mathbf{P}(-\ln(1-U) \leq x) = \mathbf{P}(\ln(1-U) \geq -x) \stackrel{(*)}{=} \mathbf{P}(1-U \geq e^{-x}) = \mathbf{P}(U \leq 1-e^{-x})$$

(*) car $\exp$ est continue, strictement croissante, bijective de $] -\infty; 0[$ dans $]0; 1[$.

Puisque $x > 0$, alors $e^{-x} \in]0; 1[\iff 1 - e^{-x} \in]0; 1[$ donc $\mathbf{P}(U \leq 1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}$ vu que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0; 1[)$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, c'est-à-dire que W suit la loi exponentielle de paramètre 1.

La fonction `Myst` renvoie donc un vecteur uniligne de taille n contenant n réalisations indépendantes, de la loi exponentielle de paramètre 1.

- d) Au vu des résultats précédents, une valeur approchée de $\Gamma(a)$ est donc obtenue en calculant une réalisation de M_n , qui en est un estimateur sans biais et convergent, $a \geq 1$ étant donné et n étant un entier naturel non nul (qu'il faut prendre assez grand).

```
1 def Approx(n, a):  
2     X = Myst(n)  
3     return np.mean(X**(a-1))
```

est la rédaction la plus courte. On peut s'inspirer de ce qui a été fait à la question 11.d) pour écrire un script équivalent avec une boucle `for`.

★★★ FIN DU SUJET ★★★