

## EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, la lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul.  
 On considère la fonction  $f_n$  définie par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

1. 1.a. Montrer que  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_n$  est polynomiale, elle est donc dérivable sur  $[0; 1]$  et, pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n k^2 x^{k-1} \\ &\geq 1 \end{aligned} \quad \leftarrow x \geq 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; 1], f'_n(x) > 0$$

**Conclusion :** pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

1.b. En déduire que l'équation  $f_n(x) = 1$ , d'inconnue  $x$ , possède une seule solution, notée  $u_n$ , élément de  $[0, 1]$ .  
 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- On sait que la fonction  $f_n$  est :
  - ✓ continue sur  $[0; 1]$  (car polynomiale),
  - ✓ strictement croissante sur  $[0; 1]$  (question précédente).

Ainsi, par théorème de bijection, la fonction  $f_n$  est bijective de  $[0; 1]$  dans  $f([0; 1])$ .  
 Or  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$ , donc

$$f([0; 1]) = [f(0); f(1)]$$

Mais :

$$f(0) = 0$$

et

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction  $f_n$  est bijective de  $[0; 1]$  dans  $\left[0; \frac{n(n+1)}{2}\right]$ .

- Enfin,  $n \geq 1$ , donc  $n(n+1) \geq 2$  et ainsi  $1 \in \left[0; \frac{n(n+1)}{2}\right]$ .

Par conséquent, 1 possède un et un seul antécédent dans  $[0; 1]$  par  $f_n$ .

**Conclusion :** pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f_n(x) = 1$  possède une unique solution sur  $[0; 1]$ , notée  $u_n$ .

1.c. Donner la valeur de  $u_1$ .

Par définition,  $u_1$  est l'unique solution sur  $[0; 1]$  de l'équation  $f_1(x) = 1$ . Or, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f_1(x) = x$ .

**Conclusion :**  $u_1 = 1$ .

2. 2.a. Pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ , exprimer  $f_{n+1}(x)$  en fonction de  $f_n(x)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $x \in [0; 1]$ . On a :

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^k$$

♥ L'avis du chef ! ♥

Un très bon exercice, très classique, sur les suites implicites. Parfait pour s'entraîner, dès la 1A, même s'il est parfois un peu trop guidé...

✍ Rédaction

On rédige en deux temps :  
 • le théorème de bijection appliqué à  $f_n$   
 • l'existence d'un unique antécédent de 1 par  $f_n$ .

Important !

On veut une expression claire de l'intervalle image pour justifier que  $1 \in f([0; 1])$ . C'est indispensable pour conclure !

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n kx^k + (n+1)x^{n+1} \\
&= f_n(x) + (n+1)x^{n+1}
\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], f_{n+1}(x) = f_n(x) + (n+1)x^{n+1}$ .

2.b. En déduire que  $f_{n+1}(u_n) \geq 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente, licite car  $u_n \in [0; 1]$  :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(u_n) &= f_n(u_n) + (n+1)u_n^{n+1} \\
&= 1 + (n+1)u_n^{n+1} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{par définition de } u_n, f_n(u_n) = 1 \\ u_n \geq 0 \text{ et } n+1 \geq 0, \text{ donc } (n+1)u_n^{n+1} \geq 0 \end{array} \right\}$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(u_n) \geq 1$ .

2.c. Utiliser les variations de  $f_{n+1}$  pour conclure que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente :

$$f_{n+1}(u_n) \geq 1$$

Mais, par définition,  $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ ... D'où :

$$f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$$

Or  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$  (et  $u_n, u_{n+1} \in [0; 1]$ ) :

$$u_n \geq u_{n+1}$$

**Conclusion :** la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

2.d. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

On sait que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- ✓ décroissante (question précédente),
- ✓ minorée (par 0 par définition).

**Conclusion :** par théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ .  
Et, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0; 1]$ , on a  $\ell \in [0; 1]$ .

**Important !**

La **stricte** monotonie est nécessaire pour "désappliquer" une fonction sur une inégalité, qu'elle soit large ou stricte.

♥ **L'avis du chef !** ♥

C'est un peu dommage que l'énoncé soit à ce point détaillé...

► **Réflexe !**

Quand on a une minoration/majoration sur une suite convergente, on en obtient également une sur sa limite : cela ne coûte pas grand chose et peut ensuite servir. Autant le préciser...

**SUR LES SUITES IMPLICITES...**

On peut résumer les suites implicites en deux cas :

- (1) les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  solutions d'une équation  $f(x) = v_n$ , où  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite connue et  $f$  une fonction **ne dépendant pas de  $n$** .

Dans ce cas, après avoir démontré le caractère bijectif de  $f$  (sur un bon intervalle, permettant de définir  $u_n$ ), on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f^{-1}(v_n)$$

Cette expression permet alors bien souvent d'obtenir variation et limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dans les annales :

- Ecricome 2023 Appli - Exercice 2
- EDHEC 2021 E - Exercice 1
- EML 2020 E - Exercice 1 (on part d'une suite implicite définie comme dans second cas, mais on se ramène ensuite à ce cas-ci)

- (2) les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  solutions d'une équation  $f_n(x) = a$ , où  $a$  est un réel **ne dépendant pas de  $n$**  et  $f_n$  une fonction dépendant de  $n$ .

Dans ce cas, l'étude du sens de variations de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suit très souvent le schéma suivant :

- (a) comparer  $f_n(x)$  et  $f_{n+1}(x)$  dans le but de comparer  $f_n(u_n)$  et  $f_{n+1}(u_n)$ ;
- (b) puisque  $f_n(u_n) = a = f_{n+1}(u_{n+1})$ , on en déduit une comparaison de  $f_{n+1}(u_n)$  et  $f_{n+1}(u_{n+1})$ ;
- (c) on en déduit une comparaison entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$  à l'aide des variations de  $f_{n+1}$ .

Dans les annales :

- Ecricome 2019 E - Exercice 2
- Ecricome 2008 E - Exercice 2
- EDHEC 2000 E - Exercice 3

Dans les deux cas, il faut se laisser guider par l'énoncé qui donne souvent des pistes, et **revenir à l'égalité définissant la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$**  en cas de difficulté/doute !

3. 3.a. Pour tout réel  $x \neq 1$ , rappeler la formule donnant  $\sum_{k=0}^n x^k$  en fonction de  $x$  et  $n$ .

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \neq 1, \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

3.b. En déduire que, pour tout réel  $x$  différent de 1, on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $g : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ .

- La fonction  $g$  est polynomiale, donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

- On sait également que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^n x^k - 1 \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

En dérivant sous cette forme, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \neq 1, \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

3.c. Donner alors une expression sans symbole  $\sum$  de  $f_n(x)$  pour  $x \in [0, 1[$ .

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1[, f_n(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

4. 4.a. Déterminer  $u_2$  puis en déduire que, si  $n$  est supérieur ou égal à 2, on a :  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ .

- Par définition,  $u_2$  est l'unique solution sur  $[0; 1]$  de l'équation  $f_2(x) = 1$ . Or, pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$\begin{aligned} f_2(x) = 1 &\iff 2x^2 + x - 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \curvearrowright x \in [0; 1] \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } u_2 = \frac{1}{2}.$$

- Par définition, on a déjà pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ . Et d'après la question 2.c., la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, u_n \leq u_2$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.$$

#### Petite remarque

On peut également poser  $g : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ , dont la dérivée est encore la fonction  $x \mapsto \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ ... Au choix !

#### ♥ Astuce du chef ! ♥

Pour simplifier les calculs, on n'utilise volontairement pas l'autre formule de somme géométrique donnant directement  $\sum_{k=p}^n x^k$ ... On ne met pas non plus sur même dénominateur !

#### Ca fait plaisir !

On aime commencer en reconnaissant une des questions classiques !

4.b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n^n$ .

- D'après la question précédente et par croissance, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , de la fonction  $\cdot^n$  sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, 0 \leq u_n^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

**Conclusion :** par théorème d'encadrement, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$ .

- En reprenant l'encadrement précédent, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, 0 \leq nu_n^n \leq n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc par croissances comparées, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

**Conclusion :** par théorème d'encadrement, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n^n = 0$ .

4.c. En revenant à la définition de  $u_n$ , montrer, pour  $n \geq 2$ , l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}$$

Soit  $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$ . Par définition de  $u_n$ , on a :

$$f_n(u_n) = 1$$

Autrement dit, d'après la question 3.c., licite car  $n \geq 2$ , donc  $u_n \in [0; 1[$  :

$$\frac{nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} + u_n}{(1-u_n)^2} = 1$$

D'où :

$$nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} + u_n = (1-u_n)^2$$

Et donc :

$$nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2 - u_n$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}$ ,  $u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}$ .

4.d. Donner finalement la valeur de  $\ell$ .

D'après la question précédente, on a pour tout  $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$  :

$$\begin{aligned} u_n^2 - 3u_n + 1 &= nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1} \\ &= u_n^2 \times nu_n^n - u_n \times nu_n^n - u_n \times u_n^n \end{aligned}$$

Or  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, donc en utilisant la question 4.b. on obtient, par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 \times nu_n^n = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times nu_n^n = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times u_n^n = 0$$

D'où, en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$$

L'équation  $x^2 - 3x + 1 = 0$  possède deux solutions sur  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Or on sait que  $\ell \in [0; 1]$  et  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2}$ , donc  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \notin [0; 1]$ .

**Conclusion :**  $\ell = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

**✓ Rigueur !**

Quand on utilise un théorème ou une propriété, on en rappelle les hypothèses pour vérifier que l'on peut le faire. Quand on utilise un résultat précédent, on fait de même !

## EXERCICE 2

♥ L'avis du chef ! ♥

Exercice très classique d'algèbre linéaire. A savoir traiter en entier... et même avec un peu moins d'aide de la part de l'énoncé !

On note  $E$  l'ensemble des matrices de la forme  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a - b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ , où  $a$  et  $b$  sont des réels.

1. 1.a. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

On a :

$$\begin{aligned} E &= \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect}(M(1, 0), M(0, 1)) \end{aligned}$$

Et  $M(1, 0), M(0, 1) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Conclusion :**  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1.b. Donner une base de  $E$  et en déduire sa dimension.

La famille  $(M(1, 0), M(0, 1))$  est :

- ✓ génératrice de  $E$  d'après la question précédente,
- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

**Conclusion :** la famille  $(M(1, 0), M(0, 1))$  est une base de  $E$  et donc  $\dim(E) = \text{Card}(M(1, 0), M(0, 1)) = 2$ .

2. Justifier sans calcul que les matrices de  $E$  sont diagonalisables mais pas inversibles.

- Remarquons que les matrices de  $E$  sont symétriques (à coefficients réels), donc sont diagonalisables.
- Remarquons également que les colonnes 1 et 3 des matrices  $M(a, b)$  sont identiques ; donc les matrices  $M(a, b)$  ne sont pas inversibles.

**Conclusion :** les matrices de  $E$  sont diagonalisables mais pas inversibles.

*Dans toute la suite, sauf la dernière question, on étudie un exemple.*

On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Vérifier que  $A$  appartient à  $E$ .

On remarque que  $A = M(1, 3)$ .

**Conclusion :**  $A \in E$ .

4. Écrire une fonction Python d'en-tête `matA()` retournant la matrice  $A$ .

```
1 import numpy as np
2
3 def matA():
4     return np.array([[1, 3, 1], [3, -1, 3], [1, 3, 1]])
```

5. 5.a. Quelle valeur propre de  $A$  la question 2. permet-elle d'obtenir ?

D'après la question 2., la matrice  $A$  n'est pas inversible.

**Conclusion :** 0 est valeur propre de  $A$ .

5.b. Montrer que les matrices  $A - 5I$  et  $A + 4I$  ne sont pas inversibles. En déduire deux autres valeurs propres de  $A$ .

♣ **Méthode !**

Il est également possible de déterminer  $\ker(A - 5I)$ , qui permet à la fois de répondre à cette question et d'anticiper la suivante.

♥ **Astuce du chef !** ♥

Remarque l'égalité  $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$  nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice  $A - 5I$  (utile en question suivante)...

En effet, si  $C_1, C_2, C_3$  sont les colonnes d'une matrice  $B$ , on a :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3,$$

$$\text{donc : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff$$

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0_{3,1}$$

- On a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - 5I) &= \text{rg} \left( \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \right) && \hookrightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}, \text{ donc } C_3 = -C_1 - C_2 \\ &= \text{rg} \left( \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right) && \hookrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires} \\ &= 2 \\ &< 3 \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice  $A - 5I$  n'est pas inversible.

- On a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A + 4I) &= \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right) && \hookrightarrow C_1 - 2C_2 + C_3 = 0_{3,1}, \text{ donc } C_3 = -C_1 + 2C_2 \\ &= \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) && \hookrightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires} \\ &= 2 \\ &< 3 \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice  $A + 4I$  n'est pas inversible.

**Conclusion :** 5 et  $-4$  sont également des valeurs propres de  $A$ .

5.c. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de  $A$  puis construire une base  $(U, V, W)$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$  (on prendra pour chacun d'entre eux la première composante égale à 1). Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , on note  $E_\lambda(A)$  l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

- \* **Pour 5 :**

D'après la question précédente,  $\text{rg}(A - 5I) = 2$ . Or, par théorème du rang :

$$\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = \text{rg}(A - 5I) + \dim(\ker(A - 5I))$$

D'où, d'après la question précédente :

$$\dim(E_5(A)) = 1$$

Remarquons aussi que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_5(A)$ . Par conséquent, la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une famille de

$E_5(A)$  qui est :

- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nulle,
- ✓ de cardinal 1, égal à  $\dim(E_5(A))$ .

**Conclusion :** la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_5(A)$ .

- \* **Pour  $-4$  :**

On procède de la même façon...

**Conclusion :** la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_{-4}(A)$ .

- \* **Pour 0 :**

On sait déjà que 0 est valeur propre, donc  $\text{rg}(A) \leq 2$ . Mais la matrice  $A$  contient deux colonnes non colinéaires (les deux premières), donc  $\text{rg}(A) \geq 2$ .

On en déduit :

$$\text{rg}(A) = 2$$

Puis on termine comme ci-dessus.

**Conclusion :** la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_0(A)$ .

☞ **Rappel...**

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I)$$

- Notons ainsi  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La famille  $(U, V, W)$  est une famille de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

qui est :

- ✓ libre car constituée de vecteurs propres de  $A$  associés à des valeurs propres distinctes ;
- ✓ de cardinal 3, égal à  $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ .

**Conclusion :** la famille  $(U, V, W)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$  qui convient.

#### ♣ Méthode !

Si en question précédente on résout les systèmes  $AX = 5X$  et  $AX = -4X$ , on obtient des vecteurs générateurs des espaces propres  $E_5(A)$  et  $E_{-4}(A)$  respectivement. On mentionne ensuite le fait qu'ils soient non nuls pour conclure sur des bases. Bref, comme d'habitude, plusieurs méthodes sont possibles !

6. On considère les instructions Python suivantes :

```
1 r1=al.matrix_rank(matA()-5*np.eye(3,3))
2 r2=al.matrix_rank(matA()+4*np.eye(3,3))
3 print('r1=',r1)
4 print('r2=',r2)
```

Utiliser la question précédente pour donner les valeurs de  $r_1$  et  $r_2$  renvoyées par ce script.

Ce programme affiche les rangs des matrices  $A - 5I$  et  $A + 4I$ ...

**Conclusion :** d'après les questions précédentes,  $r_1 = r_2 = 2$ .

7. 7.a. Vérifier que les vecteurs  $U, V$  et  $W$  sont vecteurs propres de toutes les matrices de  $E$ .

Notons déjà que ces vecteurs sont bien non nuls (ce sont des vecteurs propres associés à  $A$ ). Soit ensuite  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a ensuite :

- Pour  $U$  :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times U &= \begin{pmatrix} 2a - 2b \\ -4a + 4b \\ 2a - 2a \end{pmatrix} \\ &= (2a - 2b) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (2a - 2b)U \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $2a - 2b$  est valeur propre de  $M(a, b)$  et  $U$  en est un vecteur propre associé.

- Pour  $V$  :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times V &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0U \end{aligned}$$

**Conclusion :** 0 est valeur propre de  $M(a, b)$  et  $V$  en est un vecteur propre associé.

- Pour  $W$  :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times W &= \begin{pmatrix} 2a + b \\ 2a + b \\ 2a + b \end{pmatrix} \\ &= (2a + b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (2a + b)W \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $2a + b$  est valeur propre de  $M(a, b)$  et  $W$  en est un vecteur propre associé.

**Conclusion :** les vecteurs  $U, V, W$  sont des vecteurs propres de toutes les matrices de  $E$ .

#### Petite remarque

L'énoncé pourrait guider autrement et procéder comme dans le sujet EML 2025 Appli - Exercice 2.

7.b. Soit  $n$  un entier naturel non nul. En utilisant la matrice  $P$  dont les colonnes sont les vecteurs  $U, V$  et  $W$ , indiquer comment obtenir la puissance  $n$ -ième de n'importe quelle matrice de  $E$  (seule la démarche est exigée, les calculs et leurs résultats numériques ne sont pas demandés).

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Par définition, la matrice  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dans la base  $(U, V, W)$ ; elle est donc inversible et, par formule de changement de base :

$$M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$$

$$\text{où } D(a, b) = \begin{pmatrix} 2a - 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a + b \end{pmatrix}.$$

On démontre ensuite par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M(a, b)^n = PD(a, b)^n P^{-1}$$

Puisque  $D(a, b)$  est diagonale,  $D(a, b)^n = \begin{pmatrix} (2a - 2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2a + b)^n \end{pmatrix}$  et il resterait à calculer  $P^{-1}$  puis

$PD(a, b)^n P^{-1}$ ...

- 7.c. En déduire, sans la commande `al.matrix_power`, et toujours pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , une fonction **Python** d'en-tête `puissanceM(a, b, n)` renvoyant  $M(a, b)^n$ .

Voici :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3
4 def puissanceM(a, b, n):
5     Dn=np.diag([(2*a-2*b)**n,0,(2*a+b)**n])
6     P=np.array([[1,1,1],[-2,0,1],[1,-1,1]])
7     return np.dot(P,np.dot(Dn,al.inv(P)))
```

# EXERCICE 3

On suppose que les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont toutes définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Dans tout l'exercice, la lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul.

1. Soit  $f_n$  la fonction définie par  $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Vérifier que  $f_n$  est une densité.

• Continuité.

- \* Sur  $]-\infty; 0[$  : la fonction  $f_n$  est continue sur  $]-\infty; 0[$  car constante sur cet intervalle.
- \* Sur  $[0; n]$  : la fonction  $f_n$  est continue sur  $[0; n]$  comme fonction polynomiale sur cet intervalle.
- \* Sur  $]n; +\infty[$  : la fonction  $f_n$  est continue sur  $]n; +\infty[$  car constante sur cet intervalle.

Conclusion : la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0 et en  $n$ .

• Positivité.

- \* Sur  $]-\infty; 0[$  :  $\forall x \in ]-\infty; 0[, f_n(x) = 0 \geq 0$ .
- \* Sur  $[0; n]$  : pour tout  $x \in [0; n]$  :

$$\frac{x}{n} \leq 1$$

donc :

$$1 - \frac{x}{n} \geq 0$$

et ainsi :

$$f_n(x) \geq 0$$

- \* Sur  $]n; +\infty[$  :  $\forall x \in ]n; +\infty[, f_n(x) = 0 \geq 0$ .

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \geq 0$ .

•  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$  ?

- \* L'intégrale  $\int_{-\infty}^0 f_n(x) dx$  est convergente et vaut 0.

- \* L'intégrale  $\int_0^n f_n(x) dx$  n'est pas impropre et :

$$\begin{aligned} \int_0^n f_n(x) dx &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\ &= \frac{-1}{n^{n-1}} \int_0^n -(n-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{-1}{n^{n-1}} \left[ \frac{1}{n} (n-x)^n \right]_0^n \\ &= \frac{1}{n^{n-1}} \times \frac{n^n}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\curvearrowright n-1 \neq -1$

- \* L'intégrale  $\int_n^{+\infty} f_n(x) dx$  est convergente et vaut 0.

Conclusion : l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$  est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

Conclusion :  $f_n$  est une densité.

Dans la suite, on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires telle que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $X_n$  admet  $f_n$  comme densité.

2. 2.a. Justifier que  $\mathbb{E} \left(1 - \frac{X_n}{n}\right)$  et  $\mathbb{E} \left( \left(1 - \frac{X_n}{n}\right)^2 \right)$  existent et donner leur expression en fonction de  $n$ .

Notons  $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n}$ .

- On considère que  $X_n(\Omega) = [0; n]$  et ainsi on obtient :

$$Y_n(\Omega) = [0; 1]$$

La variable aléatoire  $Y_n$  est ainsi bornée : elle admet donc un moment à tout ordre.

Conclusion :  $\mathbb{E} \left(1 - \frac{X_n}{n}\right)$  et  $\mathbb{E} \left( \left(1 - \frac{X_n}{n}\right)^2 \right)$  existent.

**Petite remarque**  
 $f_n$  est continue en  $n$ , mais pas en 0.

**Petite remarque**  
 C'est une question de goût de factoriser par  $\frac{1}{n^{n-1}}$  : pour éviter la fraction dans la puissance...

**Rappel...**  
 Si  $m \neq -1$ , une primitive de  $u^m$  est  $\frac{1}{m+1} u^{m+1}$ . Je conseille donc de bien faire apparaître  $u^m$  : **NE PAS OUBLIER  $u'$  !**

**Astuce du chef !**  
 On va l'utiliser à plusieurs reprises, alors autant lui donner un nom !

- Puis, par théorème de transfert, licite car la fonction  $x \mapsto 1 - \frac{x}{n}$  est continue sur  $X_n(\Omega)$  ( $X_n(\Omega) = [0; n]$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(1 - \frac{X_n}{n}\right) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right) f_n(x) dx \\ &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \\ &= \frac{-1}{n^n} \int_0^n -(n-x)^n dx \\ &= \frac{-1}{n^n} \left[ \frac{1}{n+1} (n-x)^{n+1} \right]_0^n \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ n \neq -1 \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{n^n} \frac{n^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

- Également par théorème de transfert, licite car la fonction  $x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^2$  est continue sur  $X_n(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{X_n}{n}\right)^2\right) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^2 f_n(x) dx \\ &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} dx \\ &= \frac{-1}{n^{n+1}} \int_0^n -(n-x)^{n+1} dx \\ &= \frac{-1}{n^{n+1}} \left[ \frac{1}{n+2} (n-x)^{n+2} \right]_0^n \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ n+1 \neq -1 \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{n^{n+1}} \frac{n^{n+2}}{n+2} \\ &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

2.b. En déduire que  $X_n$  possède une espérance et une variance et donner leur expression en fonction de  $n$ .

- **Espérance.**

Avec les notations de la question précédente :

$$X_n = n(1 - Y_n)$$

Or  $Y_n$  possède une espérance (question précédente), donc  $X_n$  également car c'est une fonction affine de  $Y_n$  et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(n(1 - Y_n)) \\ &= n(1 - \mathbb{E}(Y_n)) \\ &= n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \text{ linéarité de l'espérance} \\ \curvearrowright \text{ question précédente} \end{array} \right.$$

- **Variance.**

La variable aléatoire  $Y_n$  admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_n) &= \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 \\ &= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \text{question précédente} \end{array} \right.$$

Ainsi,  $X_n$  admet également une variance (fonction affine de  $Y_n$ ) et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{V}(n(1 - Y_n)) \\ &= n^2 \mathbb{V}(1 - Y_n) \\ &= n^2 \mathbb{V}(Y_n) \\ &= \frac{n^3}{(n+1)^2(n+2)} \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1}$  et  $\mathbb{V}(X_n) = \frac{n^3}{(n+1)^2(n+2)}$ .

#### Vérification

Les seules vérifications que l'on peut faire sont dans le cas  $n = 1$  ! En effet,  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $[0; 1]$ , et donc  $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$  et  $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{12}$  : et c'est cohérent avec ce que nous venons de trouver : OUF !

3. Déterminer la fonction de répartition  $F_n$  de  $X_n$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$  :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}([X_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright x < 0 \text{ et } X_n(\Omega) = [0, n], \text{ donc } [X_n \leq x] = \emptyset \end{array} \right\}$$

- Si  $x > n$  :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}([X_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright x > n \text{ et } X_n(\Omega) = [0, n], \text{ donc } [X_n \leq x] = \Omega \end{array} \right\}$$

- Si  $x \in [0, n]$  :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}([X_n \leq x]) \\ &= \frac{-1}{n^{n-1}} \left[ \frac{1}{n} (n-t)^n \right]_0^x \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright X_n \text{ est à densité, de densité } f_n \end{array} \right\} \\ &= \frac{n^n - (n-x)^n}{n^n} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright n-1 \neq -1 \end{array} \right\} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} .$$

**Vérification**

On vérifie :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = 1$
- $F_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car  $X_n$  est à densité)

4. 4.a. Donner, pour tout réel  $x$  strictement négatif, la limite de  $F_n(x)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit  $x < 0$ . Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n(x) = 0$ . D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$$

$$\text{Conclusion : } \forall x < 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0.$$

**Une deuxième...**

Et encore une question classique éparpillée sur les questions 4. à 5.b... !

4.b. Soit  $x$  un réel positif. Montrer que, pour tout entier  $n \geq [x] + 1$ , on a :

$$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Soit  $n \geq [x] + 1$ . On sait que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Ainsi, par transitivité :

$$n \geq x$$

Et donc, d'après la question 3. :

$$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\text{Conclusion : pour tout entier } n \geq [x] + 1, F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

4.c. Pour tout réel  $x$  positif, calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

- Si  $x = 0$  :

Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \ln \left(1 - \frac{0}{n}\right) = 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{0}{n}\right) = 0$$

- Si  $x > 0$  :

\*  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-x}{n} \neq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x}{n} = 0$ ;

\*  $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ .

D'où :

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$$

et donc :

$$n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x$$

Les deux cas se regroupent...

**Conclusion :**  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x.$

4.d. Dédurre des questions précédentes que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable  $X$  dont on donnera la loi. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$  :

D'après la question 4.a. :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$$

- Si  $x \geq 0$  :

Pour  $n$  suffisamment proche de  $+\infty$ , on a  $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$  et donc :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{array}{l} n \text{ suffisamment proche de } +\infty, \text{ donc } 1 - \frac{x}{n} > 0 \end{array}$$

Ainsi, d'après la question précédente et par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(-x)$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1 - e^{-x}$$

On a ainsi établi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$$

où  $F : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

**Petite remarque**

◀ Ou continuité de l'exponentielle sur  $\mathbb{R}$  donc en  $-x$ .

**Conclusion :** la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

5. Soient  $U_1, \dots, U_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On considère la variable aléatoire  $M_n$  définie par  $M_n = \min(U_1, \dots, U_n)$ , ce qui signifie que, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $M_n(\omega)$  est le plus petit des réels  $U_i(\omega), \dots, U_n(\omega)$ . Enfin, on pose  $Z_n = nM_n$ .

5.a. En notant  $G$  la fonction de répartition commune à  $U_1, \dots, U_n$ , rappeler l'expression de  $G(x)$  selon que  $x < 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$  ou  $x > 1$ .

**Conclusion :**  $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ .

5.b. Déterminer, pour tout réel  $x$ , la probabilité  $\mathbb{P}([Z_n > x])$  à l'aide de la fonction  $G$  et en déduire explicitement la fonction de répartition  $F_{Z_n}$  de  $Z_n$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Pour commencer :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_n > x]) &= \mathbb{P}([n \min(U_1, \dots, U_n) > x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\min(U_1, \dots, U_n) > \frac{x}{n}\right]\right) \quad \leftarrow n > 0 \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \left[U_i > \frac{x}{n}\right]\right) \quad \leftarrow \text{indépendance de } U_1, \dots, U_n \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(\left[U_i > \frac{x}{n}\right]\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(1 - \mathbb{P}\left(\left[U_i \leq \frac{x}{n}\right]\right)\right) \\ &= \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

- Puis :

$$\begin{aligned}
 F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}([Z_n \leq x]) \\
 &= 1 - \mathbb{P}([Z_n > x]) \\
 &= 1 - \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \text{ point précédent} \\ \curvearrowright \text{ question précédente} \end{array} \right. \\
 &= \begin{cases} 1 - (1 - 0)^n & \text{si } \frac{x}{n} < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } \frac{x}{n} \in [0; 1] \\ 1 - (1 - 1)^n & \text{si } \frac{x}{n} > 1 \end{cases} && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \curvearrowright n > 0 \end{array} \right. \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbb{R}, F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} .$$

- 5.c. Conclure que  $Z_n$  suit la même loi que  $X_n$ .

D'après la question précédente et la question 3., les variables aléatoires  $Z_n$  et  $X_n$  ont la même fonction de répartition. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

**Conclusion :** les variables aléatoires  $Z_n$  et  $X_n$  suivent la même loi.

**Important !**

Il faut savoir traiter la question 5.c. directement : sans le détail des questions 5.a. et 5.b.

- 5.d. Utiliser la question 5.c. pour écrire une fonction **Python** renvoyant une réalisation de  $X_n$ .

Voici :

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simulX(n):
4     L=[rd.random() for k in range(n)]
5     M=min(L)
6     return n*M

```

## EXERCICE 4

Dans ce problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On dispose de  $n + 1$  urnes, numérotées de 1 à  $n + 1$ , et contenant chacune  $n$  boules.

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ , l'urne numéro  $k$  contient  $k - 1$  boules noires, les autres boules étant blanches (ainsi, l'urne numérotée 1 ne contient que des boules blanches et l'urne numérotée  $n + 1$  ne contient que des boules noires). L'épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à y effectuer indéfiniment des tirages au hasard d'une boule, avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient après chaque tirage.

Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ , on note  $U_k$  l'événement : "On a choisi l'urne numérotée  $k$ ".

On appelle  $X_n$  la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient aucune boule blanche au cours de l'épreuve et qui prend la valeur  $j$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) si la première boule blanche apparaît au  $j$ -ième tirage.

Pour finir, on rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler certaines variables discrètes usuelles :

`rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\llbracket a, b \rrbracket$ .

`rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

`rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ .

1. Simulation de  $X_n$  : pour tout  $j$  de  $\llbracket 2; n + 1 \rrbracket$ , on code les  $j - 1$  boules noires de l'urne numérotée  $j$  par les entiers de  $\llbracket 1, j - 1 \rrbracket$ . Compléter alors la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur prise par  $X_n$  lors de l'épreuve aléatoire décrite ci-dessus :

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def varX(n):
4     k=... #choix de l'urne
5     if k==n+1:
6         X=...
7     elif k==1:
8         X=...
9     else:
10        X=1
11        while rd.randint(1,n+1)<=...:
12            X=...
13    return (X)
```

Voici :

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def varX(n):
4     k=rd.randint(1,n+2) #choix de l'urne
5     if k==n+1:
6         X=0
7     elif k==1:
8         X=1
9     else:
10        X=1
11        while rd.randint(1,n+1)<=k-1:
12            X=X+1
13    return (X)
```

2. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ , déterminer  $\mathbb{P}(U_k)$ .

Il y a équiprobabilité du choix de l'urne, et  $n + 1$  urnes...

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket, \mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{n + 1}.$$

3. 3.a. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , donner la loi de  $X_n$ , conditionnellement à l'événement  $U_k$ .

Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Supposons l'évènement  $U_k$  réalisé. Autrement dit, l'urne  $k$  a été choisie. Sous cette hypothèse :

- ✓ l'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes (tirages avec remise, sans changement de composition de l'urne) dont le succès "on tire une boule blanche" est de probabilité  $\frac{n - (k - 1)}{n}$  (par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne, composée de  $n$  boules dont  $k - 1$  sont noires);
- ✓ la variable aléatoire  $X_n$  prend comme valeur le rang du premier succès.

$$\text{Conclusion : la loi conditionnelle de } X_n \text{ sachant } U_k \text{ est la loi géométrique de paramètre } \frac{n - k + 1}{n}.$$

♥ L'avis du chef ! ♥

Très bon exercice, permettant de bien mettre en place les méthodes habituelles sur les variables aléatoires discrètes et les couples. Quelques calculs plus techniques pour se distinguer... A travailler sans modération !

♥ L'avis du chef ! ♥

Question Python pour débiter l'exercice : cela permet de bien repérer celles et ceux qui font l'impasse de l'informatique...

✗ Attention !

Il est important de bien rédiger cette question. La variable aléatoire  $X_n$  ne suit pas une loi géométrique... C'est seulement la loi conditionnelle qui est une loi géométrique. On doit donc voir la supposition que  $U_k$  est réalisé, et un vocabulaire du type "sous cette hypothèse".

Petite remarque

On pourrait distinguer le cas  $k = 1$ , dans lequel la probabilité du succès est égale à 1, mais ce n'est pas nécessaire.

3.b. En conservant, sans les écrire de nouveau, les 6 premières lignes de la fonction Python précédente, compléter les 3 lignes suivantes afin d'obtenir une nouvelle simulation de  $X_n$  :

```
1 else :
2     X = ...
3 return (X)
```

Voici :

```
1 else :
2     X = rd.geometric((n-k+1)/n)
3 return (X)
```

4. 4.a. Déterminer  $\mathbb{P}_{U_{n+1}}([X_n = 1])$ .

Supposons l'évènement  $U_{n+1}$  réalisé. Dans ce cas, les tirages s'effectuent dans l'urne numérotée  $n + 1$ , composée exclusivement de boules noires.

Il est alors impossible d'obtenir une boule blanche au premier tirage...

Conclusion :  $\mathbb{P}_{U_{n+1}}([X_n = 1]) = 0$ .

4.b. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , donner  $\mathbb{P}_{U_k}([X_n = 1])$ .

Conclusion : d'après la question 3.a., pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}_{U_k}([X_n = 1]) = \frac{n - k + 1}{n}$ .

**Rappel...**

Si  $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}([X = k]) = p(1-p)^{k-1}$  et donc  $\mathbb{P}([X = 1]) = p$ .

4.c. Montrer alors que  $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{2}$ .

D'après la formule des probabilités totales, avec  $(U_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$  comme système complet d'évènements, on a :

**Réflexe !**

On connaît les  $\mathbb{P}_{U_k}([X_n = 1])$  et on cherche  $\mathbb{P}([X_n = 1])$  : FPT !!

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 1]) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k \cap [X_n = 1]) && \left. \begin{array}{l} \forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(U_k) \neq 0 \\ \text{questions 2., 4.a. et 4.b.} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k) \mathbb{P}_{U_k}([X_n = 1]) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (n-k+1) && \left. \begin{array}{l} \\ j = n - k + 1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :  $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{2}$ .

5. Soit  $j$  un entier supérieur ou égal à 2.

5.a. Déterminer  $\mathbb{P}_{U_{n+1}}([X_n = j])$ .

Supposons l'évènement  $U_{n+1}$  réalisé. Dans ce cas, les tirages s'effectuent dans l'urne numérotée  $n + 1$ , composée exclusivement de boules noires.

Il est alors impossible d'obtenir une boule blanche...

Conclusion :  $\mathbb{P}_{U_{n+1}}([X_n = j]) = 0$ .

5.b. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , donner  $\mathbb{P}_{U_k}([X_n = j])$ .

Conclusion : d'après la question 3.a., pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}_{U_k}([X_n = j]) = \frac{n - k + 1}{n} \left( \frac{k - 1}{n} \right)^{j-1}$ .

5.c. En déduire l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right]$$

D'après la formule des probabilités totales, avec  $(U_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$  comme système complet d'événements, on a :

► **Réflexe !**  
On connaît les  $\mathbb{P}_{U_k}([X_n = j])$  et on cherche  $\mathbb{P}([X_n = j])$  : FPT !!

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = j]) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k \cap [X_n = j]) && \left. \begin{array}{l} \leftarrow \forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(U_k) \neq 0 \\ \leftarrow \text{questions 2., 5.a. et 5.b.} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k) \mathbb{P}_{U_k}([X_n = j]) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \frac{n-k+1}{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left[ \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k-1}{n}\right)^j \right] && \left. \begin{array}{l} \leftarrow i = k-1 \\ \leftarrow i = k-1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{i}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{i}{n}\right)^j \right] \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right]$ .

6. 6.a. Justifier que, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , on a :  $\sum_{j=2}^{+\infty} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] = \frac{k}{n}$ .

Soit  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . Pour tout  $N \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] &= \sum_{j=2}^N \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^N \left(\frac{k}{n}\right)^j && \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{téléscopage} \end{array} \right\} \\ &= \frac{k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^N \end{aligned}$$

Or  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , donc  $\frac{k}{n} \in ]-1; 1[$ . Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^N = 0$$

D'où :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=2}^N \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] = \frac{k}{n}$$

**Conclusion :** pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , la série  $\sum_{j \geq 2} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right]$  est convergente et

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] = \frac{k}{n}$$

6.b. Calculer  $\mathbb{P}([X_n \geq 2])$  en fonction de  $n$ .

Puisque  $X_n$  est à valeurs entières, on a :

$$[X_n \geq 2] = \bigcup_{j=2}^{+\infty} [X_n = j]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n \geq 2]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=2}^{+\infty} [X_n = j]\right) && \left. \begin{array}{l} \leftarrow ([X_n = j])_{j \geq 2} \text{ est constituée d'événements deux à deux incompatibles} \\ \leftarrow \text{question 5.c., licite pour tout } j \geq 2 \end{array} \right\} \\ &= \sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \\ &= \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de la somme (infinie), licite car pour tout } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \\ \text{la série } \sum_{j \geq 2} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] \text{ est convergente} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{+\infty} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{question précédente} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n-1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

★ **Subtil...** ★  
Autant il est possible d'écrire  $\sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{+\infty}$ , qui découle de la linéarité de la somme (infinie); autant il nous serait impossible d'intervertir deux sommes infinies du type  $\sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}$  : il existe un théorème le permettant (sous de bonnes hypothèses), qui est cependant hors programme en ECG.

**Conclusion :**  $\mathbb{P}([X_n \geq 2]) = \frac{n-1}{2(n+1)}$ .

7. 7.a. Dédurre des questions précédentes l'expression de  $\mathbb{P}([X_n = 0])$  en fonction de  $n$ .  
Puisque  $X_n$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , la famille  $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n \geq 2])$  est un système complet d'évènements. D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n \geq 2]) = 1$$

Ce qui donne, d'après les questions 4.c. et 6.b. :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = 0]) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{n-1}{2(n+1)} \\
&= \frac{n+1 - (n-1)}{2(n+1)} \\
&= \frac{2}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \frac{1}{n+1}$ .

7.b. Aurait-on pu anticiper ce dernier résultat sans aucun calcul ?  
En choisissant n'importe quelle urne  $1, \dots, n$ , il sera quasi-impossible de réaliser par la suite l'évènement  $[X_n = 0]$ . En revanche, en choisissant l'urne  $n+1$ , il est certain de réaliser par la suite l'évènement  $[X_n = 0]$  (car l'urne  $n+1$  ne contient aucune boule blanche).  
On a ainsi :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}(U_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

**Petite remarque**  
L'énoncé aurait pu demander de calculer cette probabilité directement après la question 3. par exemple. On aurait dans ce cas procédé comme en question 4. : à savoir faire en autonomie !

8. 8.a. Montrer que  $X_n$  possède une espérance  $\mathbb{E}(X_n)$  donnée par :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

On considère que  $X_n(\Omega) = \mathbb{N}$ .

- On sait que :  
 $X_n$  admet une espérance si, et seulement si, la série  $\sum_{j \in X_n(\Omega)} |j\mathbb{P}([X_n = j])|$  est convergente  
si, et seulement si, la série  $\sum_{j \geq 0} j\mathbb{P}([X_n = j])$  est convergente, car pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j\mathbb{P}([X_n = j]) \geq 0$
- Soit  $N \in \mathbb{N}$ , suffisamment proche de  $+\infty$ . On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N j\mathbb{P}([X_n = j]) &= 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X_n = 1]) + \sum_{j=2}^N j\mathbb{P}([X_n = j]) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{questions précédentes} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^N j \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right]
\end{aligned}$$

**Petite remarque**  
On pourrait démontrer cette égalité par double inclusion...

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^N \sum_{k=0}^{n-1} j \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] && \curvearrowright \text{interversion des sommes} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^N j \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=2}^N j \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \frac{k}{n} \sum_{j=2}^N j \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{n-k}{n} \sum_{j=2}^N j \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \right)
\end{aligned}$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , on a  $\frac{k}{n} \in ]-1; 1[$ , donc la série  $\sum_{j \geq 2} j \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$  est convergente comme troncature d'une série géométrique convergente.  
Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}([X = n])$  est convergente, comme somme de séries convergentes...

- On en déduit que  $X_n$  admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{j=0}^{+\infty} j \mathbb{P}([X_n = j]) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{n-k}{n} \sum_{j=2}^{+\infty} j \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{n-k}{n} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{n-k}{n} \left( \frac{n^2}{(n-k)^2} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{n}{n-k} - \frac{n-k}{n} \right) && \curvearrowright p = n - k \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^n \left( \frac{n}{p} - \frac{p}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{p=1}^n p \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Conclusion :  $X_n$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ .

**Petite remarque**  
Ce n'est pas le calcul d'espérance le plus simple que l'on ait rencontré (peut-être existe-t-il des chemins menant plus rapidement au résultat d'ailleurs)... A travailler dans un second temps !

### 8.b. Informatique : calcul et affichage de $\mathbb{E}(X_n)$ .

Compléter le script suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher  $\mathbb{E}(X_n)$  :

```

1 n=int(input('entrez la valeur de n :'))
2 v=np.arange(1,n+1)
3 E=...
4 print(E)

```

Voici :

```

1 n=int(input('entrez la valeur de n :'))
2 v=np.arange(1,n+1)
3 E=n/(n+1)*sum(1/v)
4 print(E)

```

**Rappel...**  
La commande `np.arange(1,n+1)` permet de créer un tableau **numpy** d'entiers entre 1 et  $n$ . L'avantage du tableau est de pouvoir effectuer du calcul plus aisément. En effet, dans ce cas, `1/v` est tableau composé des valeurs `1, 1/2, 1/3, ..., 1/n`.

**Petite remarque**  
Il faut savoir proposer un programme complet en utilisant une boucle `for` pour calculer la somme, ou avec une liste en compréhension.

9. 9.a. Montrer que :  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}^{++}$ , donc sur  $[p; p+1]$ , on a :

$$\forall t \in [p; p+1], \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car  $p \leq p+1$  :

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt$$

**Conclusion :**  $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}$ .

9.b. En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , l'encadrement :  $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$ .

Soit  $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ . D'après la question précédente, en calculant l'intégrale, on obtient :

$$\forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$$

D'où, en sommant de 1 à  $n-1$ , licite car  $n \geq 2$  :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=2}^n (\ln(p+1) - \ln(p)) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

Puis, par télescopage sur la somme du milieu et changement d'indice  $k = p+1$  dans la somme de gauche :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$ .

9.c. Établir enfin l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

Soit  $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ . D'après la question précédente :

$$\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

Mais :

- de l'inégalité de gauche, on déduit :

$$1 + \sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$$

Autrement dit :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

- de l'inégalité de droite, on déduit :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1}$$

Autrement dit :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$ .

9.d. Utiliser l'encadrement précédent pour donner l'équivalent le plus simple possible de  $\mathbb{E}(X_n)$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

- Soit  $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ . D'après la question précédente :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

D'où, puisque  $\ln(n) > 0$  (car  $n > 1$ ) :

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Mais :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n \ln(n)} \right) = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\ln(n)} \right)$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}{\ln(n)} = 1$$

**Conclusion :**  $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

- Enfin, puisque  $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ , on obtient :

$$\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \ln(n)$$

Et comme  $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n+1$ , on a même :

$$\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

**Conclusion :**  $\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

---

★★★★★★ FIN ★★★★★★