

501590

POITREAU

LOÏC

11/05/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

801590



Né(e) le

17/05/2004

Signature

Nom

POITREAU

Prénom(s)

LOÏC

20 / 20

Épreuve :

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09 / 09

Numéro de table

073

$$B_{m+1} = \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx$$

$$I_{m+1}(A) = -\frac{A^m}{e^A} + m(I_m)(A)$$

$$\text{or } \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{A^m}{e^A} = 0$$

$$\text{d'où } I_{m+1}(A) = m(I_m)(A)$$

$$\underline{I_{m+1} = m B_m}$$

car B_m converge en
 $+\infty$ d'après q.5

$$\text{7) } I_{m+1} = m I_m$$

$$I_m = \frac{1}{m} I_{m+1}$$

J'admets le résultat

Partie 3

8) f_m est continue par morceaux sauf peut être en 0

$$- \forall x \leq 0, f_m(x) = 0 \geq 0$$

$$- \forall x > 0, \frac{1}{(m-1)!} \geq 0, x^{m-1} \geq 0 \text{ et } e^{-x} \geq 0$$

$$\text{donc } f_m(x) \geq 0$$

- Donc $f_m(x)$ est positive sur \mathbb{R}

$$- \forall x < 0, \int_{-\infty}^0 f_m(x) dx = 0$$

$$\text{et } \forall x > 0, \int_0^x f_m(x) dx = \int_0^x \frac{1}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} I_m(A)$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} (m-1)! = 1$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x) dx = \int_{-\infty}^0 f_m(x) dx + \int_0^{+\infty} f_m(x) dx$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

- Donc f est une densité de probabilité

$$a) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_m(x) dx$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} I_{m+1}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} m \Gamma_m$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} m (m-1)!$$

$$= \boxed{m}$$

$$b) E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_m(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{m+1} f_m(x) dx$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{+\infty} x^{m+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \Gamma_{m+1}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} (m!)$$

$$= m$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

=

$$b) F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k$$

$$\begin{aligned} \text{donc } E(F_N) &= E\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k\right) \\ &= \frac{1}{N} \times N \times E(Y_k) \\ &= E(Y_k) = \boxed{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(F_N) &= V\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k\right) \\ &= \frac{1}{N^2} N V(Y_k) \quad \text{par indépendance de } Y \\ &= \frac{1}{N} \times m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \\ &= P(|F_m - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{m}{N\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$d) m = \cancel{100} 3$$

donc $\frac{m}{N\varepsilon^2}$ est un majorant de $P(|F_m - m| \geq \varepsilon)$

$$e) P(|F_{10} - 10| \geq \frac{1}{10}) \leq \frac{3}{600 \frac{1}{100}}$$

$$P(|m - 10| \geq \frac{1}{10}) \leq \frac{3}{6}$$

$$P(|m - 10| \geq \frac{1}{10}) \geq \frac{1}{2}$$

Numéro d'inscription

S01590

Signature 

Né(e) le

11/05/2004

Nom

POITREAU

Prénom(s)

LOIC

20 / 20

Ecritome

Épreuve :

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Numéro de table

073

Exercice 3

Partie 1

$$1) a) f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 1 \quad \text{car } \lambda = 1$$

$$b) F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$c) P(CT \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-3}$$

$$d) P_{(CT \geq 1)}(CT \geq 2) = P(CT \geq 2) = 1 - P(CT \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2}$$

$$2) a) f_U = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$F_U = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{cb) } P(X \leq x) &= P(-\ln(U) \geq x) \\ &= P(\ln(U) \geq -x) \\ &= P(U \geq e^{-x}) \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(X \leq x) = 0$$

car d'après la fonction de répartition de $U \forall x \leq 0$

$$F_U = 0$$

Partie 2

$$3) a) I_1(A) = \int_0^A e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^A = \underline{-e^{-A} + 1}$$

$$\text{b) } \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + 1 = \underline{1}$$

Donc I_1 converge et vaut 1

$$4) I_{m+1}(A) = \int_0^A x^m e^{-x} dx$$

$$\text{on pose } u'(x) = e^{-x}$$

$$u(x) = -e^{-x}$$

$$v(x) = x^m$$

$$v'(x) = m x^{m-1}$$

$$\text{Donc } I_{m+1}(A) = \left[x^m e^{-x} \right]_0^A + \int_0^A e^{-x} m x^{m-1} dx$$

$$= A^m e^{-A} + m I_m(A)$$

$$= A^m \frac{1}{e^A} + m I_m(A)$$

$$5) I_{m+1} - I_m = \int_0^A x^m e^{-x} dx - \int_0^A x^{m-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^A x^m e^{-x} (1 - x^{-1}) dx$$

$$= \int_0^A x^m e^{-x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\text{or } \forall x \in [0, A], 1 - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\text{et } x^m e^{-x} \geq 0$$

donc en intégrant entre 0 et A $I_{m+1} - I_m \geq 0$

$$I_{m+1}(A) \geq I_m(A)$$

Donc $I_m(A)$ est décroissante et d'après le théorème des gendarmes si $I_m(A)$ admet une limite finie

$I_{m+1}(A)$ admet également une limite finie

$$6) \forall m \in \mathbb{N}, \text{ on note } p(m) : \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = \underbrace{m}_1$$

un entier finie

pour $m=1$ on a

$$I_1(A) = 1 \quad \text{et } 1 \text{ est une limite finie}$$

donc $P(1)$ est vraie.

On suppose qu'à un certain rang n on a

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = p = I_n$$

$$\text{Verrions } \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = p = I_{n+1}$$

$$\text{Or } I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^A} + n I_n(A) \quad \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} n$$

Donc $P(n)$ entraîne $P(n+1)$

Conclusion : $P(1)$ est vraie, $P(n)$ est héréditaire
et $\forall m \in \mathbb{N}^*$, I_m converge

Numéro d'inscription

801390



Né(e) le

11/05/2004

Signature

Nom

POITREAU

Prénom(s)

LOIC

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07/09

Numéro de table

073

11)

$$g(x) = \frac{1}{x} = g(0_m)$$

$$\begin{aligned} \text{et } g(1) &= e - e^{-1} \\ &= 2,7 - 0,4 \\ &= 2,3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ainsi } g(u_1) = 1$$

$$\text{d'au } g(0) \leq g(u_1) \neq g(1)$$

$$\underline{0 \leq u_1 \leq 1}$$

par la monotonie
de g

13/a)

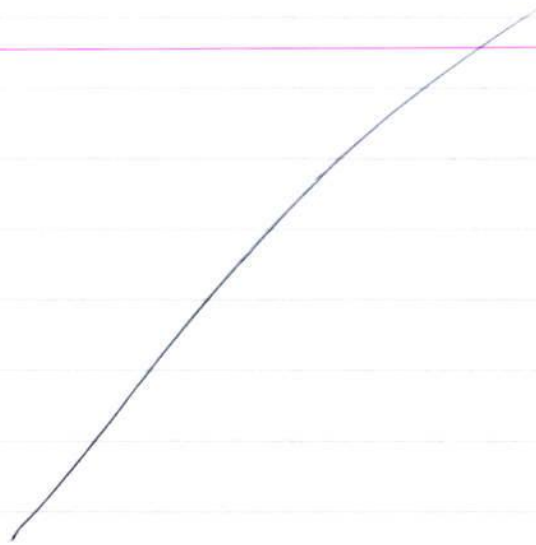
b) U_m est décroissante et minorée par 0 donc elle converge

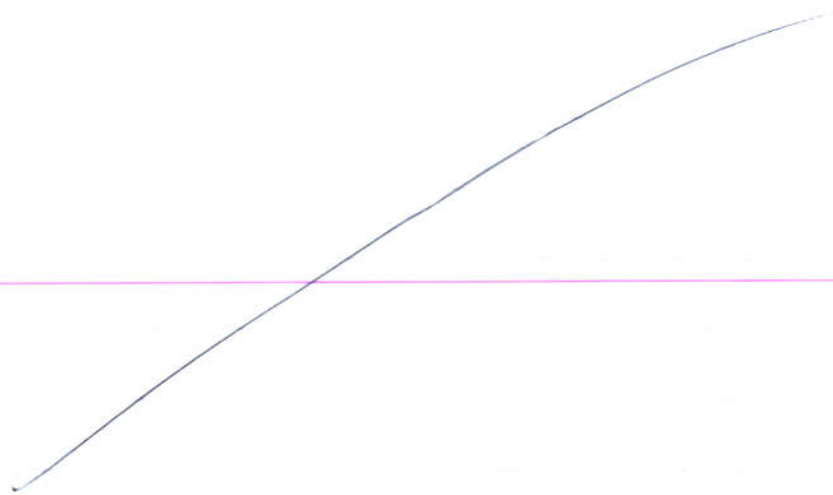
NE RIEN ÉCRIRE

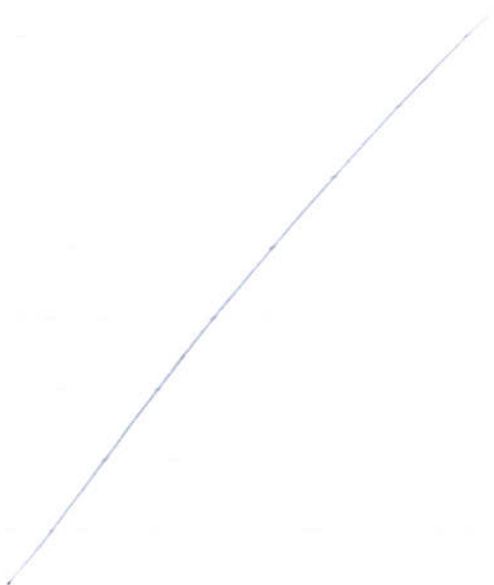
DANS CE CADRE

20 / 20

14/c) On peut émettre que U_m converge vers 0 en $t \rightarrow \infty$







Numéro d'inscription

501590



Né(e) le

11 / 05 / 2004

Signature

Nom

POITREAU

Prénom(s)

Loïc

20 / 20

Épreuve :

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 / 09

Numéro de table

073

$$(c) \text{ donc } \forall x \leq 0, g(x) - 2x \leq 0$$

$$g(x) \leq 2x$$

$$\forall x \geq 0 \quad g(x) - 2x \geq 0$$

$$\underline{g(x) \geq 2x}$$

$$b) a) f(x) - g(x) = e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}$$

$$= \underline{e^{-x} + e^{-x}}$$

est exponentielle et toujours positif donc par produit

$$e^{-x} + e^{-x} \geq 0$$

$$2e^{-x} \geq 0$$

donc $f(x) - g(x) \geq 0$

$$\underline{f(x) \geq g(x)}$$

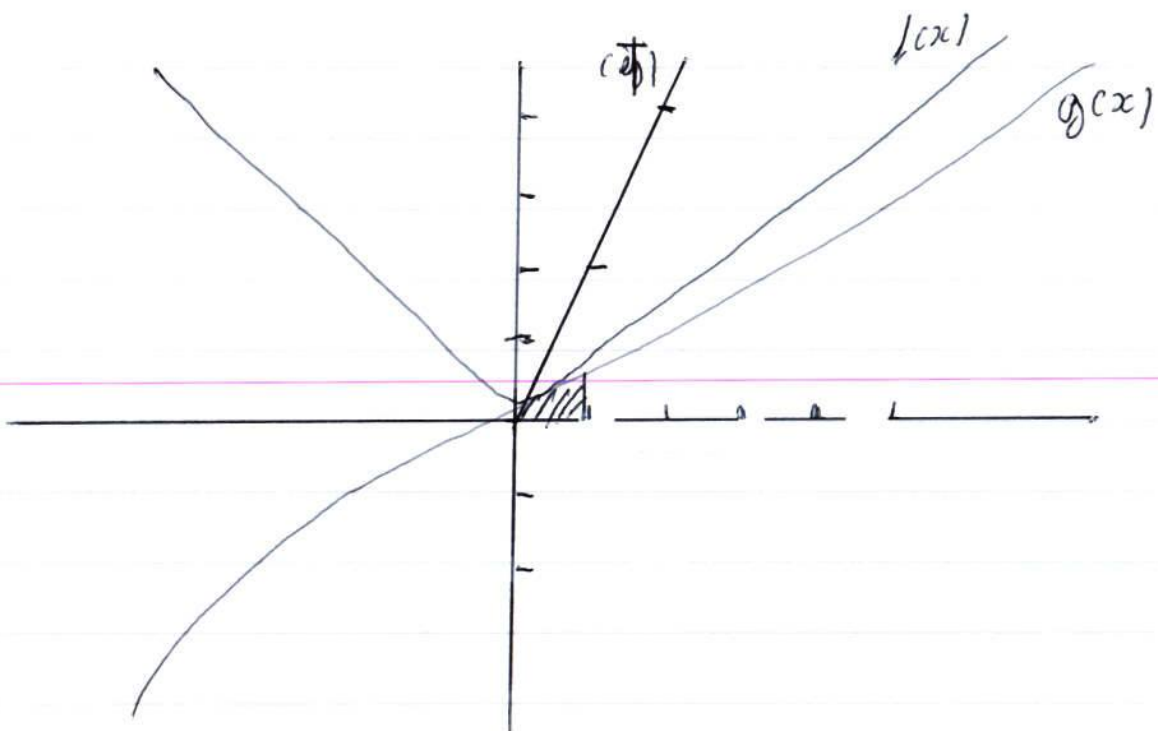
NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b) On en déduit que la courbe f est au dessus de g

7)



$$\begin{aligned} \text{a) b) } \int_0^1 f(x) dx &= [e^x - e^{-x}]_0^1 = e^1 - e^{-1} - 1 + 1 \\ &= e^1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

l'aire de la courbe f entre 0 et 1 est $e^1 - \frac{1}{e}$

$$g) a) f'(x) \leq -2x$$

$$b) f(x) - 2 - x^2 =$$

$$g) a) h'(x) = f'(x) - 2x \\ = e^x + e^{-x} - 2x$$

Or on a vu que f était convexe donc au dessus de toutes ces tangentes

$$\text{ainsi } f(x) - 2 - x^2 \geq 0 \\ \underline{f(x) \geq 2 + x^2}$$

$$c) h'(x) = g'(x) - 2 - x^2 \\ = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$$

d) $\forall x \geq 0$, $g(x)$ est convexe donc au dessus de en dessous de ces tangentes

$$\text{d'où } g(x) - (2x + \frac{1}{3}x^3) \leq 0$$

$$\underline{g(x) \leq 2x + \frac{1}{3}x^3}$$

$\forall x \geq 0$, $g(x)$ est convexe donc au dessus de ces tangentes

$$\text{ainsi } g(x) - (2x + \frac{1}{3}x^3) \geq 0$$

$$\underline{g(x) \geq 2x + \frac{1}{3}x^3}$$

Partie 2

(1) $g(x)$ est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} ,

$$-\frac{1}{m} \in g(-\infty; +\infty)$$

- Donc d'après le théorème de bijection $g(x) = \frac{1}{m}$

admet une unique solution notée u_m .

(2) $\forall m \in \mathbb{N}$, on note $f(m) : u_m \geq 0$

pour $m=1$ on a :

$$\therefore 0 \leq u_1 \leq 1$$

donc P(1) est vraie

On suppose $u_m \geq 0$: vérifions $u_{m+1} \geq 0$

$$\text{or } g(u_m) = \frac{1}{m}$$

$$\text{donc } g(u_m) \geq 0 \quad \text{et } u_m \geq 0$$

$$\text{donc et } \forall x \geq 0, g \geq 0$$

J'admets $u_m \geq 0$

Numéro d'inscription 301590

Signature 



Né(e) le 11/05/2004

Nom POITREAU

Prénom(s) LOIC

20 / 20

Écriticome

Épreuve :

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 09

Numéro de table C73

Exercice 2

11, de la forme $u(x) + v(x) = u'(x) + v'(x)$

$$u(x) = e^x$$

$$u'(x) = e^x$$

$$v(x) = e^{-x}$$

$$v'(x) = -e^{-x}$$

$$\text{d'où } f'(x) = e^x - e^{-x} = g(x)$$

pour $g'(x)$:

$$u(x) = e^x$$

$$u'(x) = e^x$$

$$v(x) = -e^{-x}$$

$$v'(x) = e^{-x}$$

$$g'(x) = u'(x) + v'(x) = e^x + e^{-x} = f(x)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE


20 / 20

$$2) a) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - e^{-x} = -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

3) a)

| | | |
|---------|--|-----------|
| | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | + | |
| $g(x)$ |  | |

car $g'(x)$ est une somme de deux fonctions exponentielles
et $e^x \geq 0$

$$\text{donc } e^x + e^{-x} \geq 0$$

3) a) - $g(x)$ est strictement croissante et continue sur \mathbb{R}

$$- 0 \in]-\infty; +\infty[$$

- Donc d'après le théorème de l'injection $g(x) = 0$
admet une unique solution notée 2.

c)

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $g(x)$ | - | 0 | + |

$$cc) f'(x) = g(x) \text{ et } g'(x) = f(x)$$

donc

| | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|------------|--------------------|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | \searrow | $\nearrow +\infty$ |

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$d) f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\underline{f''(x) = e^x + e^{-x}}$$

$$1. e^x \geq 0$$

$$e^{-x} + e^x \geq 0$$

$$f''(x) \geq 0$$

car e exponentielle et toujours positif

Donc f est convexe

$$S|_y = g'(c) (x-0) + g(c)$$

~~$f(c) = 0$~~ $g(c) = 2$

~~$f'(c) = 2$~~ $g'(c) = 0$

donc $xy = 2x$

(b) $g(x) - xy = e^x - e^{-x} - 2x$

Cependant $\nexists g''(x) = f'(x)$

$\forall x \leq 2, f'(x) \leq 0$

$\forall x \geq 2, f'(x) \geq 0$

Donc $\forall x \leq 2, g''(x) \leq 0$ donc en dessous de toutes ces tangentes car concave

$\forall x \geq 2, g''(x) \geq 0$ donc au dessus de toutes ces tangentes car convexe

d'au

| | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|-------------|--------------------------------|-----|-------------------------------|
| $g(x) - xy$ | - | | + |
| | $\nexists g(x) \leq y$ | | $g(x) \geq y$ |
| | g et en dessous de la droite y | | g et au dessus de la droite y |

Numéro d'inscription

501890



Né(e) le

11 / 03 / 2004

Signature

Nom

P O I T R E A U

Prénom (s)

L O I C

20 / 20

Épreuve :

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 / 09

Numéro de table

073

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on note } p(n) : C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$$

pour $n=1$ on a

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{5^{1-1}} M^{1-1} C_1 = C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $P(1)$ est vraie.

$$\text{On suppose } C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$$

$$\text{Véifions } C_{n+1} = \frac{1}{5^n} M^n C_1$$

$$\begin{aligned} \text{Or } C_{n+1} &= \frac{1}{5} M C_n = \frac{1}{5} M \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1 \\ &= \frac{1}{5} M M^{n-1} C_1 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{5} M^n C_1}} \end{aligned}$$

Donc $P(n)$ entraîne $P(n+1)$

Conclusion: $P(1)$ est vraie, $P(n)$ est héréditaire
 et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} U^{n-1} C_1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(c) \quad C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1} + 2^{n-1} & 5^{n-1} - 2^{n-1} & 5^{n-1} - 2^{n-1} \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} & 5^{n-1} + 2^{n-1} & 5^{n-1} - 2^{n-1} \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} & 5^{n-1} - 2^{n-1} & 5^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } P(X_n=1) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1} + 2^{n-1})$$

$$P(X_n=2) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1} - 2^{n-1})$$

$$P(X_n=3) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1} - 2^{n-1})$$

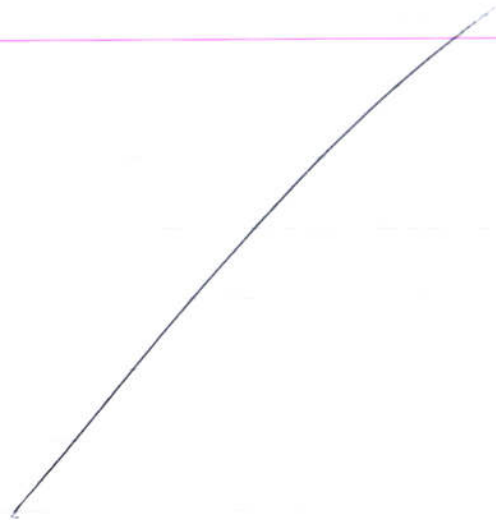
$$1) |a| E(X_n) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1} + 2^{n-1}) + 2 \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1} - 2^{n-1})$$

$$+ \frac{1}{5^{n-1}} (5^{n-1} - 2^{n-1})$$

$$= \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{3} (5^{n-1} + 2 + 2 \times 5^{n-1} - 2^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} - 3 \times 2^{n-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{3} = 0 \quad \text{car } 0 < \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 1$$

Donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = 0$





Numéro d'inscription

5 0 1 5 9 0

Né(e) le

1 1 / 0 5 / 2 0 0 4

Signature



Nom

P O I T R E A U

Prénom (s)

L O I C

20 / 20



Épreuve:

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 3 / 0 9

Numéro de table

0 7 3

Partie 2

8) a) $P(X_1=1) = 1$ donc la probabilité que le chat soit dans la même maison en X_2 est de $\frac{3}{5}$ d'où $P(X_2=1) = \frac{3}{5}$

Enfin il sera dans la maison deux ou trois de façon équiprobable

d'où $P(X_2=2) = \frac{1}{5}$ et $P(X_2=3) = \frac{1}{5}$

$$b) E(X) = 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$$

$$= \boxed{\frac{8}{5}}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5}$$

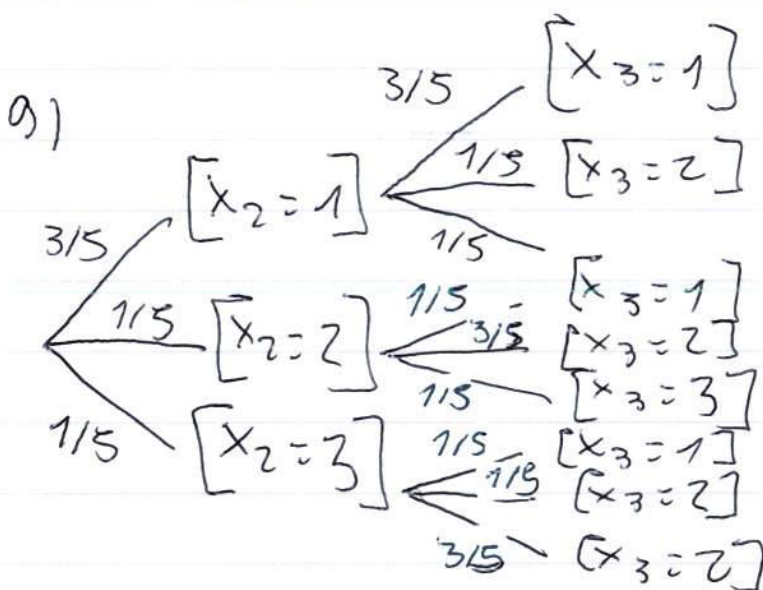
$$= \frac{16}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{16}{5} - \frac{64}{25}$$

$$= \frac{80 - 64}{25}$$

$$= \frac{16}{25}$$



$\{X_2=1; X_2=2; X_2=3\}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités

Totales ;

$$\begin{aligned} P(X_3=1) &= P(X_2=1 \cap X_3=1) + P(X_2=2 \cap X_3=1) + P(X_2=3 \cap X_3=1) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{9}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} \\ &= \boxed{\frac{11}{25}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_3=2) &= P(X_2=1 \cap X_3=2) + P(X_2=2 \cap X_3=2) + P(X_2=3 \cap X_3=2) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{1}{25} \\ &= \boxed{\frac{7}{25}} \end{aligned}$$

De façon analogue $P(X=3) = \frac{7}{25}$

$$P(X_3=3 | X_2=2) = \frac{P(X_2=2 | X_3=3) \times P(X_3=3)}{P(X_3=2)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{7}{25}}{\frac{7}{25}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$10) a) C_{m+1} = \begin{pmatrix} P(X_{m+1}=1) \\ P(X_{m+1}=2) \\ P(X_{m+1}=3) \end{pmatrix}$$

Or $\{[X_m=1], [X_m=2], [X_m=3]\}$ forment un système complet

d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$P(X_{m+1}=1) = P(X_m=1) \times P(X_{m+1}=1) + P(X_m=2) \times P(X_{m+1}=1)$$

$$+ P(X_m=3) \times P(X_{m+1}=1)$$

$$= \frac{3}{5} P(X_m=1) + \frac{1}{5} P(X_m=1) + \frac{1}{5} P(X_m=1)$$

De façon analogue

$$P(X_{m+1}=2) = \frac{1}{5} P(X_m=1) + \frac{3}{5} P(X_m=2) + \frac{1}{5} P(X_m=3)$$

$$P(X_{m+1}=3) = \frac{1}{5} P(X_m=1) + \frac{1}{5} P(X_m=2) + \frac{3}{5} P(X_m=3)$$

$$\text{et } \frac{1}{5} M C_m = \begin{pmatrix} P(X_m=1) \\ P(X_m=2) \\ P(X_m=3) \end{pmatrix} \left(\begin{array}{l} \frac{3}{5} P(X_m=1) + \frac{1}{5} P(X_m=2) + \frac{1}{5} P(X_m=3) \\ \frac{1}{5} P(X_m=1) + \frac{3}{5} P(X_m=2) + \frac{1}{5} P(X_m=3) \\ \frac{1}{5} P(X_m=1) + \frac{1}{5} P(X_m=2) + \frac{3}{5} P(X_m=3) \end{array} \right)$$

$$= C_{m+1}$$

$$\text{Donc } C_{m+1} = \frac{1}{5} M C_m$$

Numéro d'inscription 5 0 1 5 9 0

Signature 



Né(e) le 1 1 / 0 5 / 2 0 0 4

Nom P O I T R E A U

Prénom(s) L O I C

20 / 20



Épreuve :

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 7 / 0 9

Numéro de table 0 7 3

Exercice 1

1/a)

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = J}}$$

b)

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{3J}}$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Donc $M^2 = 7J + 4I$

$$(d) \quad 7M - 10I = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} = M^2$$

$$(a) \quad M^2 = 7M - 10I$$

$$\Leftrightarrow M^2 - 7M + 10I = 0$$

Donc ~~$P(x)$~~ $R(x)$ est un polynôme annulateur de M

~~$$(a) \quad \Delta = 49 - 40 = 9$$~~

~~$$\text{donc } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$~~

~~$$\text{et } x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$~~

$$b) \quad R(2) = 4 - 14 + 10 = 0$$

Donc 2 est une racine de R

$$\Delta = 49 - 40 = 9$$

$$x_1 = \frac{7 - 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

Donc 5 est également une racine de R ,

(c) Les valeurs propres possible de M sont 2 et 5

$$3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$MU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$$

Donc U est un vecteur propre $\neq 0$ associé à la valeur propre 5

$$4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2V$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2W$$

Ce qui prouve que les vecteurs ^{propres} V et W sont des vecteurs propres de M associés à la valeur propre 2.

$$5) a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

Donc Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{3} P$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } QP &= 3I \\
 QPP^{-1} &= 3IP^{-1} \\
 Q &= 3
 \end{aligned}$$

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où $PD = MP$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \text{ on a } M^m = \frac{1}{3} PD^m Q$$

pour $m = 0$ on a :

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} PD^0 Q = \frac{1}{3} PQ = \frac{1}{3} 3I = I_3$$

Donc P est inversible

Numéro d'inscription

501590

Né(e) le

11 / 05 / 2004

Signature



Nom

P O I T R E A U

Prénom (s)

L O I C

20 / 20



Épreuve :

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07 / 09

Numéro de table

073

On suppose qu'à un certain rang n on a $U^n = \frac{1}{3} P D^n Q$

Vérifions $U^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$

~~$$\begin{aligned}
 \text{Or } U^n \times U &= \frac{1}{3} P D^n Q U \\
 &= \frac{1}{3} P D^n Q P D P^{-1}
 \end{aligned}$$~~

car $P D$

$$\text{Or } U \times U^n = U \frac{1}{3} P D^n Q$$

$$= P D P^{-1} \frac{1}{3} P D^n Q$$

car $P D = U P$

$$\Leftrightarrow P D P^{-1} = U$$

$$= P D \frac{1}{3} I D^n Q$$

$$= \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$$

Donc $P(n)$ entraîne $P(n+1)$

Conclusion : $P(0)$ est vraie, $P(n)$ est héréditaire
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U^n = \frac{1}{3} P D^n Q$

Partie 2

$$\begin{aligned}
 6) a) \frac{U_{m+1}}{U_m} &= \frac{5(a_{m+1}) + b_{m+1}}{5a_m + b_m} = \frac{5(7a_m + b_m) + 10a_m}{5a_m + b_m} \\
 &= \frac{25a_m + 5b_m}{5a_m + b_m} = \frac{5(5a_m + b_m)}{5(a_m + \frac{1}{5}b_m)} \\
 &= \frac{\cancel{5} a_m + b_m}{a_m + \frac{1}{5}b_m} \times 5 \\
 &= \boxed{5}
 \end{aligned}$$

Donc U_n est une suite géométrique de raison 5

$$u_0 = 5a_0 + b_0 = 1$$

$$\text{Donc } U_n = (5)^n$$

$$\begin{aligned}
 b) v_{m+1} &= -2a_{m+1} - b_{m+1} \\
 &= -2(7a_m + b_m) + 10a_m \\
 &= -14a_m - 2b_m + 10a_m \\
 &= \cancel{-14} - 4a_m - 2b_m
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{v_{m+1}}{v_m} = \frac{-4am - 2bm}{-2am - bm} = \frac{2(-2am - bm)}{-2am - bm} = \boxed{2}$$

Donc v_m est une suite géométrique de raison 2

$$v_0 = -1$$

$$\text{donc } \underline{v_m = -2^m}$$

$$c) \begin{cases} u_m = 5am + bm \\ v_m = -2am - bm \end{cases}$$

$$L1 + L2 \begin{cases} u_m + v_m = 3am \\ v_m = -2am - bm \end{cases}$$

$$\text{D'où } u_m + v_m = 3am$$

$$\frac{1}{3}(u_m + v_m) = am$$

$$\underline{\frac{1}{3}(5^m - 2^m) = am}$$

$$\text{et } u_m - 5am = bm$$

$$u_m - \frac{5}{3}(5^m - 2^m) = bm$$

$$(5)^m - \frac{1}{3}(5^{m+1} - 5 \times 2^m) = bm$$

$$= \frac{1}{3}(3 \times 5^m - 5^{m+1} + 5 \times 2^m)$$

$$= \frac{1}{3}(5^m(3-5) + 5 \times 2^m) = \underline{\underline{\frac{1}{3}(5 \times 2^m - 2 \times 5^m)}}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $f(n) : M^n = a_n M + b_n I$

pour $n=0$ on a

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad a_0 M + b_0 I = I_3$$

Donc P.C.O.I est vraie.

On suppose qu'il a un certain rang n on a $M^n = a_n M + b_n I$

Verifions $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$

$$\text{Or } M^{n+1} = \cancel{(a_n M + b_n I)}$$

J'admets la récurrence:

$$\begin{aligned} \forall M^n &= \frac{1}{3} (5^m - 2^m) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \times 2^m - 2 \times 5^m & 0 & 0 \\ 0 & 5 \times 2^m - 2 \times 5^m & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 2^m - 2 \times 5^m \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^m + 2^{m+1} & 5^m - 2^m & 5^m - 2^m \\ 5^m - 2^m & 5^m + 2^{m+1} & 5^m - 2^m \\ 5^m - 2^m & 5^m - 2^m & 5^m + 2^{m+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$