MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - EMLyon 2025

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

L'énoncé supposait, pour toutes les questions en langage `Python`*, les bibliothèques usuelles déjà importées sous leurs raccourcis habituels.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Problème 1

Partie 1 - Une suite d'intégrales

On introduit les deux suites réelles $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\varphi_n\ :\ t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[-1\,;1]$ car polynômiale, donc les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$ sont parfaitement définies comme intégrales d'une fonction continue sur un segment fermé.

Il est de plus clair que φ_n est paire sur $\mathbb{R}$ car la fonction carrée l'est :

$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(-t) = \big(1-(-t)^2\big)^n = (1-t^2)^n = \varphi_n(t)$, donc $J_n = \displaystyle\int_{-1}^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t = 2I_n$.

2. Un calcul trivial : $\quad I_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^0 \mathrm{d}t = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t = 1.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0\,;1],\ 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant 1-t^2 \leqslant 1 \Longrightarrow (1-t^2)^{n+1} \leqslant (1-t^2)^n$ par comparaison des puissances d'un même réel compris entre 0 et 1 (*ou tout simplement en multipliant tous les membres de la double inégalité précédente par* $(1-t^2)^n \geqslant 0$).

Les fonctions comparées sont continues sur $[0\,;1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \iff I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Comme cette dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est bien décroissante.

4. Soit $n \geqslant 1$. Dans l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$, on pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1-t^2)^n &\longrightarrow\quad & u'(t) = -2nt(1-t^2)^{n-1} \\ v'(t) &= 1 &\longrightarrow\quad & v(t) = t \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, donc par intégration par parties :

$$I_n = \Big[t(1-t^2)^n\Big]_0^1 + 2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t = 0(1-0)^n - 1(1-1)^n + 2n\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$= -2n\int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire que : $\quad I_n = -2nI_n + 2nI_{n-1} \iff (2n+1)I_n = 2nI_{n-1} \iff \boxed{I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}}$.

5. Montrons alors par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$I_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ On a vu en **2.** que $I_0 = 1$, et par ailleurs, $\dfrac{(2^0\cdot 0!)^2}{(2\times 0+1)!} = \dfrac{1}{1!} = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ (*pour avoir* $n-1 \in \mathbb{N}$), c'est-à-dire : $I_{n-1} = \dfrac{\big(2^{n-1}(n-1)!\big)^2}{(2(n-1)+1)!} = \dfrac{\big(2^{n-1}(n-1)!\big)^2}{(2n-1)!}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

La relation obtenue en **4.** et l'hypothèse de récurrence donnent :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\times\frac{\big(2^{n-1}(n-1)!\big)^2}{(2n-1)!} = \frac{(2n)^2\times\big(2^{n-1}(n-1)!\big)^2}{2n\times(2n+1)\times(2n-1)!}$$

$$= \frac{\big(2\times 2^{n-1}\times n\times(n-1)!\big)^2}{(2n+1)!} = \frac{\big(2^n n!\big)^2}{(2n+1)!},$$

donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie si $\mathcal{P}(n-1)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n = \frac{\big(2^n n!\big)^2}{(2n+1)!} \quad\text{et}\quad J_n = 2I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Remarque : on pouvait évidemment supposer $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrer que $\mathcal{P}(n+1)$: $I_{n+1} = \dfrac{\big(2^{n+1}(n+1)!\big)^2}{(2n+3)!}$, est alors encore vraie.

6. Informatique. La relation obtenue à la question **4.** est sous sa forme idéale pour le calcul de proche en proche des termes de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$: il faut simplement bien prendre garde à ne pas se tromper dans les variables utilisées, c'est bien `k` qui varie et `i` qui représente la valeur de l'intégrale courante I_k qu'on calcule en fonction de I_{k-1}, la valeur précédente de `i`.

```python
def I(n):
    i = 1                    # valeur initiale de I_0
    for k in range(1,n+1):   # on calcule I_1,...,I_n
        i = (2*k)/(2*k+1)*i  # relation de récurrence de 4.
    return i
```

7. L'énoncé *admettait* ici la **formule de Stirling** : $\quad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

La compatibilité de l'équivalence avec le produit donne : $\quad (n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n\cdot\dfrac{n^{2n}}{e^{2n}}$, et par ailleurs en substituant $2n+1$ à n : $\quad (2n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n+1)}\dfrac{(2n+1)^{2n+1}}{e^{2n+1}}$, donc par compatibilité de l'équivalence avec le quotient :

$$J_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}\cdot 2\pi n\cdot e^{2n+1}\cdot n^{2n}}{\sqrt{\pi\cdot 4n}(2n+1)^{2n+1}e^{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}\cdot e.$$

Or : $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{2n+1} = e^{-(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$: on revient à la forme exponentielle des puissances.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, alors : $\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

Avec $-(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2n$, on en déduit que $-(2n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2n}{2n} = -1$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} -(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) = -1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = e^{-1}$$

par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$. Comme cette limite est non nulle, on peut repmlacer le terme $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$ par sa limite e^{-1} dans le dernier équivalent obtenu pour J_n, et écrire :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot e^{-1} \cdot e, \quad \text{soit :} \quad \boxed{J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}}.$$

Partie 2 - Des polynômes orthogonaux

Dans cette partie, on considère un entier $n \geqslant 2$ fixé et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_n = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

8. On vérifie les points de la définition du cours, qui font de l'application

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot\,,\cdot \rangle : \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t \end{array},$$

un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$. Remarquons que cette application est toujours bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$, puisqu'elle calcule toujours l'intégrale d'une fonction polynômiale continue sur le segment $[0\,;1]$.

- Il est d'abord évident, par commutativité du produit des réels, que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]$, $\langle P\,,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle Q\,,P\rangle$, donc $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est symétrique.
- Soient P,Q,R trois éléments de $\mathbb{R}[x]$, et λ un réel :

$$\langle \lambda\cdot P + Q\,,R\rangle = \int_{-1}^{1}\big(\lambda P(t)+Q(t)\big)R(t)\mathrm{d}t = \lambda\int_{-1}^{1} P(t)R(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\mathrm{d}t = \lambda\langle P\,,R\rangle + \langle Q\,,R\rangle,$$

  donc $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable : comme elle est symétrique, elle est donc bilinéaire.
- Pour tout P de $\mathbb{R}[x]$: $\langle P\,,P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1}\big(P(t)\big)^2\mathrm{d}t$ est un réel positif, comme intégrale d'une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ (en tant que polynôme) où les deux bornes sont bien rangées dans l'ordre croissant.
- Avec les mêmes hypothèses qu'au point précédent : $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifie $\langle P\,,P\rangle = 0$ si et seulement si : $\forall t \in [-1\,;1]$, $\big(P(t)\big)^2 = 0 \Longrightarrow \forall t \in [-1\,;1]$, $P(t) = 0$ par contraposée de la propriété de stricte positivité de l'intégrale.

  Mais alors, P est une fonction polynômiale qui possède une infinité de racines : la seule possibilité est que P soit le polynôme nul, donc $\langle P\,,P\rangle = 0$ implique $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

On a ainsi défini une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, donc un produit scalaire, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$.

L'énoncé note $||\cdot||$ la norme associée.

9. Il est assez facile de démontrer que la base canonique $\mathcal{B}_n$ n'est *pas* orthogonale : il suffit de calculer

$$\langle e_0\,,e_2\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot t^2\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 2\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3} \neq 0.$$

On a utilisé comme au début de la partie 1, la parité de la fonction carrée. Remarquons qu'ici la question était posée de façon ouverte, ce qui est en soi une indication quant à la réponse !

L'énoncé définit maintenant l'application u : $P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \big((1-x^2)P'(x)\big)'$, en expliquant l'abus de notation utilisé pour exprimer simplement que $u(P)$ est la dérivée de l'application $x \mapsto (1-x^2)P'(x)$.

10. Pour commencer : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, P' est un polynôme donc $u(P)$ aussi comme dérivée d'un produit de polynômes.

Les règles de calcul sur les degrés donnent de plus, pour tout P de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$\deg P' \leqslant n-1 \Longrightarrow \deg(1-x^2)P'(x) \neq 2+n-1 = n+1 \Longrightarrow \deg u(P) \leqslant (n+1)-1 = n,$$

donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, et λ un réel. Par linéarité de la dérivation, en utilisant l'abus de notation autorisé par l'énoncé :

$$\begin{aligned} u(\lambda\cdot P+Q)(x) &= \big((1-x^2)(\lambda\cdot P+Q)'(x)\big)' = \big(\lambda\cdot(1-x^2)P'(x) + (1-x^2)Q'(x)\big)' \\ &= \lambda\cdot\big((1-x^2)P'(x)\big)' + \big((1-x^2)Q'(x)\big)' = \lambda\cdot u(P)(x) + u(Q)(x), \end{aligned}$$

donc u est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans lui-même : c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

11. a. Avec $e_0(x) = 1$: $e_0'(x) = 0$ donc $(1-x)^2 e_0'(x) = 0 \Longrightarrow \big((1-x^2)e_0'(x)\big)' = 0$,

c'est-à-dire que $\boxed{u(e_0) = 0}$ est le polynôme nul.

Avec $e_1(x) = x$: $e_1'(x) = 1 \Longrightarrow (1-x^2)e_1'(x) = 1-x^2 \Longrightarrow \big((1-x^2)e_1'(x)\big)' = -2x = u(e_1)(x)$,

c'est-à-dire que $\boxed{u(e_1) = -2e_1}$.

b. Soit $k \in [\![2\,;n]\!]$. Avec $e_k(x) = x^k$:

$$e_k'(x) = kx^{k-1} \Longrightarrow (1-x^2)e_k'(x) = kx^{k-1} - kx^{k+1} \Longrightarrow \big((1-x^2)e_k'(x)\big)' = k(k-1)x^{k-2} - k(k+1)x^k,$$

c'est-à-dire que $\boxed{u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}}$.

c. Il faut prendre ici l'initiative d'utiliser les résultats de la question précédente pour écrire la *matrice* de l'endomorphisme u dans la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(u) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -2 & 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & -6 & \ddots & \ddots & \ddots & & & (0) & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & k(k-1) & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & -k(k+1) & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & (0) & & & & & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n(n+1)
\end{bmatrix}$$

Cette matrice est clairement triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres, qui sont aussi celles de u, sont ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{Sp}(u) = \left\{0, -2, -6, \ldots, -k(k+1), \ldots, -n(n+1)\right\} = \left\{ -k(k+1) \middle| \ k \in [\![0\,;n]\!]\right\}.$$

La fonction $x \mapsto -x(x+1)$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors ces valeurs propres sont deux à deux distinctes : u, endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, possède $n+1$ valeurs propres distinctes. Le critère suffisant assure alors que u est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

12. Là encore, l'énoncé attend une prise d'initiative importante : l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u, est une conséquence du **théorème spectral**, il faut donc parvenir à prouver que u est un endomorphisme *symétrique*.

Considérons pour cela deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$\langle u(P)\,,Q\rangle = \int_{-1}^{1} \left((1-t^2)P'(t)\right)'Q(t)\mathrm{d}t$$

Dans cette intégrale, on pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= Q(t) & &\longrightarrow & u'(t) &= Q'(t) \\ v'(t) &= \left((1-t^2)P'(t)\right)' & &\longrightarrow & v(t) &= (1-t^2)P'(t) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1\,;1]$, donc par intégration par parties :

$$\int_{-1}^{1} \left((1-t^2)P'(t)\right)'Q(t)\mathrm{d}t = \Big[(1-t^2)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$$

puisque $(1-t^2)$ s'annule en $t=1$ et $t=-1$.

Sous cette dernière forme de l'intégrale, il est clair que les rôles de P et Q sont symétriques, et que (toujours par commutativité du produit des réels) :

$$\langle u(P)\,,Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t^2)Q'(t)P'(t)\mathrm{d}t = \langle u(Q)\,,P\rangle = \langle P\,,u(Q)\rangle$$

aussi par symétrie du produit scalaire.

L'application u est bien un endomorphisme symétrique, et le théorème spectral s'applique, qui donne le résultat demandé : il existe une base orthonormale $(\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u.

Ces vecteurs n'ont aucune raison a priori d'être *unitaires*, c'est-à-dire de coefficient dominant 1.

En notant, pour tout entier $k \in [\![0\,;n]\!]$, a_k le coefficient dominant (de fait non nul) de ℓ_k : le polynôme $L_k = \frac{1}{a_k}\ell_k$ est unitaire, et les vecteurs $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ restent deux à deux orthogonaux ; en effet :

$$\forall (i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j, \quad \langle L_i\,,L_j\rangle = \frac{1}{a_i \cdot a_j}\langle \ell_i\,,ell_j\rangle = 0.$$

L'énoncé note $\mathcal{L}_n = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ cette base, et admet que, quitte à réordonner les termes, cette famille ainsi construite est telle que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[x]$.

13. Soit $m > n$ un entier. Soit $f \in \mathbb{R}_m[x]$ un polynôme.

a. Puisque $m > n$, alors $\mathbb{R}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}_m[x]$. Le théorème de minimisation de la norme (par projection orthogonale) assure alors qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$||f - T_n|| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} ||f - g||$$

Par définition, T_n est alors un élément de $\mathbb{R}_n[x]$, dont $\mathcal{L}_n$ est, d'après **12.**, une base : par définition d'une base, il existe bien un unique $(n+1)$-uplet $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$.

Pour répondre à la dernière partie de la question, il fallait là encore du recul et de l'initiative : en effet, ce n'était pas demandé explicitement, mais de fait $T_n = p_{\mathbb{R}_n[x]}(f)$ est le **projeté orthogonal** de f sur $\mathbb{R}_n[x]$; la formule directe du cours pour ce projeté ne s'applique pas avec la famille $\mathcal{L}_n$ qui n'est qu'*orthogonale*, mais avec la famille $\left(\frac{L_0}{||L_0||}, \frac{L_1}{||L_1||}, \ldots, \frac{L_n}{||L_n||}\right)$ (qui reste orthogonale mais dont on a normalisé les vecteurs : on revient en fait à la famille $(\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n)$ évoquée en **12.** !).

Cette formule donne :

$$T_n = p_{\mathbb{R}_n[x]}(f) = \sum_{k=0}^{n} \langle f\,, \frac{L_k}{||L_k||}\rangle \frac{L_k}{||L_k||} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f\,, L_k\rangle}{||L_k||^2} L_k, \quad \text{donc :} \ \boxed{\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ c_k = \frac{\langle f\,, L_k\rangle}{||L_k||^2}}$$

par unicité des coordonnées de T_n dans la base $\mathcal{L}_n$.

b. En reprenant une partie de la preuve du théorème de minimisation de la norme vue en cours, on peut retrouver la façon la plus rapide de démontrer la relation demandée :

puisque T_n est le projecté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[x]$, alors $f - T_n$ appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ (dans $\mathbb{R}_m[x]$), et $f - T_n$ et T_n sont donc orthogonaux.
Mais alors, en écrivant $f = (f - T_n) + T_n$ comme la somme de deux vecteurs ortogonaux, le *théorème de Pythagore* dans les espaces euclidiens donne :

$$||f||^2 = ||f - T_n||^2 + ||T_n||^2 \Longrightarrow ||f - T_n||^2 = ||f||^2 - ||T_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 ||L_k||^2,$$

la dernière égalité étant elle aussi issue du théorème de Pythagore, puisque $T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$ est une combinaison linéaire de vecteurs deux à deux orthogonaux.

14. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les polynômes $P_k :\ x \mapsto (x^2-1)^k$ et $Q_k = P_k^{(k)}$ qui est donc la dérivée k-ième de P_k. En particulier, $Q_0 = P_0^{(0)} = P_0$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Le polynôme Q_k est de degré $2k$ comme produit de k polynômes tous identiques de degré 2 chacun. La dérivation diminuant d'une unité le degré d'un polynôme (tant qu'on n'aboutit pas au polynôme nul) : en dérivant k fois un polynôme de degré $2k$, on obtient un polynôme de degré $2k - k = k = \deg Q_k$.
En s'intéressant plus précisément au terme dominant de P_k, qui est x^{2k} comme produit des termes dominants des k facteurs $x^2 - 1$: le dérivée k-ième de ce terme est $2k(2k-1)\cdots(k+1)x^k$, ce qui redémontre que $\deg(Q_k) = k$ et prouve surtout que son coefficient dominant est bien le produit de tous les entiers de $k+1$ à $2k$, qui peut effectivement s'écrire comme le quotient $\frac{(2k)!}{k!}$.

b. Avec $P_0(x) = (x^2-1)^0 = 1,\ Q_0(x) = P_0(x) = 1$.
Avec $P_1(x) = (x^2-1)^1,\ Q_1(x) = P_1'(x) = 2x$.
Et avec $P_2(x) = (x^2-1)^2,\ P_2'(x) = 2x(x^2-1) = 2x^3 - 2x$ et $P_2''(x) = 6x^2 - 2 = Q_2(x)$.

c. i. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_1(x)P_k'(x) = (x^2-1) \times 2kx(x^2-1)^{k-1} = 2kx(x^2-1)^k = 2ke_1(x)P_k(x).$$

ii. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$ fixé. Les deux membres de l'égalité précédente sont des polynômes (produits de polynômes), donc indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, et leurs dérivées au même ordre $k+1$ sont encore égales.
La formule de Leibniz donne alors :

- pour le membre de gauche, la dérivée d'ordre $k+1$ est :

$$\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}P_1^{(j)}(x)\cdot(P_k')^{(k+1-j)}(x)=\sum_{j=0}^{2}\binom{k+1}{j}P_1^{(j)}(x)\cdot P_k^{(k+2-j)}(x)$$

puisque vu que $P_1(x)=x^2-1$, toutes ses dérivées d'ordre strictement supérieur à 2 sont nulles.
Sachant que $Q_k=P^(k)_k$, alors $P_k^{(k+2-j)}(x)=Q_k^{(2-j)}(x)$ pour $j=0,1,2$, donc ce membre de gauche est :

$$\binom{k+1}{0}P_1^{(0)}(x)\cdot Q_k^{(2)}(x)+\binom{k+1}{1}P_1^{(1)}(x)\cdot Q_k^{(1)}(x)+\binom{k+1}{2}P_1^{(2)}(x)\cdot Q_k^{(0)}(x)$$

$$=(x^2-1)Q_k''(x)+2(k+1)xQ_k'(x)+k(k+1)Q_k(x)\quad\text{puisque}\ \binom{k+1}{2}=\frac{k(k+1)}{2}\ \text{et}\ P_1''(x)=2.$$

- Pour le membre de droite, en laissant le facteur multiplicatif constant $2k$ devant la somme, la formule de Leibniz donne la dérivée d'ordre $k+1$ suivante :

$$2k\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}e_1^{(j)}(x)\cdot P_k^{(k+1-j)}(x)=2k\sum_{j=0}^{1}\binom{k+1}{j}e_1^{(j)}(x)\cdot Q_k^{(1-j)}(x)$$

à nouveau du fait que e_1, polynôme de degré 1, a des dérivées d'ordre supérieur à 2 nulles, et par définition de Q_k. Il ne reste cette fois que deux termes dans la somme, qui est :

$$2k\Big(\binom{k+1}{0}e_1(x)Q_k'(x)+\binom{k+1}{1}e_1'(x)Q_k(x)\Big)=2kxQ_k'(x)+2k(k+1)Q_k(x)\quad\text{puisque}\ e_1'(x)=1.$$

En réécrivant l'égalité de ses deux membres, on obtient la relation vérifiée par le polynôme Q_k :

$$(x^2-1)Q_k''(x)+2(k+1)xQ_k'(x)+k(k+1)Q_k(x)=2kxQ_k'(x)+2k(k+1)Q_k(x)$$
$$\iff\ 0=(1-x^2)Q_k''(x)-2xQ_k'(x)+k(k+1)Q_k(x),\quad\text{CQFD}$$

(*On a tout regroupé ici dans le membre de droite pour obtenir les signes voulus pour chaque terme.*)

En se souvenant que : $u(Q_k)(x)=\big((1-x^2)Q_k'(x)\big)'=-2xQ_k'(x)+(1-x^2)Q_k''(x)$ (dérivée d'un produit), on retrouve ce terme dans la relation précédente, qui devient :

$$0=u(Q_k)+k(k+1)Q_k\iff\boxed{u(Q_k)=-k(k+1)Q_k},$$

relation qui exprime bien que le polynôme Q_k, élément non nul de $\mathbb{R}_n[x]$ puisqu'il est de degré $k\in[\![0\,;n]\!]$), est un *vecteur propre* de l'endomorphisme u pour la valeur propre $-k(k+1)$.

iii. Il reste à rappeler ici que, pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, le sous-espace propre de u pour la valeur propre $-k(k+1)$ est de dimension 1 (question **11.c.**).
Comme les deux polynômes L_k et Q_k appartiennent tous deux à ce sous-espace propre, ils sont nécessairement colinéaires.
Et comme L_k est unitaire et Q_k a pour coefficient dominant $\dfrac{(2k)!}{k!}$ (question **14.a.**), il est donc clair que $\boxed{L_k=\dfrac{k!}{(2k)!}Q_k}$, seul multiple scalaire unitaire de Q_k.

d. On demande dans cette question, la preuve par récurrence de la formule d'intégration par parties généralisée (correspondant à k intégrations par parties successives).
Pour $k\in\mathbb{N}^*$ (*attention pour $k=0$, la formule proposée n'a pas de sens car la borne supérieure*

vaut alors -1, à moins de prendre par convention que $\sum_{j=0}^{-1}$ représente forcément la somme nulle), soit :

$$\mathcal{P}(k) : \text{"}\forall(f,g) \in \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x],\ \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)g(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \Big[f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k)}(t)\mathrm{d}t\text{"}$$

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 1$: la relation voulue s'écrit, pour tout $(f,g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$,

$$\int_{-1}^{1} f'(t)g(t)\mathrm{d}t = (-1)^0 \Big[f(t)g(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)g'(t)\mathrm{d}t,$$

qui correspond bien à la formule d'intégration par parties usuelle, bien applicable ici avec les fonctions polynômiales f et g, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie, soit :

$$\forall(f,g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x],\ \int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \Big[f^{(k-j)}(t)g^{(j)}(t)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $(f,g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\mathrm{d}t$, on pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= g(t) && \longrightarrow && u'(t) = g'(t) \\ v'(t) &= f^{(k+1)}(t) && \longrightarrow && v(t) = f^{(k)}(t) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1\,;1]$, donc par intégration par parties :

$$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\mathrm{d}t = \Big[f^{(k)}(t)g(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence avec f et $\underline{g'}$, qui sont bien des fonctions polynômiales, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f^{(k)}g'(t)\mathrm{d}t &= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \Big[f^{(k-1-j)}(t)\underbrace{g'^{(j)}(t)}_{=g^{(j)}(t)}\Big]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)g'^{(k)}(t)\mathrm{d}t \\ &\overset{[i=j+1]}{=} \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1} \Big[f^{(k-i)}(t)g^{(i)}(t)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En réinjectant ce terme dans la première formule d'intégration par parties de cette hérédité, en tenant compte du fait que $-(-1)^{i-1} = (-1)^i$ et que le terme $\Big[f^{(k)}(t)g(t)\Big]_{-1}^{1}$ correspond au terme général $\Big[f^{(k-i)}(t)g^{(i)}(t)\Big]_{-1}^{1}$ quand $i = 0$, on obtient bien :

$$\int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t)g(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \Big[f^{(k-i)}(t)g^{(i)}(t)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

e. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$ fixé.

i. On sait déjà que $P_k^{(k)}(x) = Q_k(x)$ est un polynôme de degré k, de terme dominant $\dfrac{(2k)!}{k!}x^k$.
Si on dérive ce dernier k fois de plus, on obtient alors un polynôme constant, dont le seul terme est le résultat de la dérivation k fois du terme dominant de Q_k, ce qui donne :

$$P_k^{(2k)}(x) = Q_k^{(k)}(x) = \frac{(2k)!}{k!} \times k! \times 1 = (2k)!, \quad \text{CQFD.}$$

ii. Montrons par récurrence (finie) sur ℓ que la propriété $\mathcal{Q}(\ell)$: "il existe un polynôme $R_{k,\ell}$ de degré inférieur ou égal à ℓ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P_k^{(\ell)}(x) = (x^2-1)^{k-\ell}R_{k,\ell}(x)$", est vraie pour tout $\ell \in [\![0\,;k]\!]$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $\ell = 0$: $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}_k^{(0)}(x) = (x^2-1)^k = (x^2-1)^{k-0}R_{k,0}(x)$ avec $R_{k,0}(x) = 1$, donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{Q}(\ell)$ vraie pour un certain $\ell \in [\![0\,;k-1]\!]$ (*ce qui a du sens si $k \geqslant 1$, sinon la récurrence est déjà terminée*), et montrons qu'alors $\mathcal{Q}(\ell+1)$ est encore vraie.

Par hypothèse de récurrence : il existe un polynôme $R_{k,\ell}$ tel que $\deg R_{k,\ell} \leqslant \ell$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ P_k^{(\ell)}(x) = (x^2-1)^{k-\ell}R_{k,\ell}(x)$.
En dérivant cette relation, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_k^{(\ell+1)}(x) = 2(k-\ell)x(x^2-1)^{k-\ell-1}R_{k,\ell}(x) + (x^2-1)^{k-\ell}R'_{k,\ell}(x) = (x^2-1)^{k-\ell-1}\cdot\big(2(k-\ell)xR_{k,\ell}(x) + (x^2-1)R'_{k,\ell}(x)\big).$$

On pose alors $R_{k,\ell+1}(x) = 2(k-\ell)xR_{k,\ell}(x) + (x^2-1)R'_{k,\ell}(x)$: c'est bien un polynôme comme somme et produit de polynômes, et d'après les règles sur les degrés :

$$\deg\big(xR_{k,\ell}(x)\big) = 1 + \deg(R_{k,l}) \leqslant \ell + 1 \text{ et } \deg\big((x^2-1)R'_{k,\ell}(x)\big) = 2 + \deg R_{k,\ell} - 1 \leqslant \ell + 1,$$

donc on a aussi $\deg(R_{k,\ell+1}) \leqslant \ell + 1$ et $\mathcal{Q}(\ell+1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(\ell)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $\ell \in [\![0\,;k]\!]$, d'après le principe de récurrence.

iii. Pour tout $\ell \in [\![0\,;k-1]\!]$ (*ce qui là encore, a du sens si et seulement si $k \geqslant 1$*), le polynôme $P_k^{(\ell)}(x)$ est divisible par $(x^2-1)^{k-\ell}$ où l'exposant $k-\ell$ est strictement positif : cela assure que -1 et 1 sont racines de $P_k^{(\ell)}$, c'est-à-dire que $P_k^{(\ell)}(1) = \mathbf{P}_k^{(\ell)}(-1) = 0$.
La formule d'intégration par parties généralisée obtenue en **d.** assure alors que :

$$\begin{aligned}
||Q_k||^2 = \langle Q_k\,, Q_k\rangle &= \int_{-1}^{1} P_k^{(k)}(t)Q_k(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left[P^{(k-1-j)}(t)Q_k^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^k\int_{-1}^{1} P_k(t)Q_k^{(k)}(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + (-1)^k\int_{-1}^{1} P_k(t)P_k^{(2k)}(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

puisque d'après la question précédente, pour tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, $\ell = k-1-j \in [\![0\,;k-1]\!]$, donc chaque terme $\left[P^{(k-1-j)}(t)Q_k^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} = P^{(k-1-j)}(1)Q_k^{(j)}(1) - P^{(k-1-j)}(-1)Q_k^{(j)}(-1)$ est nul.

Il reste à reprendre le fait que $P_k^{(2k)}$ est un polynôme constant, et :

$$||Q_k||^2 = (2k)!\int_{-1}^{1} P_k(t)\mathrm{d}t = (2k)!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^k\mathrm{d}t = (2k)!J_k = \frac{(2k)!2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1}$$

en reconnaissant effectivement l'intégrale J_k étudiée dans la partie 1.
On termine en reprenant le résultat de **14.c.***iii.* :

$$||L_k|| = \frac{k!}{(2k)!}||Q_k|| = \frac{k!}{(2k)!}\sqrt{\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1}} = \frac{k!k!}{(2k)!}\sqrt{2^{2k}\sqrt{2}}\sqrt{2k+1} = 2^k\sqrt{\frac{2}{2k+1}}\binom{2k}{k}^{-1}$$

en effet, en reconnaissant en $\dfrac{k!k!}{(2k)!}$ l'inverse d'un coefficient binomial,
et du fait que $\sqrt{2^{2k}} = 2^{\frac{2k}{2}} = 2^k$.

Problème 2

Partie 1 - Loi de Cauchy

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geqslant 1 > 0$: la fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, comme inverse d'une fonction continue.

Pour tous réels A et B tels que $A > B$:

$$\int_B^A \frac{1}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_B^A = \frac{1}{\pi}\big(\mathrm{Arctan}(A) - \mathrm{Arctan}(B)\big).$$

Puisque $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{Arctan}(A) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{B\to-\infty} \mathrm{Arctan}(B) = -\dfrac{\pi}{2}$, alors l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{\pi}{\pi} = 1,$$

ce qui achève de démontrer que f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit la loi de Cauchy, sa fonction de répartition est notée F.

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$, et pour $A > 0$:

$$\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^A \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^A = \frac{1}{2\pi}\ln(1+A^2) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ diverge, donc a fortiori $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ aussi.

La variable aléatoire X n'admet donc pas d'espérance, et donc pas de variance non plus.

3. La fonction de répartition de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{B\to-\infty}\int_B^x \frac{1}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big(\mathrm{Arctan}(x) - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{2}.$$

Sur $\mathbb{R}$, ette fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue, strictement croissante car de dérivée f toujours strictement positive : d'après le théorème éponyme, F réalise une bijection de $]-\infty\,;+\infty[$ dans l'intervalle-image $]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[=]-1\,;1[$ puisque F est une fonction de répartition.

Soit $y \in]0\,;1[$, on résout l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = y \iff \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{2} = y \iff \mathrm{Arctan}(x) = \pi y - \frac{\pi}{2} \iff x = \tan\Big(\pi y - \frac{\pi}{2}\Big) = F^{-1}(y)$$

par bijectivité de la fonction tangente de $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, auquel appartient $\pi y - \frac{\pi}{2}$ vu que $y \in]0\,;1[$, dans $\mathbb{R}$.

4. a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0\,;1[$. Alors $U(\Omega)=]0\,;1[$ et par bijectivité de F, $F^{-1}(U)(\omega)=\mathbb{R}Y(\Omega)$.

Pour tout réel x, puisque F est continue bijective, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;1[$ $(*)$:

$$F_Y(x)=\mathbf{P}(Y\leqslant x)=\mathbf{P}\big(F^{-1}(U)\leqslant x\big)\overset{(*)}{=}\mathbf{P}\big(U\leqslant F(x)\big)=F(x)$$

puisque $F(x)\in]0\,;1[$. La variable aléatoire Y admet donc la même fonction de répartition que X : elles suivent bien toutes deux la même loi.

b. Les résultats des deux questions précédentes permettent alors de simuler X en simulant Y qui suit la même loi, par la *méthode d'inversion* :

```
def cauchy():
    U = rd.random()      # simulation de la loi uniforme sur ]0;1[
    Y = np.tan(np.pi*U - np.pi/2)
    return Y
```

On note maintenant $Z=\sqrt{|X|}$.

5. La variable aléatoire Z est bien définie et à valeurs positives : on peut déjà dire que pour tout $x<0$, $F_Z(x)=\mathbf{P}(Z\leqslant x)=0$.

Soit $x\geqslant 0$. La fonction carré étant continue, strictement croissante bijective de $[0\,;+\infty[$ dans lui-même :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z\leqslant x)&=\mathbf{P}\big(\sqrt{|X|}\leqslant x\big)=\mathbf{P}(|X|\leqslant x^2)=\mathbf{P}(-x^2\leqslant X\leqslant x^2)\\&=F(x^2)-F(-x^2)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}(x^2)+\frac12-\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}(-x^2)-\frac12\\&=\frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(x^2)\end{aligned}$$

car la fonction Arctangente est impaire. La fonction $F_Z:\ x\mapsto\begin{cases}\frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(x^2)\text{ si }x\geqslant 0\\ 0\text{ si }x<0\end{cases}$

est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $]-\infty\,;0[$ comme constante, et sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, ce qui représente un nombre fini de points.

Par ailleurs : $F_Z(0)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(0)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(x^2)$ par continuité de l'Arctangente en 0.

C'est aussi la limite de $F_Z(x)$ quand x tend vers 0^-, donc F_Z est continue en 0, donc est continue sur $\mathbb{R}$.

La variable aléatoire Z est donc bien une variable à densité, et une densité f_Z de Z est obtenue par dérivation de F_Z, sauf en 0 où on choisit une valeur arbitraire positive. Une telle densité est ainsi définie par :

$$\forall x\leqslant 0,\ f_Z(x)=0\text{ et }\forall x>0,\ f_Z(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2x}{1+(x^2)^2}=\frac{4x}{\pi(1+x^4)}.$$

6. La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf_Z(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme $x\mapsto xf_Z(x)$ est nulle sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $]0\,;+\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf_Z(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

La fonction $x\mapsto\dfrac{x^2}{1+x^4}$ est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$, et $\dfrac{x^2}{1+x^4}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{x^4}=\dfrac{1}{x^2}$.

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente, puisque d'exposant $2>1$. Le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues, positives assure alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ converge.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ converge comme intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$, donc finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_Z(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf_Z(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} xf_Z(x)\mathrm{d}x$ converge, et X admet bien une espérance.

De la même manière : X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, ce qui est le cas si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)\mathrm{d}x$ converge.

Or : $\quad x^2 f_Z(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{x^3}{x^4} = \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{x}.$

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ est cette fois divergente puisque $1 \leqslant 1$, donc a fortiori $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_Z(x)\mathrm{d}x$ diverge : la variable aléatoire X n'admet donc pas de moment d'ordre 2, et par conséquent n'admet pas de variance non plus.

7. Le but de cette question est de calculer explicitement $\mathbf{E}(Z)$.

a. Soient α et β deux réels. Pour tout $x \geqslant 0$:

$$\frac{\alpha x}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\beta x}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{\alpha x(x^2+\sqrt{2}x+1)+\beta x(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{(\alpha+\beta)x^3+(\alpha-\beta)\sqrt{2}x^2+(\alpha+\beta)x}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}.$$

Par identification des coefficients au numérateur, cette expression est égale à $\dfrac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$ pour tout $x \geqslant 0$ si :

$$\begin{cases}\alpha+\beta & = 0\\ (\alpha-\beta)\sqrt{2} & = 1\end{cases} \iff \begin{cases}\beta = -\alpha\\ 2\alpha\sqrt{2} = 1\end{cases} \iff \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ et } \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

b. Les fonctions trinômes $x \mapsto x^2-\sqrt{2}x+1$ et $x \mapsto x^2+\sqrt{2}x+1$ sont continues et strictement positives sur $\mathbb{R}$, puisque leur discriminant commun est $2-4=-2<0$ et leur coefficient dominant commun est $1>0$.

Leurs inverses sont alors des fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}^+$, toutes deux équivalentes à $\dfrac{1}{x^2}$ lorsque x est au voisinage de $+\infty$.

Comme on l'a fait à la question **6.**, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ entraîne celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ et donc celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}$. Il en est de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}$.

En écrivant : $\quad \forall x \geqslant 0,\ x^2+\sqrt{2}x+1 = \big(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\big)^2-\frac{2}{4}+1 = \big(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2+\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(\big(\sqrt{2}x+1\big)^2+1\Big)$,
le changement de variable affine $t=\sqrt{2}x+1$ est licite et donne :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t/\sqrt{2}}{\frac{1}{2}(t^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sqrt{2}\big(\lim_{A\to+\infty}\mathrm{Arctan}(A)-\mathrm{Arctan}(1)\big)$$

$$= \sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\ \boxed{=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\,.$$

L'énoncé admettait que de la même manière, on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.$

c. Avec la décomposition (évidemment vraie) donnée par l'énoncé, et en remarquant que :

$$\forall x \geqslant 0,\quad (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) = x^4-\sqrt{2}x^3+x^2+\sqrt{2}x^3-2x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x+1 = x^4+1$$

on peut écrire, pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A x f_Z(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^A \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_0^A \frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{\pi}\Big(\int_0^A \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Big)\mathrm{d}x + \int_0^A \frac{\beta}{2}\Big(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\Big)\mathrm{d}x\Big)$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\Big(\Big[\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)\Big]_0^A + \sqrt{2}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Big)$$

$$+ \frac{2\beta}{\pi}\Big(\Big[\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)\Big]_0^A - \sqrt{2}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\Big(\ln(A^2-\sqrt{2}A+1) - \ln(A^2+\sqrt{2}A+1)\Big) + \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\Big)$$

Puisque pour $A > 0$,

$$\ln(A^2-\sqrt{2}A+1)-\ln(A^2+\sqrt{2}A+1) = \ln\Big(\frac{A^2-\sqrt{2}A+1}{A^2+\sqrt{2}A+1}\Big) = \ln\Big(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{A}+\frac{1}{A^2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{A}+\frac{1}{A^2}}\Big) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ln\Big(\frac{1}{1}\Big) = 0,$$

les résultats de la question précédente assurent que, lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} x f_Z(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\Big) = \frac{4}{2\sqrt{2}} \boxed{= \sqrt{2}}\,.$$

8. Informatique.

La fonction `mystere` proposée par l'énoncé, qui prend en arguments `eps` et n :

- réalise 1000 fois (selon la variable i qui varie de 0 à 999) le calcul d'un échantillon de n réalisations indépendantes de la loi de $Z = \sqrt{|X|}$ (où X suit la loi de Cauchy), enregistré à chaque fois dans le vecteur `ech`.
- vérifie pour chacun de ces échantillons, si sa moyenne empirique $\overline{Z_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \texttt{ech}[k]$ vérifie l'inégalité $|\overline{Z_n} - \sqrt{2}| \leqslant \texttt{eps}$ ou non.
- En cas de succès au test, le vecteur `L` initialement nul et de taille 1000, voit son élément d'indice i prendre la valeur 1 en lieu et place du 0, ce qu'on assimile à un succès dans le test.
- La fonction renvoie finalement la moyenne des valeurs de `L` (qui ne valent que 0 ou 1), qui correspond donc à la *fréquence de réalisation* de l'événement $|\overline{Z_n} - \sqrt{2}| \leqslant \texttt{eps}$ sur les 1000 échantillons de taille n produits.

Le script qui suit alors la définition de cette fonction affiche ses résultats pour des valeurs de l'argument `eps` de plus en plus faibles, et des valeurs de n de plus en plus grandes.

L'affichage des résultats illustre le fait que quel que soit `eps`, lorsque n est assez grand la fréquence de réalisation de l'événement $[|\overline{Z_n} - \sqrt{2}| \leqslant \texttt{eps}]$, est de plus en plus proche de 1.

Ce script a donc pour but d'illustrer la convergence en probabilité de la moyenne empirique $\overline{Z_n}$ d'un échantillon i.i.d. de la loi de Z, vers la variable certaine égale à l'espérance $\mathbf{E}(Z) = \sqrt{2}$.

C'est ce que dirait la *loi faible des grands nombres* si elle pouvait s'appliquer à la loi de Z : or elle ne le peut pas, car dans les hypothèses nécessaires pour la mise en œuvre de ce théorème de cours, la loi parente doit admettre une espérance *et* une variance : on a vu en **6.** que cette dernière n'existe pas !

Partie 2 - Variables indicatrices et une extension de théorème

Soit A un événement. L'énoncé rappelle la définition de la *variable aléatoire indicatrice* de l'événement A, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}.$$

9. La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ prend uniquement les valeurs 0 et 1 : elle suit donc une loi de Bernoulli, de paramètre $\mathbf{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbf{P}(A)$. De fait :

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)\big(1 - \mathbf{P}(A)\big).$$

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, l'énoncé définit aussi la *fonction indicatrice* de I, notée χ_I, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}.$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité g et $s > 0$.

10. a. Pour tout $\omega \in \Omega$: $\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega)$ vaut 1 si et seulement si l'issue ω appartient à l'événement $[X > s]$, donc si et seulement si $X(\omega) > s \iff X(\omega) \in]s\,;+\infty[$: c'est bien le cas si et seulement si la fonction indicatrice de l'intervalle $]s\,;+\infty[$ prend la valeur 1 en le réel $X(\omega)$.

Sinon :

$$\mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = 0 \iff \omega \notin [X > s] \iff X(\omega) \leqslant s \iff X(\omega) \notin]s\,;+\infty[\iff \chi_{]s\,;+\infty[}\big(X(\omega)\big) = 0,$$

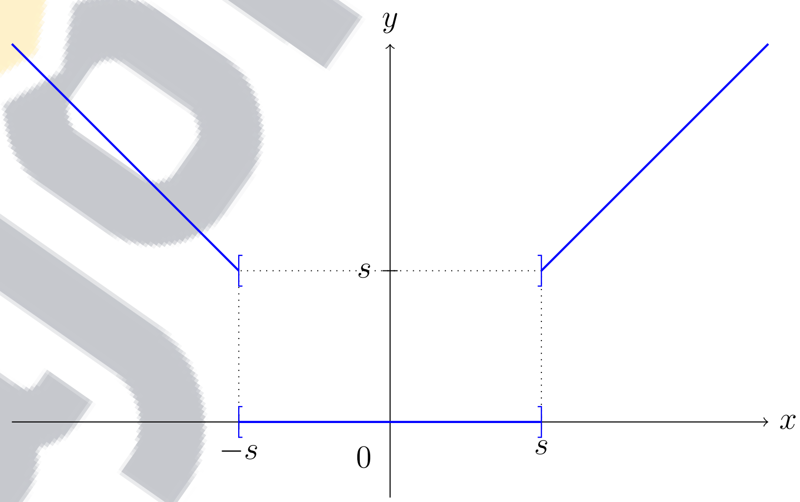
donc en effet :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = \chi_{]s\,;+\infty[}\big(X(\omega)\big).$$

b. Soit φ_s la fonction définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_s(x) = |x|\chi_{]s\,;+\infty[}(|x|)$.

Puisque $|x| \in]s\,;+\infty[\iff |x| > s \iff x < -s$ ou $x > s$, alors $\varphi_s(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in]-\infty\,;-s[\\ 0 & \text{si } x \in [-s\,;s] \\ x & \text{si } x \in]s\,;+\infty[\end{cases}$.

Le tracé de la fonction φ_s est donc le suivant :



Il est assez clair que les points de discontinuité de la fonction φ_s sont $-s$ et s.

L'énoncé supposait ici que dans la suite, X admet une espérance, et que celle-ci est nulle.

On considère alors une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X.

Soit $M > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les variables

$$Y_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k| \leqslant M]} \quad \text{et} \quad Z_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k| > M]}.$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque les événements $[|X_k| > M]$ et $[|X_k| \leqslant M]$ sont contraires l'un de l'autre, alors lorsque l'indicatrice de l'un prend la valeur 1, celle de l'autre prend la valeur à, c'est-à-dire : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_{[|X_k| \leqslant M]}(\omega) + \mathbb{1}_{[|X_k|>M]}(\omega) = 1$, et donc :

$$Y_k + Z_k = X_k \cdot \big(\mathbb{1}_{[|X_k| \leqslant M]}(\omega) + \mathbb{1}_{[|X_k|>M]}(\omega)\big) = X_k.$$

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega,\ Y_k(\omega) = X_k(\omega)$ si et seulement si $|X_k(\omega)| \leqslant M$, et alors $|Y_k(\omega)| = |X_k(\omega)| \leqslant M$. Sinon, $Y_k(\omega) = 0$.

Cela implique que : $\quad \forall \omega \in \Omega,\ 0 \leqslant \big(Y_k(\omega)\big)^2 \leqslant M^2$.

La variable certaine égale à M^2 admet une espérance, donc d'après le théorème d'existence de l'espérance par domination (ou du fait que $Y_k^2(\Omega) \subset [0\,; M]$ est *borné*), $\mathbf{E}(Y_k^2)$ existe et $\mathbf{E}(Y_k^2) \leqslant M^2$.

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a. De la question **10.a.**, on déduit que pour tout $\omega \in \Omega$:

$$|Z_k(\omega)| = |X_k(\omega)|\mathbb{1}_{[X_k>M]}(\omega) = |X_k(\omega)|\chi_{]M\,;+\infty[}\big(X_k(\omega)\big) = \varphi_M\big(X_k(\omega)\big).$$

Comme d'après **10.b.**, φ_s est positive et continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de (2) points, alors le théorème de transfert assure que $\mathbf{E}(|Z_k|)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_M(x)g(x)\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente.

Or il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \varphi_M(x) \leqslant |x|$ puisque $0 \leqslant \chi_{]M\,;+\infty[}(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \varphi_M(x)g(x) \leqslant |x|g(x)$ puisque $g(x) \geqslant 0$.

Or X admet une espérance, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|g(x)\mathrm{d}x$ converge ; par comparaison d'intégrales de fonctions continues (sauf peut-être en un nombre fini de points) et positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_M(x)g(x)\mathrm{d}x$ converge, donc $\mathbf{E}(|Z_k|)$ existe, et vaut :

$$\mathbf{E}(|Z_k|) = \int_{-\infty}^{-M} |x|g(x)\mathrm{d}x + \int_{-M}^{M} 0\ \mathrm{d}x + \int_{M}^{+\infty} |x|g(x)\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_{M}^{+\infty} |x|g(x)\mathrm{d}x = 0$ comme limite du *reste* d'une intégrale convergente,

et de même, $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_{-\infty}^{-M} |x|g(x)\mathrm{d}x = 0$, donc par somme de limites, on a bien :

$$\lim_{M\to+\infty} \mathbf{E}(|Z_k|) = 0.$$

b. Le résultat précédent montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_M(x)g(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, et donc que Z_k admet une espérance, qui vérifie d'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$0 \leqslant |\mathbf{E}(Z_k)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x\chi_{]M\,;+\infty[}(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\chi_{]M\,;+\infty[}(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

soit : $\qquad 0 \leqslant |\mathbf{E}(Z_k)| \leqslant \mathbf{E}(|Z_k|)$.

Le fait que $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \mathbf{E}(|Z_k|) = 0$ et le théorème d'encadrement assurent alors que :

$$\lim_{M\to+\infty} |\mathbf{E}(Z_k)| = 0 \iff \lim_{M\to+\infty} \mathbf{E}(Z_k) = 0.$$

c. La relation : $Y_k + Z_k = X_k$ et le fait que chacune de ces trois variables aléatoires admette une espérance donne, par linéarité de cette dernière :

$$\mathbf{E}(Y_k) + \mathbf{E}(Z_k) = \mathbf{E}(X_k) = 0.$$

Seules les espérances $\mathbf{E}(Y_k)$ et $\mathbf{E}(Z_k)$ dépendent de M, et lorsqu'on fait tendre M vers $+\infty$, l'égalité ci-dessus devient :

$$\lim_{M\to+\infty} \mathbf{E}(Y_k) = \mathbf{E}(X_k) = 0.$$

Dans toute la suite, on considère $t > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés.

14. Soient x, y deux réels. Le plus simple ici est de démontrer la contraposée de l'implication demandée :

Si $|x| \leqslant \frac{t}{2}$ **et** $|y| \leqslant \frac{t}{2}$, alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \Longrightarrow |x+y| \leqslant t.$$

Par contraposée de l'implication : $\left(\left[|x| \leqslant \frac{t}{2}\right] \text{ et } \left[|y| \leqslant \frac{t}{2}\right]\right) \Longrightarrow |x+y| \leqslant t$, on a bien :

$$|x+y| > t \Longrightarrow \left(\left[|x| > \frac{t}{2}\right] \text{ ou } \left[|y| > \frac{t}{2}\right]\right)$$

15. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \quad \overline{Y}_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \quad \text{et} \quad \overline{Z}_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}.$$

Le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k + Z_k = X_k$ donne assez naturellement : $\overline{X}_n = \overline{Y}_n + \overline{Z}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Mais alors, l'implication démontrée à la question précédente donne l'inclusion d'événements :

$$[|\overline{X}_n| > t] = [|\overline{Y}_n + \overline{Z}_n| > t] \subset \left[|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right] \cup \left[|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right],$$

Donc par croissance de la probabilité :

$$\mathbf{P}(|\overline{X}_n| > t) \leqslant \mathbf{P}\left(\left[|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right] \cup \left[|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right]\right) \leqslant \mathbf{P}\left(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right)$$

d'après l'inégalité de Boole qui assure que pour tous événements A et B de $\mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, et qui provient assez naturellement du fait que $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \underbrace{\mathbf{P}(A \cap B)}_{\geqslant 0}$.

16. a. Il faut à nouveau ici, faire preuve d'initiative pour reconnaître un cas d'utilisation de l'**inégalité de Markov** :

La variable aléatoire $|\overline{Z}_n|$ est à valeurs positives, et $|\overline{Z}_n| \leqslant \frac{|Z_1| + \cdots + |Z_n|}{n}$ (encore d'après l'inégalité trianglaire).

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(|Z_k|)$ existe, alors $\frac{|Z_1| + \cdots + |Z_n|}{n}$ admet une espérance, et par domination positive, $|\overline{Z}_n|$ aussi, qui vérifie d'ailleurs, par croissance de l'espérance :

$$\mathbf{E}(|\overline{Z}_n|) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|Z_1|) + \cdots + \mathbf{E}(|Z_n|)}{n} = \frac{n\mathbf{E}(|Z_1|)}{n} = \mathbf{E}(|Z_1|)$$

puisque les $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes la même loi.

On peut donc écrire l'inégalité de Markov pour $|\overline{Z}_n|$ avec $\alpha = \frac{t}{2} > 0$, ce qui donne :

$$\mathbf{P}\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|\overline{Z}_n|)}{t/2} = \frac{2}{t}\mathbf{E}(|\overline{Z}_n|) \leqslant \frac{2}{t}\mathbf{E}(|Z_1|).$$

b. Le réel t est fixé, et comme on l'a vu en **13.a.**, $\lim_{M\to+\infty} \mathbf{E}(|Z_1|) = 0 = \lim_{M\to+\infty} \frac{2}{t}\mathbf{E}(|Z_1|)$.

Par définition de la limite avec des quantificateurs, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un réel $M_1 > 0$ tel que pour tout $M \geqslant M_1$, $\frac{2}{t}\mathbf{E}(|Z_1|) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Le résultat de **16.a.** assure alors (par transitivité de l'inégalité) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\Big(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

17. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La généralisation de l'identité remarquable : $(Y_1 + Y_2)^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + 2Y_1Y_2$ dans le calcul du carré d'une somme de n termes donne

$$\overline{Y}_n^2 = \frac{1}{n^2}(Y_1 + \cdots + Y_n)^2 = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Y_iY_j\Big)$$

somme des carrés de chaque terme, à laquelle s'ajoute la somme de tous les doubles produits de couples de termes distincts.

La linéarité de l'espérance achève de prouver que :

$$\mathbf{E}(\overline{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(Y_k^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{E}(Y_iY_j)\Big).$$

b. Les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant mutuellement indépendantes et de même loi, et chaque variable Y_k ne dépendant que de X_k selon la même formule à chaque fois, le lemme des coalitions assure que les $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont encore mutuellement indépendantes, et elles sont aussi de même loi.

Comme les $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ admettent un moment d'ordre 2, alors pour tout couple (i,j) de $[\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i < j$: $\mathbf{E}(Y_iY_j)$ existe et vaut $\mathbf{E}(Y_iY_j) = \mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}(Y_j) = \mathbf{E}(Y_1)^2$.

Ainsi :

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbf{E}(Y_iY_j) = 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\mathbf{E}(Y_1)^2 = 2\sum_{j=2}^{n}(j-1)\mathbf{E}(Y_1)^2 = 2\mathbf{E}(Y_1)^2\sum_{k=1}^{n-1}k = 2\mathbf{E}(Y_1)^2\frac{(n-1)n}{2} = n(n-1)\mathbf{E}(Y_1)^2.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Des deux résultats précédents et de celui de la question **12.**, on déduit :

$$\mathbf{E}(\overline{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(Y_k^2) + n(n-1)\mathbf{E}(Y_1)^2\Big) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}M^2 + \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\mathbf{E}(Y_1)^2 \leqslant \frac{M^2}{n} + \mathbf{E}(Y_1)^2.$$

d. Puisque d'après **13.c.**, $\lim_{M\to+\infty}\mathbf{E}(Y_1)^2 = 0$, alors en revenant à la définition de la limite :

avec $\frac{t^2\varepsilon}{12} > 0$, il existe un réel $M_2 > 0$ tel que, si $M \geqslant M_2$, alors

$$\mathbf{E}(Y_1)^2 \leqslant \frac{t^2\varepsilon}{12}.$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \geqslant M_2$. La fonction carrée étant continue strictement croissante, bijective de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même : $\mathbf{P}\Big(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\Big) = \mathbf{P}\Big(\overline{Y}_n^2 > \frac{t^2}{4}\Big)$.

La variable aléatoire $\overline{Y}_n^2$ étant positive et admettant une espérance (d'après **17.a.**), l'inégalité de Markov avec le réel $\alpha = \frac{t^2}{4} > 0$ donne pour cette variable :

$$\mathbf{P}\Big(\overline{Y}_n^2 > \frac{t^2}{4}\Big) \leqslant \frac{4\mathbf{E}(\overline{Y}_n^2)}{t^2} \leqslant \frac{4}{t^2}\Big(\frac{M^2}{n} + \mathbf{E}(Y_1)^2\Big) \leqslant \frac{4}{t^2}\Big(\frac{M^2}{n} + \frac{t^2\varepsilon}{12}\Big),$$

ce qui donne bien : $\mathbf{P}\Big(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\Big) \leqslant \frac{4M^2}{t^2n} + \frac{\varepsilon}{3}$.

18. Tout réel $M \geqslant \max(M_1, M_2)$ vérifie $M \geqslant M_1$ et $M \geqslant M_2$, donc les résultats des questions **15.**, **16.b.** et **17.e.** s'appliquent, qui donnent :

$$\mathbf{P}(|\overline{X}_n| > t) \leqslant \mathbf{P}\Big(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\Big) + \mathbf{P}\Big(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\Big) \leqslant \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

19. Avec $M = \max(M_1, M_2)$: puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4M^2}{t^2n} = 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{4M^2}{t^2n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels M_1 et M_2 strictement positifs qui entraînent l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(|\overline{X}_n| > t) \leqslant \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On reconnaît la définition avec des quantificateurs de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|\overline{X}_n| > t) = 0.$$

20. Ce résultat qui se réécrit aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|\overline{X}_n - 0| > t)$, signifie que la suite $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0, qui est l'espérance de la loi parente, celle de X.

En revenant à ce qui est fait à la question **8.**, à la suite de l'étude de la variable aléatoire Z de la partie 1 : puisque $\mathbf{E}(Z) = \sqrt{2}$, si $(\mathcal{Z}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que Z, alors les variables $X_k = \mathcal{Z}_k - \sqrt{2}$ sont des variables centrées, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\mathcal{Z}_k - \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathcal{Z}_k - \frac{n\sqrt{2}}{n} = \overline{\mathcal{Z}}_n - \sqrt{2}$, et le résultat démontré à la question **19.** se réécrit :

$$\forall t > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|\overline{\mathcal{Z}}_n - \sqrt{2}| > t) = 0,$$

ce qui signifie que la suite des moyennes empiriques $(\overline{\mathcal{Z}}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\sqrt{2} = \mathbf{E}(Z)$, l'espérance de la loi parente.

On obtient donc la même conclusion que la loi faible des grands nombres, mais avec une hypothèse de moins : les $(\mathcal{Z}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont bien mutuellement indépendantes, identiquement distribuées, admettent une espérance, mais pas de variance.

Cette version plus forte du théorème est parfois appelée Théorème de Khintchine, et est en fait une conséquence d'un thèorème plus puissant : la loi **forte** *des grands nombres.*

★★★ FIN DU SUJET ★★★