

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$.

1. L'ensemble E_{0_3} est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $: 0_3M + M0_3 = 0_3$: toute matrice vérifie cette relation !

Donc $E_{0_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

L'ensemble E_{I_3} est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$I_3M + MI_3 = 0_3 \iff 2M = 0_3 \iff M = 0_3,$$

donc $E_{I_3} = \{0_3\}$ est l'ensemble réduit à la matrice nulle.

2. L'ensemble E_C est par définition une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non vide puisqu'on a toujours $C0_3 + 0_3C = 0_3$, donc $0_3 \in E_C$.

Soient M et N deux éléments de E_C et λ un réel, alors :

$$C(\lambda \cdot M + N) + (\lambda \cdot M + N)C = \lambda \cdot (CM + MC) + (CN + NC) = \lambda \cdot 0_3 + 0_3 = 0_3$$

puisque M et N sont éléments de E_C , ce qui prouve que $\lambda \cdot M + N \in E_C$.

L'ensemble E_C est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit M une matrice de E_A , vérifiant donc : $AM + MA = 0_3$. Les transposées de ces deux membres sont donc encore égales, et d'après les propriétés de la transposition (linéarité, transposée d'un produit matriciel) :

$${}^t(AM + MA) = {}^t0_3 \iff {}^tM {}^tA + {}^tA {}^tM = 0_3 \iff {}^tMA + A {}^tM = 0_3 \iff A {}^tM + {}^tMA = 0_3$$

en ayant remarqué que A est une matrice *symétrique*, vérifiant donc ${}^tA = A$.

Cette dernière égalité prouve que tM appartient encore à E_A .

4. a) Du fait justement que A est une matrice *symétrique*, le théorème admis du cours assure que A est diagonalisable.

- b) La formulation de la question incite à calculer la matrice $A^3 - 9A$, selon les étapes successives :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1+4+0 & -2+0+0 & 0-4+0 \\ -2+0+0 & 4+0+4 & 0+0-2 \\ 0-4+0 & 0+0-2 & 0+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 5+4+0 & -10+0-8 & 0-4+4 \\ -2-16+0 & 4+0-4 & 0+16+2 \\ -4+4+0 & 8+0+10 & 0-4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

On remarque bien que : $A^3 = 9A \iff A^3 - 9A = 0_3$, ce qui prouve que $P(x) = x^3 - 9x$ est un polynôme annulateur de A .

On sait donc d'après le cours, que si λ est une valeur propre de A , alors λ est racine de P , c'est-à-dire : $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.

c) Les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 9) = 0 \iff \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$ sont exactement les réels $-3, 0$ et 3 , donc :

$$\text{Sp}(A) \subset \{-3; 0; 3\}.$$

On vérifie alors une par une, que ces valeurs propres *possibles* sont bien valeurs propres de A , et on calcule le cas échéant les sous-espaces propres associés :

- Pour $\lambda = 0$: on résout, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le système :

$$AX = 0_{3,1} \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \end{matrix}$$

En remarquant que les deux dernières lignes sont proportionnelles ($L_2 = -2L_3$) donc redon-

dantes, le système admet donc une infinité de solutions : $AX = 0_{3,1} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$,

donc 0 est bien valeur propre de A , et le sous-espace propre associé est

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

- Pour $\lambda = -3$: on résout de même le système

$$(A+3I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4y + 4z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \end{matrix}$$

Là encore, les lignes L_2 et L_3 sont proportionnelles donc redondantes,

et $(A + 3I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -y = -2x \end{cases}$, donc le système admet une infinité de solu-

tions : $\lambda = -3$ est bien valeur propre de A , et $E_{-3}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

- Enfin pour $\lambda = 3$: on résout de même le système

$$(A-3I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \end{matrix}$$

Là encore, les lignes L_2 et L_3 sont proportionnelles donc redondantes,

et $(A - 3I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} x = -y = -2z \\ y = 2z \end{cases}$, donc le système admet une infinité de solu-

tions : $\lambda = 3$ est bien valeur propre de A , et $E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Les trois sous-espaces propres sont chacun engendrés par un seul vecteur (propre) non nul, qui forme donc à chaque fois une famille libre et génératrice, donc une base de ce sous-espace propre.

On peut donc conclure ici que $D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

est une matrice diagonale qui contient bien les valeurs propres de A dans l'ordre croissant,

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres dans l'ordre des valeurs propres sur la diagonale de D . On a aussi de fait, bien respecté la consigne de l'énoncé : les coefficients diagonaux de P sont tous égaux à 1.

5. Le calcul matriciel donne :
$$P^2 = \begin{pmatrix} 1+4+4 & 2+2-4 & -2+4-2 \\ 2+2-4 & 4+1+4 & -4+2+2 \\ -2+4-2 & -4+2+2 & 4+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

soit $P^2 = 9I_3 \iff \frac{1}{9}P^2 = I_3$: la matrice P est donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{9}P$.

6. a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} N \in E_D &\iff DN + ND = 0_3 \iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3 \\ &\iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = 0_3 \iff a = b = d = f = h = i = 0 \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Ces équivalences assurent l'égalité d'ensembles :

$$E_D = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1}).$$

La famille des trois matrices élémentaires $\mathcal{B} = (E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1})$ est une famille génératrice de E_D : c'est aussi une famille libre puisque c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc c'est une base de E_D , et $\dim E_D = 3$.

7. a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$, et on a donc aussi $M = PNP^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff AM + MA = 0_3 \iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0_3 \\ &\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3 \iff P(DN + ND)P^{-1} = 0_3 \\ &\iff DN + ND = P^{-1}0_E P \iff DN + ND = 0_3 \iff N \in E_D \end{aligned}$$

b) Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff N \in E_D \iff \exists (c, e, g) \in \mathbb{R}^3; P^{-1}MP = a \cdot E_{1,3} + e \cdot E_{2,2} + g \cdot E_{3,1} \\ &\iff \exists (c, e, g) \in \mathbb{R}^3; M = c \cdot PE_{1,3}P^{-1} + e \cdot PE_{2,2}P^{-1} + g \cdot PE_{3,1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc $E_A = \text{Vect}(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1})$. Cette famille génératrice de E_A est aussi libre, puisque :

$$\begin{aligned} c \cdot PE_{1,3}P^{-1} + e \cdot PE_{2,2}P^{-1} + g \cdot PE_{3,1}P^{-1} = 0_E &\iff P \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0_E \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_E \\ &\iff c = e = g = 0, \end{aligned}$$

donc $(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1})$ est une base de E_A .

8. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$(A + M)^2 = A^2 + M^2 \iff A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2 \iff AM + MA = 0_3,$$

donc l'ensemble des solutions de cette équation matricielle est l'ensemble E_A .

9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(M) = AM + MA$.

Remarque : l'énoncé ne demandait pas de prouver que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

L'ensemble E_A est alors l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\varphi(M) = 0_3$, c'est donc $\text{Ker}(\varphi)$. Le théorème du rang donne donc :

$$\text{rg}(\varphi) = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \dim E_A = 9 - 3 = 6.$$

EXERCICE 2

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$; d'après les croissances comparées : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$, ce qui prouve que $t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, puisque d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

Le critère de négligeabilité des intégrales de fonctions continues, positives, assure que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

La continuité de la fonction assure alors que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^1 t^n e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

$$\text{b) } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-e^{-t} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + 1 = 1.$$

L'intégrale convergente $I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ correspond à l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, donc on peut directement conclure que :

$$I_1 = \mathbf{E}(X) = 1.$$

2. Soit x un réel positif. Pour tout $t \in [0; +\infty[$: $1 + xt \geq 1$, donc $0 < \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq e^{-t}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1 + xt}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues et positives sur $[0; +\infty[$, et $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge : par comparaison d'intégrales de fonctions continues, positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt$ est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt.$$

3. L'intégrale $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + 0} dt$ est égale à $I_0 = 1$.

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$.

Pour tout réel $t \in [0; +\infty[$: $xt \leq yt \implies 1 \leq 1 + xt \leq 1 + yt \implies \frac{e^{-t}}{1 + yt} \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt}$ puisque $e^{-t} > 0$.

Les fonctions comparées sont continues sur $[0; +\infty[$, et leurs intégrales de 0 à $+\infty$ convergent, donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + yt} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt \iff F(y) \leq F(x).$$

La fonction F est donc décroissante sur \mathbb{R}^+ .

5. a) Soit x un réel positif.

Si $x = 0$, alors $\int_0^1 \frac{1}{1 + xt} dt = \int_0^1 1 dt = 1$.

Si $x > 0$, alors $\int_0^1 \frac{1}{1 + xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{x}{1 + xt} dt = \frac{1}{x} \left[\ln(1 + xt) \right]_0^1 = \frac{\ln(1 + x)}{x}$.

b) Soit x un réel positif; $\forall t \in [0; +\infty[$, $0 < e^{-t} \leq 1$ et $1 + xt \geq 1$, donc $0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq \frac{1}{1 + xt}$.

Les fonctions comparées sont continues et positives sur $[0; 1]$ et $0 < 1$, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + xt} dt.$$

c) Soit x un réel strictement positif; $\forall t \in [1; +\infty[$, $1 + xt \geq 1 + x > x > 0$, donc $0 \leq \frac{e^{-t}}{1 + xt} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$.

Les fonctions comparées sont continues et positives sur $[1; +\infty[$ et les intégrales convergent, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt.$$

d) Des questions précédentes, on déduit que pour tout $x > 0$:

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt} dt \leq \frac{\ln(1 + x)}{x} + \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 0$ par croissances comparées, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ puisque l'intégrale ne dépend pas de x .

Le théorème d'encadrement permet donc de conclure : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}$.

6. Soit x un réel positif. L'énoncé admet ici que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + xt} dt$ est convergente.

On le montrerait comme à la question 2. et à l'aide de 1.a).

a) La linéarité de l'intégrale convergente s'applique ici, qui donne :

$$\begin{aligned} F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - xt) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{1 + xt} - (1 - xt)e^{-t} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (1 - xt)(1 + xt)}{1 + xt} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - (1^2 - x^2 t^2)}{1 + xt} e^{-t} dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + xt} dt. \end{aligned}$$

b) Or, pour tout réel positif x :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + x \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = F(x) - I_0 + x I_1,$$

et par ailleurs : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $1 + xt \geq 1 \implies 0 \leq \frac{t^2 e^{-t}}{1 + xt} \leq t^2 e^{-t}$
 puisque $t^2 e^{-t} \geq 0$.

Les fonctions comparées sont positives et continues sur $[0; +\infty[$, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + xt} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \implies 0 \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + xt} dt \leq x^2 I_2 \implies 0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2.$$

7. a) Du résultat précédent, on déduit que pour tout $x > 0$, et puisque $I_0 = I_1 = 1$:

$$0 \leq \frac{F(x) - 1 + x}{x} \leq x I_2 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 1 + x}{x} = 0$$

par encadrement, c'est-à-dire :

$$F(x) - 1 + x \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x) \iff F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x),$$

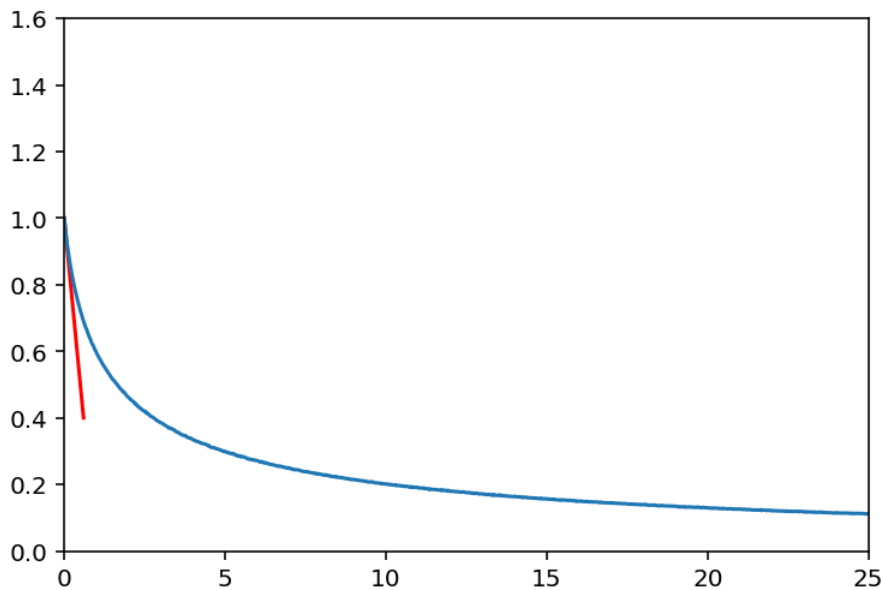
expression qui prend bien la forme d'un développement limité à l'ordre 1 de F au voisinage de 0.

b) Le simple fait que f admette un développement limité à l'ordre 1, garantit que F est dérivable en 0, et que $F'(0)$ est le coefficient de degré 1 dans celui-ci, soit : $F'(0) = -1$.

8. L'énoncé admet ici que F est continue sur $[0; +\infty[$.

Le graphe ci-dessous reprend les propriétés démontrées de F : décroissance sur $[0; +\infty[$, limite égale à 0 en $+\infty$, tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = 1 - x$.

On tiendra bien compte ici du fait que les deux axes n'ont pas la même échelle.



EXERCICE 3

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Soit n un entier naturel non nul.

La population active d'un territoire est divisée en n catégories socioprofessionnelles, numérotées de 1 à n . Pour tout entier i compris entre 1 et n , on note X_i la variable aléatoire égale au revenu mensuel, en milliers d'euros, d'un individu choisi au hasard avec équiprobabilité au sein de la catégorie socioprofessionnelle numéro i . On suppose que la variable aléatoire X_i admet pour densité la fonction f_i définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_i(x) = \begin{cases} \frac{i}{x^{i+1}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

On note F_i la fonction de répartition de X_i .

Partie I.

1. Soit i un entier compris entre 1 et n .

Pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f_i(x) = 0 \geq 0$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f_i(x) = \frac{i}{x^{i+1}} \geq 0$, donc f_i est positive sur \mathbb{R} .

La fonction f_i est continue et positive sur $] -\infty; 1[$ comme constante nulle ; elle est aussi continue sur $]1; +\infty[$ comme fonction inverse de référence continue sur cet intervalle, donc f_i est continue sur \mathbb{R} , sauf peut-être en 1, ce qui représente un nombre fini de points.

Enfin, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{i}{x^{i+1}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x^i} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{A^i} + 1 = 1$$

car $i \geq 1 > 0$, ce qui achève de démontrer que f_i est une densité de probabilité.

2. a) Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

La variable aléatoire X_i admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x) dx$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto x f_i(x)$ est nulle sur $] -\infty; 1[$ et positive sur $[1; +\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple que $\int_1^{+\infty} x \cdot \frac{i}{x^{i+1}} dx = i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i} dx$.

On reconnaît une intégrale de Riemann, qui converge si et seulement si $i > 1$. Les variables aléatoires X_i qui admettent une espérance sont donc d'indices $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$, celle-ci vaut alors :

$$\mathbf{E}(X_i) = i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} i \left[-\frac{1}{(i-1)x^{i-1}} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{i}{(i-1)A^{i-1}} + \frac{i}{i-1} = \boxed{\frac{i}{i-1}}.$$

b) Soient i et j deux éléments de $\llbracket 2; n \rrbracket$ tels que $i < j$:

en remarquant que $\mathbf{E}(X_i) = \frac{i}{i-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{i}}$, la stricte décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+^* donne :

$$2 \leq i < j \leq n \implies \frac{1}{2} \geq \frac{1}{i} > \frac{1}{j} \geq \frac{1}{n} \implies \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{i} < 1 - \frac{1}{j} \implies \frac{1}{1-\frac{1}{i}} > \frac{1}{1-\frac{1}{j}}, \text{ soit : } \mathbf{E}(X_i) > \mathbf{E}(X_j).$$

Les espérances des $(X_i)_{2 \leq i \leq n}$ sont donc rangées dans l'ordre décroissant des indices :

$$\mathbf{E}(X_2) > \mathbf{E}(X_3) > \dots > \mathbf{E}(X_n).$$

3. Soit i un entier de $\llbracket 1; n \rrbracket$. La fonction de répartition F_i de X_i est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_i(x) = \int_{-\infty}^x f_i(t) dt.$$

Comme f_i est nulle sur $] -\infty; 1[$, alors pour tout $x < 1$, $F_i(x) = 0$ puisqu'on n'intègre que la fonction nulle.

Pour tout $x \geq 1$: $F_i(x) = \int_1^x \frac{i}{t^{i+1}} dt = \left[-\frac{1}{t^i} \right]_1^x = -\frac{1}{x^i} + 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

4. Soit U une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur $]0; 1[$.

Soit i un entier compris entre 1 et n . On pose $V_i = \frac{1}{U^{1/i}}$.

a) Puisque $U(\Omega) =]0; 1[$ et $1/i > 0$, alors $U^{1/i}(\Omega) =]0; 1[\implies \frac{1}{U^{1/i}}(\Omega) = V_i(\Omega) =]1; +\infty[$.

On peut donc déjà dire que $F_{V_i}(x) = \mathbf{P}(V_i \leq x) = 0$ pour tout $x < 1$.

Pour tout $x \geq 1$: $\mathbf{P}(V_i \leq x) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{x} \leq U^{1/i}\right)$ car $x > 0$ et U est presque sûrement à valeurs strictement positives.

La fonction puissance $t \mapsto t^i$ étant continue, strictement croissante, bijective de $]0; 1[$ dans $]0; 1[$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{x} \leq U^{1/i}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{x^i} \leq U\right) = 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right)$$

car U est à densité. Et puisque $x \geq 1$, alors $0 < \frac{1}{x^i} \leq 1 \iff 0 \leq 1 - \frac{1}{x^i} < 1$, donc $F_U\left(\frac{1}{x^i}\right) = \frac{1}{x^i}$

et $F_{V_i}(x) = 1 - \frac{1}{x^i}$.

On a donc prouvé que X_i et V_i ont la même fonction de répartition : ces deux variables aléatoires suivent donc la même loi.

b) D'après ce qui précède, on simule X_i en simulant $V_i = U^{-1/i}$ où U suit la loi uniforme à densité sur $]0; 1[$, d'où le script :

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simulX(i):
4     U = rd.random()
5     return U**(-1/i)
```

Partie II.

Soit p un réel de $]0; 1[$. On choisit un individu au hasard dans la population et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie socioprofessionnelle à laquelle cet individu appartient. On suppose que la variable aléatoire $Y - 1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n - 1, p)$.

5. On reprend ici la simulation habituelle de la loi binomiale de paramètres $(n - 1, p)$ en simulant $(n - 1)$ épreuves de Bernoulli de paramètre p et en comptant le nombre de succès.

```
1 def simulY(n, p):
2     S = 0
3     for k in range(1, n): # k varie de 1 à n-1
4         if rd.random() < p : # cet événement survient avec la probabilité p
5             S = S+1
6     return 1+S # S contient une simulation de Y-1
```

6. La fonction, ci-dessous, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p , renvoie une liste (p_1, \dots, p_n) où pour i compris entre 1 et n , p_i est une valeur approchée de $\mathbf{P}(Y = i)$.

```
1 def loiY(n, p):
2     N = 10000
3     loi = [0] * n # crée une liste de n zéros
4     for k in range(n): # les éléments de la liste sont numérotés de 0 à n-1
5         y = simulY(n, p)
6         loi[y-1] = loi[y-1]+1/N # la valeur y a une occurrence de plus
7     return loi
```

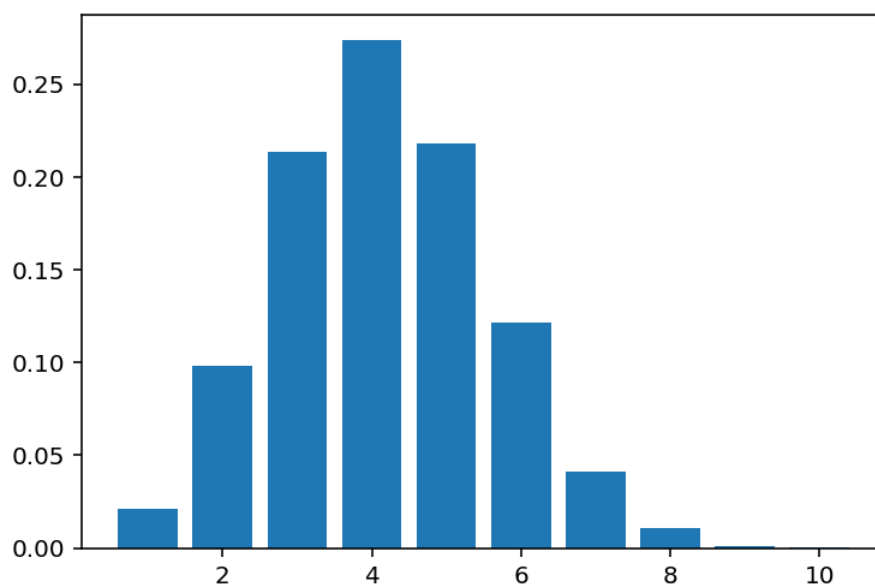
L'idée est que la liste `loi` contient les fréquences d'apparition de chacune des valeurs de 1 à n prises par la variable Y .

On prend garde au fait qu'en Python, les listes sont numérotées à partir du rang 0 : `loi[0]` contiendra ainsi une valeur approchée de $p_1 = \mathbf{P}(Y = 1)$, etc..., jusqu'à `loi[n-1]` qui contient une valeur approchée de p_n .

7. La fonction suivante prend en arguments d'entrée les paramètres n et p , et permet d'afficher un diagramme en bâtons représentant approximativement la loi de Y , avec les valeurs de Y (les *modalités*) en abscisses, et les probabilités correspondantes en ordonnées.

```
1 def diagramme(n, p):
2     x = np.linspace(1,n,n)
3     y = loiY(n, p)
4     plt.bar(x,y)
5     plt.show()
```

Un exemple d'affichage avec $n = 10$ et $p = 0.35$:



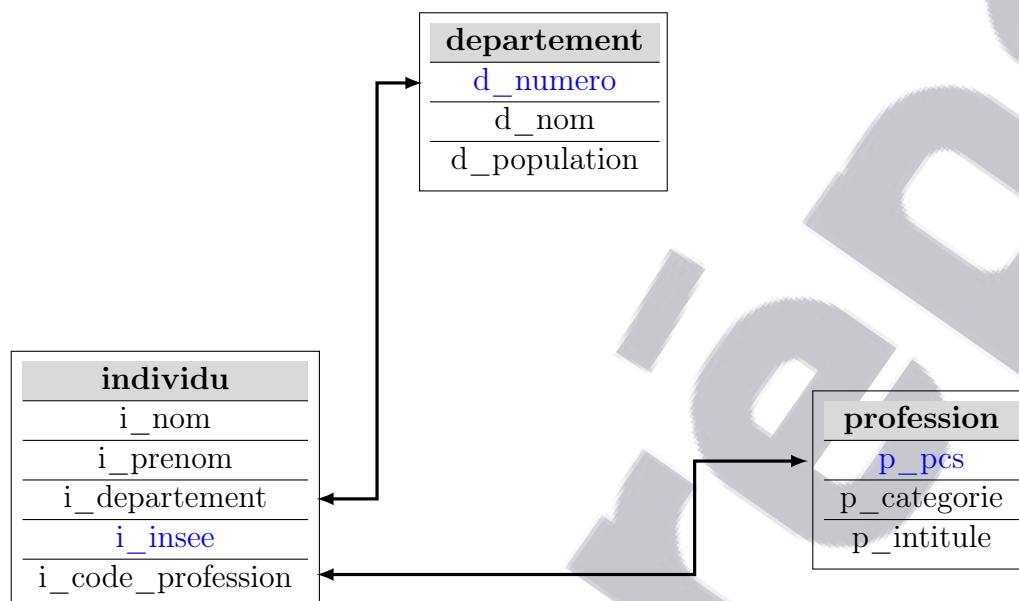
8. Questions de bases de données.

- La clé primaire d'une table dans une base de données, est un attribut ou un ensemble d'attributs qui caractérise un champ de la table de façon *unique*.
- Dans la table `individu`, c'est l'attribut `i_insee` qui peut tenir lieu de clé primaire, puisque chaque numéro de sécurité sociale est attribuée de façon unique à un individu.

Dans la table `departement`, c'est l'attribut `d_numero` qui peut tenir lieu de clé primaire.

Dans la table `profession`, c'est l'attribut `p_pcs` qui est le plus pertinent pour servir de clé primaire.

- c) Le schéma relationnel de la base de données décrite dans l'énoncé, est proposé ci-dessous. Les flèches symbolisent les relations qui existent entre les tables en pointant sur les attributs qui permettent d'établir ces relations. Les clés primaires sont en bleu.



- d) La requête SQL qui renvoie tous les codes PCS des professions exercées dans le département de l'Eure-et-Loir (numéro 28), chaque code n'apparaissant qu'une seule fois, est :
- ```
SELECT DISTINCT i_code_profession FROM individu WHERE i_departement = 28;
```
- e) La requête SQL permettant d'obtenir le code INSEE et le numéro de catégorie socioprofessionnelle de chaque individu est :
- ```
SELECT i_insee,p_categorie FROM individu,profession WHERE i_code_profession = p_pcs;
```

Partie III

Soit p un réel de $]0; 1[$.

Un institut réalise un sondage selon le protocole suivant :

- On choisit une catégorie socioprofessionnelle de manière aléatoire (mais sans équiprobabilités), et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie choisie. Comme dans la Partie II, on suppose que $Y - 1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n - 1, p)$.
- On sélectionne alors un individu au hasard (avec équiprobabilité) dans la catégorie socioprofessionnelle choisie à l'étape précédente, et on note Z_n la variable aléatoire égale à son revenu mensuel, en milliers d'euros.

On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n .

9. Quelle que soit sa catégorie socioprofessionnelle, aucun individu de l'échantillon sélectionné ne gagne, du fait que les fonctions de répartition F_i sont toutes nulles sur $] - \infty ; 1[$, moins de 1000 euros par mois (1 millier d'euros), donc : $\forall x < 1, G_n(x) = 0$.
10. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
- a) Soit i un entier compris entre 1 et n : si on sait que $[Y = i]$, alors l'individu sélectionné au hasard appartient à la catégorie socioprofessionnelle i , et dans ce cas c'est la fonction de répartition F_i qui régit son salaire en milliers d'euros, donc en effet :

$$\mathbf{P}_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = \mathbf{P}(X_i \leq x) = F_i(x).$$

- b) Puisque $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ (du fait que $Y - 1$, qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n - 1, p)$, a pour univers-image $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$), alors la famille $([Y = 1], [Y = 2], \dots, [Y = n])$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles, avec lequel la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \mathbf{P}(Z_n \leq x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(Y = i) \cdot \mathbf{P}_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(Y - 1 = i - 1) \cdot F_i(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \mathbf{P}(Y - 1 = k) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}
\end{aligned}$$

puisque $Y - 1 \leftrightarrow \mathcal{B}(n-1, p)$.

c) En poursuivant le calcul précédent, et du fait que $F_{k+1}(x) = 1 - \frac{1}{x^{k+1}}$ puisque $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{x}\right)^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= (p + 1 - p)^{n-1} - \frac{1}{x} \left(\frac{p}{x} + 1 - p\right)^{n-1} = 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton, utilisée ici deux fois.

11. La fonction de répartition $G_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^1 donc

continue sur $] -\infty ; 1[$ comme fonction constante sur cet intervalle, et est de même de classe \mathcal{C}^1 donc continue sur $]1 ; +\infty[$ comme différence et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant jamais sur cet intervalle.

Ainsi G_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en $x = 1$, ce qui représente un nombre fini de points.

Il reste à constater que : $G_n(1) = 1 - \frac{(p + 1 - p)^{n-1}}{1} = 1 - 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} G_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} G_n(x)$, pour constater que G_n est aussi continue en 0, donc continue sur \mathbb{R} tout entier : la variable aléatoire Z_n est donc bien à densité.

12. Les fonctions `simulY` et `simulX` déjà programmées précédemment, permettent alors de simuler aisément ce sondage en deux étapes :

```

1 def sondage(n, p):
2     i = simulY(n, p)
3     X = simulX(i)
4     return X

```

13. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = \frac{1}{n}$.

a) Il suffit ici de remplacer p par $\frac{1}{n}$ dans l'expression de $G_n(x)$ précédemment obtenue, pour trouver en effet :

$$\forall x < 1, G_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 1, G_n(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n} = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{\frac{1}{n} + x - \frac{x}{n}}{x}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}.$$

b) On étudie dans cette dernière question, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$ pour tout réel x .

- Il est clair que pour tout $x < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Soit $x \geq 1$: $G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} e^{(n-1) \ln \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)}$ en revenant à la forme exponentielle des puissances, où :

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{x-1}{nx} = 0$, alors d'après l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$,

$$\ln \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x-1}{nx} \implies (n-1) \ln \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{x-1}{nx}\right) = \frac{1-x}{x}$$

par compatibilité de l'équivalence avec le produit.

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) \ln \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) = \frac{1-x}{x}$, donc par continuité de l'exponentielle sur \mathbb{R} ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n-1) \ln \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)} = e^{\frac{1-x}{x}} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}-1}.$$

Considérons alors la fonction $G : x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}-1} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$.

Cette fonction est continue sur $] -\infty ; 1[$ comme fonction constante nulle sur cet intervalle, et sur $]0 ; +\infty[$ comme composée, produit et différence de fonctions de référence continues, bien définie sur cet intervalle.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} G(x) = 1 - 1 \cdot e^{1-1} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0 = G(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} G(x)$, alors G est continue sur \mathbb{R} .

On a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}-1} = 1 - 0 \cdot e^{0-1} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$ par opérations sur les limites, et pour tous réels x, y supérieurs ou égaux à 1 tels que $1 \leq x \leq y$: par décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+ ,

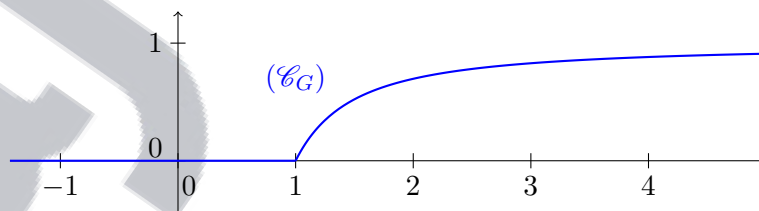
$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \implies \frac{1}{x} - 1 \geq \frac{1}{y} - 1 \implies e^{\frac{1}{x}-1} \geq e^{\frac{1}{y}-1}$$

par croissance de \exp sur \mathbb{R} . Par produit d'inégalités de même sens entre réels positifs,

on a alors $\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}-1} \geq \frac{1}{y} e^{\frac{1}{y}-1} \iff 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}-1} \leq 1 - \frac{1}{y} e^{\frac{1}{y}-1}$, ce qui assure que $G(x) \leq G(y)$.

La fonction G est donc croissante sur $[1 ; +\infty[$; comme elle est continue sur \mathbb{R} et constante nulle sur $] -\infty ; 1[$, toutes ces vérifications montrent que G est une fonction de répartition continue sur \mathbb{R} .

Le fait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = G(x)$, assure alors que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont la fonction de répartition est la fonction G , qu'on a représentée graphiquement ci-dessous.



★★★ FIN DU SUJET ★★★