

## EXERCICE 1

1. a) La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant  $\alpha = 2 > 1$  : elle est donc convergente d'après le cours.

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$  est, d'après la question précédente, le terme général d'une série convergente.

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$  est donc absolument convergente, donc convergente.

c) Les règles sur les équivalents donnent :  $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$ . Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2}$  converge puisque c'est à un facteur constant près, la série de Riemann de la question a).

Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, assure que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$  est elle-même convergente.

On note :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ; en, travaillant sur les sommes partielles des séries précédentes :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 - (-1)^n = \begin{cases} 1 - (-1) = 2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$ ,

$$\text{donc } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \text{ est impair}}} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ , on obtient (toutes les séries convergent d'après 1.) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \boxed{A - B = 2C}.$$

*Remarque : les séries étant toutes convergentes, il est aussi licite de travailler directement à partir des sommes totales des séries.*

Selon le même principe, en séparant la somme partielle  $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2}$  selon la parité de l'indice  $n$  :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N+1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N+1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Les séries sont toutes convergentes, donc on peut faire tendre  $N$  vers  $+\infty$  pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \boxed{A = \frac{1}{4}A + C}.$$

3. a) Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ; d'après les formules de trigonométrie :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{cases} \implies \boxed{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)}.$$

b) Montrons alors par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall t \in [0; \pi[, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)},$$

est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**I.** Pour  $n = 1$  : d'une part, pour tout  $t \in [0; \pi[$ ,  $\sum_{k=1}^1 (-1)^k \cos(kt) = -\cos(t)$ ,

et d'autre part :

$$-\frac{1}{2} + (-1)^1 \cdot \frac{\cos\left(\frac{2+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(t + \frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(t + \frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{2\cos(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\cos(t).$$

On aura reconnu en effet [à cette étape](#), la formule de a) avec  $\alpha = t$  et  $\beta = \frac{t}{2}$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et la propriété est initialisée.

**H.** Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , et montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est encore vraie,

$$\text{soit : } \forall t \in [0; \pi[, \quad \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Soit  $t \in [0; \pi[$ . D'après la relation de Chasles pour les sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) + (-1)^{n+1} \cos((n+1)t) \\ &\stackrel{H.R.}{=} -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} + (-1)^{n+1} \cos(nt+t) \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt+t)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &\stackrel{3.a)}{=} -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(nt + \frac{t}{2}\right) - \left[\cos\left(nt + t + \frac{t}{2}\right) + \cos\left(nt + t - \frac{t}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{-\cos\left(nt + \frac{3t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}, \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie si  $\mathcal{P}(n)$  l'est.

**C.** La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'après le principe de récurrence.

4. On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$ .

a) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  donc continue sur le segment  $[a; b]$  : le théorème associé (souvent appelé *des bornes atteintes*) assure que  $f$  atteint un minimum et un maximum sur  $[a; b]$ , donc est bornée, ce qui peut se traduire par le fait qu'il existe un réel positif  $K_1$  tel que :

$$\forall t \in [a; b], \quad |f(t)| \leq K_1.$$

Concrètement, on peut prendre  $K_1 = \max \left( \left| \max_{[a; b]} f \right|, \left| \min_{[a; b]} f \right| \right)$  mais citer le théorème suffit.

De même, le fait que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$  implique que  $f'$  est continue sur  $[a; b]$ , donc aussi bornée selon le même théorème, d'où l'existence d'un réel positif  $K_2$  tel que :

$$\forall t \in [a; b], \quad |f'(t)| \leq K_2.$$

Il suffit alors de prendre  $M = \max(K_1, K_2)$ , qui est bien un réel positif et qui vérifie :

$$\forall t \in [a; b], \quad |f(t)| \leq M \quad \text{et} \quad |f'(t)| \leq M.$$

Attention : il fallait bien ici, que  $M$  majore à la fois  $|f|$  et  $|f'|$  sur  $[a; b]$  !

b) Soit  $\lambda > 0$ . La fonction  $t \mapsto f'(t) \sin(\lambda t)$  est continue sur  $[a; b]$  comme produit de fonctions qui le sont et  $a < b$ , donc d'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| \cdot |\sin(\lambda t)| dt.$$

Or pour tout  $t \in [a; b]$  :  $|f'(t)| \leq M$  et  $|\sin(\lambda t)| \leq 1$ , donc  $|f'(t)| \cdot |\sin(\lambda t)| \leq M$ , et donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b |f'(t)| \cdot |\sin(\lambda t)| dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a) \xrightarrow{\lambda \geq 0} 0 \leq \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} M(b-a).$$

Puisque  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} M(b-a) = 0$ , alors d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| = 0 \iff \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

c) Soit  $\lambda > 0$ . Dans l'intégrale  $\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt$ , on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(t) = f(t) &\longrightarrow u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \cos(\lambda t) &\longrightarrow v(t) = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$ , donc par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \left[ f(t) \cdot \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t) \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{f(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} - \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt.$$

On a déjà vu à la question précédente, que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$ .

Par ailleurs :  $0 \leq \left| \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} \right| = \frac{|f(a)| \cdot |\cos(\lambda a)|}{\lambda} \leq \frac{M}{\lambda}$  puisque  $|\cos(\lambda a)| \leq 1$  et  $\lambda > 0$ .

Le théorème d'encadrement donne alors  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left| \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} \right| = 0 \iff \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(a) \cos(\lambda a)}{\lambda} = 0$ ,

et on obtient de même  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(b) \cos(\lambda b)}{\lambda} = 0$ .

Ainsi par somme de limites, l'intégration par parties montre bien que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0.$$

Ce résultat très classique est généralement connu sous le nom de **lemme de Lebesgue**.

5. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0; \pi]$  par :

$$\forall t \in ]0; \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

a) Sur l'intervalle  $]0; \pi]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{t}{2}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , à valeurs dans  $]0; \frac{\pi}{2}]$  sur lequel la fonction sinus est de classe  $\mathcal{C}^1$  et ne s'annule jamais ( $0 < t \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 < \sin(t) \leq 1$ ).

La fonction  $\varphi$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; \pi]$  comme quotient de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur cet intervalle où le dénominateur ne s'annule jamais, et :

$$\forall t \in ]0; \pi], \quad \varphi'(t) = \frac{1 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) - t \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}.$$

b) Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0$ , alors on peut utiliser l'équivalent classique :  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  pour écrire :

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2} \implies 2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \text{soit } \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2$$

par compatibilité de l'équivalence avec le quotient. Ce résultat implique que  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 2$ , donc que  $\varphi$  se prolonge par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = 2$ .

L'énoncé note encore  $\varphi$  la fonction ainsi prolongée.

c) On utilise ici le *théorème de prolongement*  $\mathcal{C}^1$  :  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; \pi]$ , prolongeable par continuité en 0.

On étudie alors  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t)$ , en faisant intervenir les développements limités de sin et de cos en 0 à l'ordre 2 :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

donc puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0$ , alors :

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \left(1 - \frac{t^2}{8}\right) + o(t^2) = o(t^2).$$

Or au dénominateur :  $\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{t}{2}\right)^2 \sim \frac{t^2}{4}$ , donc :  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{t^2/4} = 0$  par définition d'un "petit o".

Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = 0$  existe et est finie, le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$  s'applique donc, qui assure que :

$\varphi$  prolongée par continuité en b), est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$ , et vérifie  $\varphi'(0) = 0$ .

d) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; \pi[$  par :

$$\forall t \in [0; \pi[, \quad f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

L'énoncé admettait que :  $\forall t \in [0; \pi[, \quad f(t) = \varphi(\pi - t)$ .

La fonction affine  $t \mapsto \pi - t$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi[$ , à valeurs dans  $]0; \pi]$  sur lequel  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Le fait de pouvoir prolonger  $\varphi$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$  garantit bien que  $f$  se prolonge elle-même (par continuité en  $\pi$  d'abord), en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$ .

6. a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Dans l'intégrale  $\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt$ , on pose :

$$u(t) = \pi - t \quad \longrightarrow \quad u'(t) = -1$$

$$v'(t) = \cos(kt) \quad \longrightarrow \quad v(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$ , donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt &= \left[ (\pi - t) \frac{1}{k} \sin(kt) \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kt) dt \\ &= \underbrace{(\pi - \pi) \frac{1}{k} \sin(k\pi) - \frac{\pi}{k} \sin(0)}_{=0} + \frac{1}{k} \left[ -\frac{1}{k} \cos(kt) \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{k^2} \cos(k\pi) + \frac{1}{k^2} \cos(0) = \begin{cases} -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = 0 & \text{si } k \text{ est pair car alors } \cos(k\pi) = 1 \\ \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair car alors } \cos(k\pi) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Soit alors  $N$  un entier naturel non nul : par linéarité de l'intégrale et de la somme,

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt \stackrel{6.a)}{=} \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2N+1 \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \frac{2}{k^2} = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}$$

car  $k \in \llbracket 1; 2N+1 \rrbracket$  est impair si et seulement s'il est de la forme  $k = 2n + 1$  avec  $n \in \llbracket 0; N \rrbracket$ .

7. a) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  : d'après les résultats précédents, et en remarquant qu'on peut écrire, pour tout  $t \in [0; \pi]$ ,  $(\pi - t) = f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt) dt = -\frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cos(kt) dt \\ &\stackrel{3.b)}{=} -\frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \left( -\frac{1}{2} + (-1)^{2N+1+1} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right) dt \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{4N+3}{2}t\right) dt$$

Or  $\int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^\pi (\pi - t) dt \stackrel{[u=\pi-t]}{=} \int_\pi^0 u(-du) = \int_0^\pi u du = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$  et d'après 4.,

puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \pi]$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{4N+3}{2} = +\infty$ , on a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{4N+3}{2}t\right) dt = 0$ , donc lorsqu'on passe à la limite quand  $N$  tend vers  $+\infty$  dans la dernière égalité ci-dessus, on obtient bien :

$$C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b) Il suffit alors de réutiliser les relations obtenues à la question 2 pour obtenir :

$$A = C + \frac{1}{4}A \iff \frac{3}{4}A = \frac{\pi^2}{8} \iff A = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad A - B = 2C \iff B = A - 2C = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

## EXERCICE 2

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Partie I

1. a) La famille  $(I_3, M, M^2, \dots, M^9)$  compte 10 matrices de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui est de dimension 9 : le fait que  $10 > 9$  suffit alors, d'après le cours, pour conclure que cette famille est nécessairement liée.
- b) Le fait que la famille précédente soit liée, implique par définition l'existence d'un 10-uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_9) \in \mathbb{R}^{10}$  non nul (c'est-à-dire dans lequel au moins un des coefficients  $a_i$  est non nul) tel que :

$$a_0 I_3 + a_1 M + a_2 M^2 + \dots + a_9 M^9 = 0_3.$$

Mais cette relation signifie que  $P(M) = 0_3$ , où  $P(x) = \sum_{i=0}^9 a_i x^i$ , donc que  $P$  est un polynôme annulateur de  $M$ , non nul puisque ses coefficients sont les  $(a_i)_{0 \leq i \leq 9}$  dont l'un au moins est non nul, et de degré inférieur ou égal à 9.

2. L'énoncé admettait que  $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 - 12x - 48$  est un polynôme annulateur de  $M$ .
  - a) Attention à ne pas se contenter d'un simple test d'égalité entre deux matrices pour vérifier que  $\varphi$  est bien un polynôme annulateur de  $M$ , c'est-à-dire que  $M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3 = 0_3$  (comme le faisait la première version de ce corrigé : merci au candidat qui l'a signalé à Major-Prépa) : en effet, un test d'égalité entre matrices, du type `M3-4*M2-12*M-28*np.eye(3) == np.zeros((3,3))` va en fait rendre une *matrice de booléens*, correspondant chacun au test d'égalité entre chaque coefficient de  $\varphi(M)$ , et la matrice nulle !

On utilise donc plutôt un argument de type "algèbre bilinéaire" : une matrice est nulle si et seulement si la somme des valeurs absolues de ses coefficients est nulle (car une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul).

On peut aussi tester le fait que la somme des carrés des coefficients de  $\varphi(M)$  est nulle (on revient dans ce cas au caractère défini de la norme), ou le fait que le maximum des valeurs absolues des coefficients est nul.

```
1 import numpy as np
2
3 def PolyAnn(M):
4     M2 = np.dot(M,M) # calcul de M au carré
5     M3 = np.dot(M2,M) # calcul de M au cube
6     if np.sum(np.abs(M3-4*M2-12*M-28*np.eye(3))) == 0:
7         return True
8     else:
9         return False
```

Remarque : les lignes 6 à 9 peuvent être remplacées par la seule commande :

```
return np.sum(np.abs(M3-4*M2-12*M-28*np.eye(3))) == 0
```

car le résultat d'un test entre deux réels est toujours un booléen (et la première rédaction du test signifie en substance : *si le test est vrai, renvoyer vrai sinon renvoyer faux... autant renvoyer directement le booléen résultat du test!*)

On pouvait donc aussi écrire :

```
return np.sum((M3-4*M2-12*M-28*np.eye(3))*2) == 0
```

ou encore :

```
return np.max(np.abs(M3-4*M2-12*M-28*np.eye(3))) == 0
```

b) La relation :  $M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3 = 0_3$  s'écrit aussi :

$$M^3 - 4M^2 - 12M = 28I_3 \iff \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3)M = I_3,$$

ce qui prouve que  $M$  est inversible, d'inverse  $M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_3)$ .

3. a) On redémontre ici dans un cas particulier, l'implication du cours concernant les polynômes annulateurs.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ , et  $V \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{3,1}\}$  un vecteur propre associé.

Alors :  $MV = \lambda V$ , donc  $M^2V = M(\lambda V) = \lambda MV = \lambda^2 V$  et  $M^3V = M(\lambda^2 V) = \lambda^2 MV = \lambda^3 V$ , donc :

$$\begin{aligned} (M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3)V = 0_{3,1} &\iff M^3V - 4M^2V - 12MV - 28V = 0_{3,1} \\ &\iff (\lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda - 28)V = 0_{3,1} \iff \lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda - 28 = 0 \text{ car } V \neq 0_{3,1}, \end{aligned}$$

donc on a bien montré :  $\lambda$  est valeur propre de  $M \implies \varphi(\lambda) = 0$ .

b) La fonction  $\varphi$  est polynômiale donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12.$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant  $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 64 + 144 = 208 > 0$ , donc il admet deux racines distinctes, et puisque  $208 = 2 \times 104 = 4 \times 52 = 16 \times 13$  :

$$r_1 = \frac{8 - \sqrt{208}}{6} = \frac{8 - 4\sqrt{13}}{6} = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3} \text{ et } r_2 = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}.$$

Le tableau de variation de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  est donc le suivant :

$x$	$-\infty$	$r_1$	$r_2$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-	+
$\varphi$				$+\infty$
	$-\infty$	$\varphi(r_1)$	$\varphi(r_2)$	

Un polynôme étant équivalent à son terme de plus haut degré aux voisinages de  $-\infty$  et  $+\infty$  :

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^3, \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

L'énoncé admettant que  $\varphi(r_1) > 0$ , alors d'après les variations de  $\varphi$ ,  $\varphi(x) < 0$  pour tout  $x \in ]-\infty; r_2[$  donc  $\varphi$  n'admet aucune racine sur cet intervalle.

Sur  $[r_2; +\infty[$ ,  $\varphi$  est continue, strictement croissante : d'après le théorème éponyme, elle réalise donc une bijection de  $[r_2; +\infty[$  dans  $[\varphi(r_2); +\infty[$  qui contient 0 puisque  $\varphi(r_2) < \varphi(r_1) < 0$ .

L'équation  $\varphi(x) = 0$  admet donc une unique solution  $\lambda_0$  sur  $[r_2; +\infty[$ , donc sur  $\mathbb{R}$ .

Le fait que  $r_2 < \frac{4 + 2\sqrt{16}}{3} = \frac{12}{3} = 4$  et que  $\varphi(4) = 4^3 - 4^3 - 12 \times 4 - 28 = -48 - 28 < 0 = \varphi(\lambda_0)$  assure alors que  $r_2 < 4 < \lambda_0$  par comparaison des images sur un intervalle où la fonction est strictement croissante.

L'implication obtenue en a) se traduit alors par l'inclusion :  $\text{Sp}(M) \subset \{\lambda_0\}$ , qui signifie bien que  $M$  admet au plus une valeur propre réelle, et que celle-ci est strictement supérieure à 4.

- c) On effectue ici un raisonnement par l'absurde classique : si  $M$  était diagonalisable, alors elle admettrait au moins une valeur propre, et comme il ne peut s'agir que de  $\lambda_0$ , alors  $M$  serait semblable à la matrice diagonale  $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 \cdot I_3$  : il existerait  $P$  inversible telle que :

$$M = P(\lambda \cdot I_3)P^{-1} \iff M = \lambda_0 P I_3 P^{-1} \iff M = \lambda_0 I_3.$$

La matrice  $M$  ne serait donc pas seulement semblable à  $\lambda_0 \cdot I_3$  : elle lui serait *égale*, ce qui n'est évidemment pas le cas !

On a donc montré, par l'absurde, que  $M$  n'est *pas* diagonalisable.

## Partie 2

On pose  $S = {}^t M M$ .

4. D'après les propriétés de la transposée d'un produit ( $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ ,  ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$  :

$${}^t S = {}^t({}^t M M) = {}^t M {}^t({}^t M) = {}^t M M = S,$$

donc  $S$  est bien une matrice symétrique.

*Remarque : on pouvait aussi tout simplement calculer  $S = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 18 \\ 4 & 13 & 14 \\ 18 & 14 & 24 \end{pmatrix}$  et constater qu'elle est effectivement symétrique, mais c'est finalement plus long... !*

5. Notons d'emblée que d'après le théorème spectral matriciel, la matrice  $S$  est diagonalisable, donc possède au moins une valeur propre.

Soit alors  $\lambda$  une valeur propre de  $S$ , et  $X$  un vecteur propre associé : on a donc

$$S X = \lambda X \iff {}^t M M X = \lambda X \implies {}^t X {}^t M M X = \lambda {}^t X X \implies \|M X\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

en utilisant la norme  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , défini par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))^2, \quad \langle X, Y \rangle = {}^t X Y \quad \text{et donc} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle = {}^t X X.$$

Puisque  $X$  est un vecteur propre, alors il est non nul et  $\|X\|^2 > 0$ , mais puisque  $M$  est inversible,

$$\text{on a aussi } M X \neq 0_{3,1} \implies \|M X\|^2 > 0 \implies \lambda = \frac{\|M X\|^2}{\|X\|^2} > 0.$$

Toute valeur propre de  $S$  est bien strictement positive.

6. Le théorème spectral matriciel assure que  $S$ , matrice symétrique réelle, est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : il existe  $P$  orthogonale et  $D$  diagonale telles que  $S = P D {}^t P$ .

L'énoncé admettait à cet instant que  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$ .

7. a) Toute matrice diagonale  $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  a pour carré  $\Delta^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ , donc par identification des coefficients :

$$\Delta^2 = D \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = 49 \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \{-1; 1\} \\ b \in \{-4; 4\} \\ c \in \{-7; 7\} \end{cases}$$

L'ensemble des triplets  $(a, b, c)$  solution est donc  $\{-1; 1\} \times \{-4; 4\} \times \{-7; 7\}$  : il y a donc  $2^3 = 8$  matrices diagonales  $\Delta$  telles que  $\Delta^2 = D$ .

L'énoncé note, dans la suite,  $\Delta$  une telle matrice diagonale.

b) Quelle que soit la matrice  $\Delta$  parmi les 8 possibilités, il s'agit d'une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont *tous* différents de zéro : on sait donc que  $\Delta$  est inversible.

8. Grâce à ce qui précède, on peut introduire la matrice  $R = P\Delta {}^tP$  : c'est une matrice carrée d'ordre 3, qui vérifie :

$${}^tR = {}^t({}^tP) {}^t\Delta {}^tP = P\Delta {}^tP$$

car  $D$ , diagonale, est symétrique donc égale à sa transposée :  $R$  est elle-même symétrique, et elle vérifie de plus :

$$R^2 = P\Delta \underbrace{{}^tP P}_{=I_3} \Delta {}^tP = P\Delta^2 {}^tP = PD {}^tP = S.$$

9. La matrice  $R = P\Delta {}^tP$  est alors inversible comme produit de trois matrices qui le sont ( ${}^tP$  étant ici égale à  $P^{-1}$  puisque  $P$  est orthogonale) ; la formule pour l'inverse d'un produit donne :

$$R^{-1} = ({}^tP)^{-1} \Delta^{-1} P^{-1} = P\Delta^{-1} {}^tP.$$

10. On note  $U = MR^{-1}$  : c'est une matrice carrée d'ordre 3 qui vérifie

$${}^tUU = {}^t(MR^{-1})MR^{-1} = {}^t(R^{-1}) {}^tMMR^{-1} = ({}^tR)^{-1} S R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} = I_3$$

car  $R$  est symétrique, et  $S = R^2$ . La matrice  $U$  est donc bien orthogonale.

### Partie 3

L'énoncé admet qu'il existe une matrice  $\Delta$  diagonale vérifiant  $\Delta^2 = D$  : d'après ce qui précède,

la matrice  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$  convient.

On considère cette matrice  $\Delta$  et les matrices  $U$  et  $R$  définies dans la partie précédente, associées à cette matrice avec les propriétés qu'on leur a démontrées.

11. La matrice  $R = P\Delta {}^tP$  est semblable à  $\Delta$ , donc ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres, qui sont par conséquent strictement positives vu l'hypothèse faite sur  $\Delta$ .

L'énoncé suppose qu'il existe une matrice  $V$  orthogonale et  $T$  une matrice symétrique réelle à valeurs propres strictement positives telles que  $M = VT$ , puis pose  $N = PT {}^tP$  et  $C_1, C_2, C_3$  les vecteurs colonnes de  $P$ .

12. La relation  $M = VT$  et le fait que  $V$  est orthogonale, donc inversible d'inverse  $V^{-1} = {}^tV$  permettent d'écrire :

$$T = V^{-1}M = {}^tVM \text{ et } {}^tT = T, \text{ donc } T^2 = {}^tTT = {}^tMV {}^tVM = {}^tMI_3M = {}^tMM = S.$$

$$\text{et : } N^2 = ({}^tPTP)^2 = {}^tPT \underbrace{P {}^tP}_{=I_3} PTP = {}^tPT^2P = {}^tPSP = D \quad \text{puisque } S = PD {}^tP \text{ et } {}^tP = P^{-1}.$$

13. Le plus simple ici est de constater que :  $T^2 = S \implies ST = T^2T = T^3 = TT^2 = TS$ , donc  $S$  et  $T$  commutent.

14. Soit  $i$  un entier de  $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ .

a) Le vecteur  $E_i$  décrit dans l'énoncé est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

Comme celui-ci a toutes ses coordonnées nulles sauf la  $i$ -ème qui vaut 1, alors le produit matriciel  $PE_i$  se résume à la matrice colonne égale à la  $i$ -ème colonne de  $P$ , c'est-à-dire en effet la matrice  $C_i$ .

b) D'après les relations précédemment obtenues :

$$SC_i = PD \underbrace{{}^tP \times P}_{=I_3} E_i = {}^tPDE_i.$$

Or  $DE_i$  est, comme à la question précédente, la  $i$ -ème colonne de  $D$ , qui contient un élément non nul noté  $\lambda_i$  à la  $i$ -ème ligne, et des zéros partout ailleurs.

Cela signifie que  $DE_i = \lambda_i \cdot E_i$ , donc  $SC_i = \lambda_i P E_i = \lambda_i C_i$ .

Comme  $C_i$  n'est pas le vecteur nul, c'est bien un vecteur propre de  $S$  pour la valeur propre  $\lambda_i$ , qui correspond au  $i$ -ème élément diagonal de  $D$ .

c) En utilisant 13. :  $S(TC_i) = STC_i = TSC_i = T(\lambda_i C_i) = \lambda_i(TC_i)$ , donc  $TC_i$  appartient au sous-espace propre de  $S$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

d) On doit rappeler ici que  $S$  est une matrice carrée d'ordre 3, diagonalisable et qui possède trois valeurs propres distinctes 1, 16 et 49.

Une conséquence de ce fait est que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1 : les deux vecteurs  $C_i$  et  $TC_i$ , qui appartiennent au même sous-espace propre de  $S$ , sont donc nécessairement colinéaires puisqu'ils forment une famille de 2 vecteurs d'un espace de dimension 1.

15. D'après la question précédente : pour chaque entier  $i \in \{1, 2, 3\}$ , il existe un réel  $\mu_i$  tel que  $TC_i = \mu_i C_i$ . Mais alors, cela signifie que  ${}^tPTP$  est une matrice diagonale, puisque  $(C_1, C_2, C_3)$  forment une base (orthonormée) de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  (acquis depuis que leur matrice  $P$  est inversible car orthogonale) formée de vecteurs propres pour  $T$  : la formule de changement de base assure que  $PT {}^tP = N$  est la matrice diagonale  $\text{Diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ .

16. La matrice diagonale  $N$  vérifie :  $N^2 = {}^tPTP {}^tPTP = {}^tPT^2P = {}^tPSP = D$ .

Or on a vu à la Partie 2 que parmi toutes les matrices diagonales dont le carré vaut  $D$ , une seule d'entre elle a des éléments diagonaux, qui sont aussi ses valeurs propres, toutes strictement positives :

$$N = \text{Diag}(1, 4, 7).$$

Mais cette matrice est aussi  $\Delta$ , ce qui implique :  $T = PN {}^tP = P\Delta {}^tP = R$ .

17. Pour finir :  $V = MT^{-1} = MR^{-1} = U$ .

## PROBLÈME

### Partie 1

1. Soient  $x$  et  $y$  deux réels.

a) Lorsque  $t$  tend vers 0,  $(1-t)^{y-1} = e^{(y-1)\ln(1-t)}$  tend vers  $e^{(y-1)\ln(1)} = e^0 = 1$  par continuité de  $\ln$  en 1 et de  $\exp$  en 0, donc :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}.$$

b) La fonction  $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$  est définie, continue et positive sur  $]0; \frac{1}{2}]$ .

Or l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}} dt$  est une intégrale de Riemann impropre en 0 qui converge si et seulement si :  $1-x < 1 \iff x > 0$ .

Le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues, positives assure qu'il en est de même pour l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ .

- c) Le changement de variable  $s = 1 - t$  est affine, donc de classe  $\mathcal{C}^1$ , strictement décroissant ici et bijectif de  $]0; \frac{1}{2}[$  dans  $[\frac{1}{2}; 1[$ .

Le théorème de changement de variable assure donc que les intégrales  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

et  $\int_1^{\frac{1}{2}} (1-s)^{x-1}s^{y-1}(-ds) = \int_{\frac{1}{2}}^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$  sont de même nature, et égales en cas de convergence.

- d) La fonction  $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$  est définie, continue et positive sur  $]0; 1[$  : par définition d'une intégrale doublement impropre,  $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  converge si et seulement si  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  et  $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  convergent, donc si et seulement si  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  et  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1} dt$  convergent d'après c).

D'après a), on peut donc effectivement conclure que :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \text{ converge si et seulement si } x > 0 \text{ et } y > 0.$$

On note désormais, pour tout couple  $(x, y)$  de réels strictement positifs,  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ .

2. Soit  $(x, y) \in ]0; +\infty[^2$  ; l'intégrale  $B(x, y)$  est donc convergente, et le changement de variable affine  $s = 1 - t$  est toujours licite, qui assure que :

$$B(x, y) = \int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}(-ds) = \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds = B(y, x)$$

puisque la variable d'intégration est muette.

3. Soit  $x > 0$  :

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^0 dt = \int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{t^x}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} = \frac{1}{x} - 0 \text{ puisque } x > 0.$$

L'intégrale n'était plus impropre qu'en 0, et  $B(x, 1) = \frac{1}{x}$  pour tout  $x > 0$ .

4. a) Soit  $(x, y) \in ]0; +\infty[^2$  : alors  $x + 1 > 0$  et  $y + 1 > 0$ , donc les intégrales  $B(x, y)$ ,  $B(x + 1, y)$  et  $B(x, y + 1)$  convergent et la linéarité de l'intégrale (impropre convergente) peut être utilisée, qui donne :

$$\begin{aligned} B(x + 1, y) + B(x, y + 1) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \int_0^1 (t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y) dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} [t + 1 - t] dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = B(x, y). \end{aligned}$$

- b) soit  $(x, y) \in ]0; +\infty[$ , et soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b < 1$ .

Dans l'intégrale  $\int_a^b xt^{x-1}(1-t)^y dt$ , on pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1-t)^y &\longrightarrow & u'(t) = -y(1-t)^{y-1} \\ v'(t) &= xt^{x-1} &\longrightarrow & v(t) = t^x \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1[$  donc sur  $[a; b]$ , donc par intégration par parties :

$$x \int_a^b t^{x-1}(1-t)^y dt = \left[ t^x(1-t)^y \right]_a^b + y \int_a^b t^x(1-t)^{y-1} dt = b^x(1-b)^y - a^x(1-a)^y + y \int_a^b t^x(1-t)^{y-1} dt.$$

Puisque  $x > 0$  et  $y > 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 0$  et  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-a)^y = 1^y = 1$ ,

et de même  $\lim_{b \rightarrow 1^-} b^x = 1^x = 1$  et  $\lim_{b \rightarrow 1^-} (1-b)^y = 0$ ; puisque  $B(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt$  converge, on peut passer à la limite dans l'égalité précédente lorsque  $a$  tend vers  $0^+$  et  $b$  tend vers  $1^-$ , pour obtenir :

$$x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = y \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt, \quad \text{soit } \boxed{x B(x, y+1) = y B(x+1, y)}.$$

c) Des deux questions précédentes, on déduit que pour tout  $(x, y) \in ]0; +\infty[^2$  :

$$B(x+1, y) = B(x, y) - B(x, y+1) = B(x, y) - \frac{y}{x} B(x+1, y) \implies \left(1 + \frac{y}{x}\right) B(x+1, y) = B(x, y),$$

$$\text{Soit puisque } 1 + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x} : \quad \boxed{B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)}.$$

5. Raisonnons ici par récurrence sur  $p$  pour montrer que la propriété

$$\mathcal{P}(p) : \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!},$$

est vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**I.** Pour  $p = 1 : \forall q \in \mathbb{N}^*, B(1, q) \stackrel{q.2.}{=} B(q, 1) \stackrel{q.3}{=} \frac{1}{q}$ , et puisque  $\frac{(1-1)!(q-1)!}{(1+q-1)!} = \frac{0!(q-1)!}{q!} = \frac{1}{q}$ , alors  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

**H.** Supposons  $\mathcal{P}(p)$  vraie pour un certain  $p \in \mathbb{N}^*$ , et montrons qu'alors  $\mathcal{P}(p+1)$  est encore vraie, soit :  $\forall q \in \mathbb{N}^*, B(p+1, q) = \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!}$ .

$$\text{D'après 4.c) : } B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q) \stackrel{H.R.}{=} \frac{p}{p+q} \times \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!},$$

donc  $\mathcal{P}(p+1)$  est vraie si  $\mathcal{P}(p)$  l'est.

**C.** La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , d'après le principe de récurrence.

$$\text{Ainsi : } \boxed{\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}}.$$

## Partie 2

6. L'énoncé rappelle ici la définition de la fonction Gamma :  $\forall \nu \in ]0; +\infty[, \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$ , rappelle que cette intégrale est bien convergente pour tout  $\nu \in ]0; +\infty[$ , et définit sur cet intervalle une fonction qui vérifie :  $\forall \nu \in ]0; +\infty[, \Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma(\nu)$ .

a) La relation qui vient d'être rappelée permet de conjecturer et démontrer sans difficulté, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , que  $\mathcal{Q}(n) : \Gamma(n+1) = n!$ , est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**I.** Pour  $n = 0 : \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-t} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$ , donc  $\Gamma(0+1) = 1$  est bien égal à  $0!$  et  $\mathcal{Q}(0)$  est vraie.

**[H.]** Supposons  $\mathcal{Q}(n)$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , et montrons qu'alors  $\mathcal{Q}(n+1)$  est encore vraie, soit :  $\Gamma(n+2) = (n+1)!$ .

Puisque  $n+1 > 0$ , on sait que :  $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) \stackrel{H.R.}{=} (n+1) \times n! = (n+1)!$ , donc  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie si  $\mathcal{Q}(n)$  l'est.

**[C.]** La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'après le principe de récurrence.

b) Puisque  $\frac{1}{2} > 0$ , alors l'intégrale  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$  est convergente (l'intégrale est doublement impropre).

Or la fonction  $\psi : t \mapsto \sqrt{2t}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante et bijective de  $]0; +\infty[$  dans lui-même, donc le changement de variable  $u = \sqrt{2t}$  est licite.

On a alors  $du = \frac{2}{2\sqrt{2t}} dt \iff \sqrt{2} du = \frac{dt}{\sqrt{t}}$  et  $t = \frac{u^2}{2}$ .

Le théorème de changement de variable assure alors que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \times \sqrt{2} du$  sont toutes deux convergentes (puisque la première intégrale l'est), et égales.

Or le cours sur la loi normale centrée, réduite nous apprend que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$  converge et vaut 1. Comme la fonction intégrée est clairement paire sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

donc  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$ .

Soit  $(a, b) \in ]0; +\infty[^2$ , on définit  $f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$

7. a) Remarquons d'emblée que  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$  est strictement positive comme intégrale convergente d'une fonction continue, strictement positive sur  $]0; +\infty[$  (propriété de *stricte positivité* de l'intégrale).

Sous réserve de convergence :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt} dt$ .

Le changement de variable  $u = bt$  est affine donc licite, et assure que  $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$  est de même naturel, et égale en cas de convergence, à :

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{b}\right)^{a-1} e^{-u} \frac{du}{b} = \frac{b^a}{\Gamma(a)b^a} \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du.$$

On reconnaît l'intégrale  $\Gamma(a)$  qui converge puisque  $a > 0$ , donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$  converge et on a déjà montré ici, que cette intégrale vaut 1.

b) Pour tout  $t > 0$ ,  $f_{a,b}(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} > 0$  puisque  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $t^a > 0$ ,  $e^{-bt} > 0$  et pour tout  $t \leq 0$ ,  $f_{a,b}(t) = 0 \geq 0$  donc  $f_{a,b}$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f_{a,b}$  est aussi continue sur  $]0; +\infty[$  comme produit de fonctions qui le sont, et est continue car constante (nulle) sur  $] -\infty; 0[$ , donc  $f_{a,b}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0.

Ces deux propriétés et le résultat de la question précédente, prouvent que  $f_{a,b}$  est bien une densité de probabilité.

8. a) La fonction  $f_{a,1} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$  est la densité de la loi gamma  $\gamma(a)$  : c'est la loi suivie par une variable aléatoire  $X$  de densité  $f_{a,1}$ .

Le cours sur cette loi donne alors :  $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = a$ .

b) La fonction  $f_{1,b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{b^1}{\Gamma(1)} t^{1-1} e^{-bt} = b e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$  est celle d'une loi exponentielle  $\mathcal{E}(b)$  : c'est la loi suivie par une variable aléatoire  $X$  de densité  $f_{1,b}$ .

Le cours sur cette loi donne :  $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{b}$  et  $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{b^2}$ .

*L'énoncé demandant cependant spécifiquement de montrer l'espérance de la variance, il faudrait refaire ici la démonstration du cours ; pourquoi pour celle-ci et pas la précédente ?*

9. Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, de densité  $f_{a,b}$ .

a) Par transformation affine,  $bX$  est encore une variable à densité, et une densité de  $bX$  est la fonction  $g$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{1}{|b|} f_{a,b}\left(\frac{t}{b}\right) = \begin{cases} \frac{1}{b} \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} e^{-b\frac{t}{b}} = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{t}{b} \leq 0 \iff t \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que  $bX$  suit la loi gamma  $\gamma(a)$ .

b) On sait qu'alors  $\mathbf{E}(bX)$  et  $\mathbf{V}(bX)$  existent toutes deux et sont toutes deux égales à  $a$ .

La linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance assurent alors que  $\mathbf{E}(X)$  et  $\mathbf{V}(X)$  existent et vérifient :

$$b\mathbf{E}(X) = a \iff \boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{a}{b}} \quad \text{et} \quad b^2\mathbf{V}(X) = a \iff \boxed{\mathbf{V}(X) = \frac{a}{b^2}}.$$

10. Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires à densité, indépendantes et de densités respectives  $f_{a_1,b}$  et  $f_{a_2,b}$  où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $b$  sont trois réels strictement positifs.

a) Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont à densité et indépendantes : leur somme  $X_1 + X_2$  est alors à densité si le *produit de convolution* de  $f_{a_1,b}$  et  $f_{a_2,b}$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en un nombre fini de points.

On étudie donc la convergence, pour tout réel  $x$ , de :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t) \cdot f_{a_2,b}(x-t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} t^{a_1-1} e^{-bt} \cdot f_{a_2,b}(x-t) dt.$$

Le changement de variable  $u = x - t$  est affine donc licite : cette intégrale est de même nature, et égale en cas de convergence, à

$$\int_x^{-\infty} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} (x-u)^{a_1-1} e^{-b(x-u)} \cdot f_{a_2,b}(u) \cdot (-du) = \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} e^{-bx} \int_{-\infty}^x (x-u)^{a_1-1} e^{bu} \cdot f_{a_2,b}(u) du.$$

Comme  $f_{a_2,b}$  est nulle sur  $] -\infty ; 0]$ , alors cette intégrale est convergente nulle pour tout  $x \leq 0$ .

Pour tout  $x > 0$ , sous réserve de convergence et toujours du fait que  $f_{a_2,b}$  est nulle sur  $] -\infty ; 0]$ , elle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} e^{-bx} \int_0^x (x-u)^{a_1-1} e^{bu} \cdot \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} u^{a_2-1} e^{-bu} du &= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^x (x-u)^{a_1-1} u^{a_2-1} du \\ &= \frac{x^{a_1+a_2-2} b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{a_1-1} \cdot \left(\frac{u}{x}\right)^{a_2-1} du \end{aligned}$$

Le changement de variable  $z = \frac{u}{x}$ , encore affine donc licite, assure que cette dernière intégrale converge (pour  $x > 0$ ) si et seulement si l'intégrale ci-dessous converge, et dans ce cas elle lui est égale :

$$\int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{a_1-1} \cdot \left(\frac{u}{x}\right)^{a_2-1} du = \int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} x dz = x \int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz.$$

On reconnaît ici l'intégrale  $B(a_1, a_2)$ , bien convergente d'après la partie I puisque  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$ .

En définitive, le produit de convolution de  $f_{a_1,b}$  et  $f_{a_2,b}$  converge bien pour tout réel  $x$  et définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Cette fonction  $h$  est bien continue sur  $]0; +\infty[$  comme produit de fonctions continues sur cet intervalle, et est continue sur  $] - \infty ; 0[$  comme fonction constante ; elle est donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0, soit en un nombre fini de points.

Le théorème de convolution assure donc que  $X_1 + X_2$  est une variable à densité, et que  $h$  est une densité de  $X_1 + X_2$ .

b) Une conséquence du résultat précédent est donc que  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1$ .

Or il apparaît que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^{+\infty} b^{a_1+a_2} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \cdot \Gamma(a_1+a_2) \int_0^{+\infty} f_{a_1+a_2,b}(x) dx.$$

Comme la fonction  $f_{a_1+a_2,b}$  est elle-même une densité de probabilité nulle sur  $] - \infty ; 0]$ , son intégrale entre 0 et  $+\infty$  vaut aussi 1 ! Donc nécessairement :

$$\frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \cdot \Gamma(a_1 + a_2) = 1 \iff B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1 + a_2)}.$$

*Remarque : on a alors pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1 + a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx}$ , ce qui prouve en fait que  $X_1 + X_2$  suit une loi du même type que  $X_1$  et  $X_2$  (appelée loi Gamma à deux paramètres, hors-programme officiel depuis la dernière réforme).*

c) De tout ce qui précède, on déduit que  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  est bien définie puisque  $\frac{1}{2} > 0$ , et vaut :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(1)} = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{0!} = \pi.$$

### Partie 3

Dans cette partie et pour les questions d'informatique, les bibliothèques suivant sont importées ainsi :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
```

11. Soit  $(x, y)$  un couple de réels strictement positifs.

a) Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme (à densité) sur  $]0; 1[$ .

Une densité de  $U$  est alors la fonction  $f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in ]0; 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

La fonction  $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$  étant continue et positive sur  $]0;1[$  : d'après le théorème de transfert, la variable  $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ , qui est presque-sûrement bien définie car  $U(\Omega) = ]0;1[$ , admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante converge (absolument) :

$$\int_{U(\Omega)} t^{x-1}(1-t)^{y-1} \cdot f_U(t) dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

On reconnaît l'intégrale  $B(x, y)$  qui converge bien d'après la partie I puisque  $x > 0$  et  $y > 0$ , donc  $\mathbf{E}(U^{x-1}(1-U)^{y-1})$  est bien définie et :

$$\mathbf{E}(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(x, y).$$

L'énoncé admettait alors que  $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$  possède une variance.

- b) La fonction Python ci-dessous renvoie une simulation de  $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$  lorsque les réels (qui doivent être strictement positifs)  $x$  et  $y$  sont passés en arguments :

```
1 def Simul(x, y):
2     U = rd.random() # simulation de la loi uniforme sur ]0;1[
3     return U**(x-1)*(1-U)**(y-1)
```

- c) Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $]0;1[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1}$ , c'est-à-dire la moyenne empirique de l'échantillon  $(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1})_{1 \leq k \leq n}$ .

Comme  $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$  possède une espérance et une variance, alors il en est de même des variables  $(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1})_{k \geq 1}$ , qui sont aussi mutuellement indépendantes car les  $(U_k)_{k \geq 1}$  le sont, d'après le lemme des coalitions.

La loi faible des grands nombres s'applique alors, qui assure que la suite  $(R_n)_{n \geq 1}$  des moyennes empiriques de ces variables aléatoires, converge en probabilité vers la variable certaine égale à l'espérance commune des  $(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1})_{k \geq 1}$  :

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1} \xrightarrow{\mathbf{P}} B(x, y).$$

- d) Il y a deux façons très classiques de simuler  $R_n$ .

```
1 def Rn(x, y):
2     S = 0
3     for k in range(n):
4         S = S + Simul(x, y)
5     return S/n
```

La boucle `for` construit une somme de  $n$  simulations indépendantes de la loi de  $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$  avec la fonction précédente ; on divise par l'effectif pour obtenir la moyenne empirique.

On peut aussi construire un vecteur de  $n$  simulations indépendantes :

```
def Rn(x, y):
    V = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        V[k] = Simul(x, y)
    return np.mean(V) # mean : moyenne arithmétique du vecteur
```

- e) Dans la figure proposée par l'énoncé, obtenue par simulations successives de  $R_n$  pour  $x = y = \frac{1}{2}$  et pour des valeurs de plus en plus grandes de  $n$ , on constate bien la convergence (*assez rapide, d'ailleurs*) des moyennes empiriques vers une valeur constante cohérente avec le résultat obtenu à la fin de la partie 2 :  $\pi = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

12. soit  $a$  un réel supérieur ou égal à 1.

a) Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Une densité de  $X$  est

$$\text{alors la fonction } f_X : t \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

La fonction  $t \mapsto t^{a-1}$  est continue et positive sur  $]0; +\infty[ = X(\Omega)$ , donc d'après le théorème de transfert,  $\mathbf{E}(X^{a-1})$  existe si et seulement si  $\int_{X(\Omega)} t^{a-1} f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$  est (absolument) convergente.

Or on reconnaît ici l'intégrale  $\Gamma(a)$ , bien convergente puisque  $a > 0$  :  $\mathbf{E}(X^{a-1})$  existe et vaut

$$\mathbf{E}(X^{a-1}) = \Gamma(a).$$

De même,  $X^{a-1}$  admet un moment d'ordre 2 si et seulement si  $(X^{a-1})^2 = X^{2a-2}$  admet une espérance : c'est le cas si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{2a-2} e^{-t} dt$  converge.

On reconnaît l'intégrale  $\Gamma(2a - 1)$ , qui converge puisque  $a \geq 1 \implies 2a - 1 \geq 1 > 0$ , donc  $X^{a-1}$  admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$\mathbf{E}(X^{2a-2}) = \Gamma(2a - 1).$$

La variable aléatoire  $X^{a-1}$  admet donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}(X^{a-1}) = \mathbf{E}(X^{2a-2}) - (\mathbf{E}(X^{a-1}))^2 = \Gamma(2a - 1) - (\Gamma(a))^2.$$

b) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

On définit, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{a-1}$ .

Notons d'abord que  $M_n$  est bien un estimateur de  $\Gamma(a)$  comme fonction de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  qui dépend certes de  $a$  (supposé connu), mais pas de  $\Gamma(a)$  qu'on veut estimer.

D'après la question précédente, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{E}(X_k^{a-1})$  existe et vaut  $\Gamma(a)$  donc par linéarité de l'espérance,  $M_n$  admet une espérance qui vaut :

$$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k^{a-1}) = \frac{1}{n} \times n\Gamma(a) = \Gamma(a),$$

ce qui achève de prouver que  $M_n$  est un estimateur sans biais de  $\Gamma(a)$ .

L'indépendance mutuelle des  $(X_k)_{k \geq 1}$  assure celle des  $(X_k^{a-1})_{k \geq 1}$  (lemme des coalitions) ; l'existence de  $\mathbf{V}(X_k^{a-1})$  pour tout  $k \geq 1$  assure celle de  $M_n$ , qui vaut :

$$\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{n^2} \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k^{a-1}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k^{a-1}) = \frac{1}{n^2} \times n\mathbf{V}(X^{a-1}) = \frac{\mathbf{V}(X^{a-1})}{n}.$$

On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(M_n) = 0$ , ce qui implique d'après le cours, que  $M_n$  est un estimateur convergent de  $\Gamma(a)$ .

Au sens où la suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers la variable certaine égale à  $\Gamma(a)$ .

c) Considérons la fonction `Myst` suivante :

```
1 def Myst(n):
2     U = rd.random(n)
3     X = -np.log(1-U)
4     return X
```

Elle crée un vecteur  $\mathbf{U}$  contenant  $n$  réalisations considérées indépendantes, de la loi uniforme à densité sur  $]0; 1[$ .

Les opérations de la ligne suivante s'appliquent terme à terme à ce vecteur, et  $X$  contient alors  $n$  réalisations indépendantes de la variable aléatoire  $-\ln(1 - U)$ .

On est en présence d'une utilisation classique de la *méthode d'inversion* : puisque  $U(\Omega) = ]0; 1[$ , alors  $(1 - U)(\Omega) = ]0; 1[$  donc  $W = -\ln(1 - U)$  est presque sûrement définie et  $\ln(1 - U)(\Omega) = ]-\infty; 0[ \implies W(\Omega) = ]0; +\infty[$ .

Ainsi  $F_W(x) = \mathbf{P}(W \leq x) = 0$  pour tout  $x \leq 0$ , et pour tout  $x > 0$  :

$$F_W(x) = \mathbf{P}(W \leq x) = \mathbf{P}(-\ln(1-U) \leq x) = \mathbf{P}(\ln(1-U) \geq -x) \stackrel{(*)}{=} \mathbf{P}(1-U \geq e^{-x}) = \mathbf{P}(U \leq 1 - e^{-x})$$

(\*) car  $\exp$  est continue, strictement croissante, bijective de  $] -\infty; 0[$  dans  $]0; 1[$ .

Puisque  $x > 0$ , alors  $e^{-x} \in ]0; 1[ \iff 1 - e^{-x} \in ]0; 1[$  donc  $\mathbf{P}(U \leq 1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}$  vu que  $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0; 1[)$ .

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ , c'est-à-dire que  $W$  suit la loi exponentielle de paramètre 1.

La fonction `Myst` renvoie donc un vecteur uniligne de taille  $n$  contenant  $n$  réalisations indépendantes, de la loi exponentielle de paramètre 1.

- d) Au vu des résultats précédents, une valeur approchée de  $\Gamma(a)$  est donc obtenue en calculant une réalisation de  $M_n$ , qui en est un estimateur sans biais et convergent,  $a \geq 1$  étant donné et  $n$  étant un entier naturel non nul (qu'il faut prendre assez grand).

```
1 def Approx(n, a):
2     X = Myst(n)
3     return np.mean(X**(a-1))
```

est la rédaction la plus courte. On peut s'inspirer de ce qui a été fait à la question 11.d) pour écrire un script équivalent avec une boucle `for`.

★★★ FIN DU SUJET ★★★