

500602

NIÉRAT

PAUL

04/10/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

5 0 0 6 0 2



Né(e) le

04 / 10 / 2005

Signature

Nom

N I E R A T

Prénom(s)

P A U L M A R I E

20 / 20

Ecricome

Épreuve : MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 / 11

Numéro de table

050

Exercice n° 1 :

$$\text{Soit, } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminons l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$O_3 M + M O_3 = O_3$$

Pour toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$, $O_3 M = O_3$ et $M O_3 = O_3$

$$\text{Donc, } E_{O_3} = M_3(\mathbb{R})$$

Puis, soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où $(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$ réels.

$$I M + M I = O_3$$

$$\Leftrightarrow M + M = O_3$$

$$\Leftrightarrow 2M = O_3$$

$$\Rightarrow M = O_3.$$

$$\text{Donc, } E_{I_3} = \{O_3\}$$

2) D'abord, pour toute matrice C de $M_3(\mathbb{R})$,
 $E_C \subset M_3(\mathbb{R})$

De plus, pour toute matrice C , $O_3 \in E_C$ donc, $E_C \neq \emptyset$

De plus, on prend $\lambda \in \mathbb{R}$ et (A, B) de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $A \in E_C$ et $B \in E_C$. (A quelconque et B quelconque).

$$\begin{aligned} & C(\lambda A + B) + (\lambda A + B)C \\ &= C\lambda A + CB + \lambda AC + BC \\ &= \lambda(CA + AC) + (CB + BC). \end{aligned}$$

Or, $A \in E_C$ et $B \in E_C$ donc, $CA + AC = O_3$ et, $CB + BC = O_3$.

$$\text{De fait, } C(\lambda A + B) + (\lambda A + B)C = O_3.$$

$$\text{Donc, } (\lambda A + B) \in E_C$$

Donc E_C sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

3) Soit $M \in E_a$.

On pose, $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et les coefficients sont

réels.

$$\text{On a, } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2d + a - 2b = 0 \\ -2a + 2g + d - \end{cases}$$

Apmjs

h) a) A diagonalisable par symétrie. (A matrice symétrique)

4) b) Déterminons,

$$\begin{aligned} A^3 - 9A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} A - 9A \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{0_3}} \end{aligned}$$

Donc, $P(X) = X^3 - 9X$ polynôme annulateur de A .

Or, l'ensemble des valeurs propres de A est racine de ce polynôme annulateur.

Donc si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors, $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.

c) Étudions les racines de P .

$$\begin{aligned} P(X) = 0 &\Leftrightarrow X^3 - 9X = 0 \\ &\Leftrightarrow X(X^2 - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow X(X-3)(X+3) = 0. \end{aligned}$$

Donc, les valeurs propres possibles de A sont,
 $0, 3$ ou -3 .

Numéro d'inscription 5 0 0 6 0 2

Signature



Né(e) le 04 / 10 / 2005

Nom N I E R A T

Prénom(s) P A U L M A R I E

20 / 20



Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 11

Numéro de table 050

On, $-3 \in S_T(A) \Leftrightarrow \exists X$ non nul de $M_3, 1(\mathbb{R})$,
 non nul $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = -3X$.
 $\Leftrightarrow AX + 3X = 0$.
 $\Leftrightarrow (A + 3I)X = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ y = -z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x = -z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ z = -2x \end{cases}$

Donc, $X = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$. Donc, $-3 \in S_T(A)$ car
 X non nul. De plus, comme la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

est libre (non-nulle) et génératrice de E_3 c'est donc une base de E_3 .

De plus, on établit le même raisonnement en 0.
 $0 \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X$ non-nul tel que, $AX = 0$.
 et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y = z \end{cases}$$

Donc, $X = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ De fait, X non-nul

et $0 \in \text{Sp}(A)$.

De plus, $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ libre (non-nulle) et génératrice de E_0 donc, c'est une base de E_0 .

De même, $3 \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X$ non-nul tel que,
 $AX = 3X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow (A - 3I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 2y \\ -2x + 2z - 3y = 0 \\ 2y = 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2x + 2z - 3y = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -2x + 2z - 3y = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Donc, $X = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc, comme X non-nul,

$3 \in \text{Sp}(A)$.

De plus, $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ libre (non-nulle) et génératrice de E_3 donc, cette famille est une base de E_3 .

De ce fait, comme A admet 3 valeurs propres et que la concatenation de familles libres associées de sous-espaces propres associées à des valeurs propres de A forme une famille libre ~~et que~~

on a, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ famille libre de $M_3, 1(\mathbb{R})$. σ_A ,
elle est de cardinal 3.

De plus, $\dim(M_3, 1(\mathbb{R})) = 3$.

Donc, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base de $M_3, 1(\mathbb{R})$

Donc A diagonalisable et par définition il existe
 P inversible de $M_3(\mathbb{R})$ et D diagonale de
 $M_3(\mathbb{R})$ telles que,

$$A = P D P^{-1} \quad \text{avec}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donc

$$\Leftrightarrow D = P^{-1} A P$$

(P inversible)

$$5) \quad P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{P^2 = 9 I.}$$

Comme P inversible, alors

$$P^2 = 9 I$$

Numéro d'inscription

5 0 0 6 0 2

Signature

Né(e) le

0 6 / 1 0 / 2 0 0 5

Nom

N I E R A T

Prénom (s)

P A U L M A R I E

20 / 20



Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 3 / 1 1

Numéro de table 0 5 0

$$\Leftrightarrow P(P) = gI$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{g}P\right) = I.$$

$$\text{Donc, } P^{-2} = \frac{1}{g}P$$

6) a) Soit, $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$

$$N \in E_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$N \in E_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 3a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3c + 3c = 0 \\ -3d = 0 \\ 3b = 0 \\ 3g - 3g = 0 \\ 3h = 0 \\ 3i + 3i = 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=0 \\ f=0 \\ h=0 \\ i=0. \end{cases}$$

De ce fait, $N = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Donc, $N \in E_0 \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6)
b) De fait

$$N = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$N = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On effectue alors un test de liberté. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ réels.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre et génératrice de E_0 (s'écrit sous forme de vect) donc elle est une base de E_0 .

De fait, $\dim(E_0) = 3$

7) a) Soit $N = P^{-1} M P$.

$$M \in E_A \Leftrightarrow AM + MA = 0_3$$

$$\Leftrightarrow A(PNP^{-1}) + (PNP^{-1})A = 0_3 \quad (P \text{ inversible})$$

$$\Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow P(DN + ND)P^{-1} = 0_3.$$

en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite,
comme P inversible,

$$\Leftrightarrow DN + ND = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \underline{N \in E_D.}$$

Donc, $M \in E_A \Leftrightarrow N \in E_D.$

$$b) \quad M \in E_A \Leftrightarrow P^{-1} M P \in E_D$$

$$M \in E_A \Leftrightarrow P^{-1} M P = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car (α, β, γ) réels unique puisque $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ base de E_D

$$\Leftrightarrow M = P \left(\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) P^{-1}$$

car P inversible

$$\Leftrightarrow M = P \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M = \alpha \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right) + \beta \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right) + \gamma \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right)$$

Par définition, comme (α, β, γ) réels, E_A a pour base B' ,

$$B' = \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right)$$

8) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$(A+M)^2 = (A+M)(A+M)$$

$$= A^2 + AM + MA + M^2$$

Donc, l'ensemble de matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $(A+M)^2 = A^2 + M^2$ est en fait l'ensemble de matrices de E_A .

Numéro d'inscription

500602



Né(e) le

06 / 10 / 2005

Signature

Nom

N I E R A T

Prénom (s)

P A U L M A R I T E

20 / 20

Ecricome

Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 / 11

Numéro de table

050

g) Soit $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = AM + MA$.

$M \in E_A$ a été exprimé en \mathcal{B} .

On, $\dim B' = 3$ donc, l'ensemble de matrices M telles que $AM + MA = 0_3$ est de dimension 3.

~~Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un~~

On, les matrices représentent le noyau de f .

~~Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, on peut alors appliquer le théorème du rang,~~

$$\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(f) = 9 - 3$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(f) = 6.$$

$$\underline{\text{Donc, rg}(f) = 6.}$$

Exercice n° 2 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Étudiez la négligeabilité de h en $+\infty$, $h(t) = t^n e^{-t}$ en $+\infty$.
Montrez que h négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\begin{aligned} \frac{h(t)}{\frac{1}{t^2}} &= \frac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} \\ &= t^n e^{-t} \cdot t^2 \\ &= \frac{t^{n+2}}{e^t} \end{aligned}$$

Or, par le théorème de croissance comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{n+2}}{e^t} = 0$.

donc,

$$h(t) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

De ce fait, par critère de négligeabilité sur des intégrales positives, alors, comme

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge comme intégrale de Riemann

de paramètre λ ($\lambda > 1$) alors $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.
($\forall n \in \mathbb{N}$)

De plus, h continue sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions, l'étant et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\int_0^1 t^n e^{-t} dt$ existe par continuité.

Ainsi, par phases, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1b) I_0 et I_1 existent donc.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt.$$

On peut identifier I_0 à la formule de densité de la loi exponentielle de paramètre 1 ($1 > 0$).

$$\text{Donc, } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

$$\text{et } \underline{I_0 = 1}$$

$$\text{De plus, } I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt.$$

Pareillement, on reconnaît la formule de l'espérance d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. ($1 > 0$)

Ainsi donc,

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1.$$

2) Soit $x \geq 0$. Soit, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$.

on a, avec $t \in \mathbb{R}^+$,

$$1 \leq 1+xt$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+xt} \leq 1$, comme la fonction inverse est bijective décroissante sur \mathbb{R}^{++}

$\Leftrightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$, et que $1+xt > 0$ car $xt \geq 0$.
par positivité de l'exponentielle

On, $t \rightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt}$ continue sur \mathbb{R} .

De plus, $0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \geq 0.$

Donc par critère de comparaison pour des intégrales à termes positifs, comme $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, alors,

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ converge pour tout $x \geq 0$

Soit, F définie sur $[0, +\infty[$ par:

Numéro d'inscription

5 0 0 6 0 2



Né(e) le

0 4 / 1 0 / 2 0 0 5

Signature

Nom

N I E R A T

Prénom (s)

P A U L E M A R I E

20 / 20

Ecritome

Épreuve : MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 5 / 1 1

Numéro de table

0 5 0

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

$$3) F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt.$$

$$\text{donc, } F(0) = I_0 \\ = 1.$$

4) Soient x et y deux réels positifs et $x \leq y$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

$$1 \leq 1+xt \leq 1+yt$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{1+yt} \leq \frac{1}{1+xt} \leq 1 \quad \text{par}$$

l'injectivité de la fonction inverse sur \mathbb{R}^+ . En effet,

$$x \geq 0 \Rightarrow 1+xt > 0$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 1+yt > 0$$

} à tout t .

$$\Rightarrow 0 < \frac{e^{-t}}{1+yt} < \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t} \quad \text{puisque,}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t} > 0$ car l'exponentielle est toujours strictement positive.

De fait, en intégrant, comme F converge en fait
 x réel positif,

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

$$\Rightarrow \underline{F(y) \leq F(x)} \quad \text{avec } x \leq y$$

On peut ainsi en déduire que F décroissante sur \mathbb{R}^+

5)a) Soit $x \geq 0$,

$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$. D'abord, cette intégrale
 existe par continuité de $g(t) = \frac{1}{1+xt}$ sur $[0, 1]$
 ($x \in \mathbb{R}^+$) comme quotient de fonctions
 continues sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne
 s'annule pas.

Si $x=0$, $\int_0^1 \frac{1}{1} dt = 1$ (constante)

Si $x > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{x}{1+xt} dt \quad \text{car } x > 0.$$

On reconnaît la primitive de la forme " $\frac{u'}{u}$ ", donc,

$$= \frac{1}{x} \left[\ln |1+xt| \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x} \left(\ln(1+x) - \ln(1) \right) \quad \text{car } 1+xt > 0 \quad \text{car}$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (x > 0)$$

$x > 0$ or $t \geq 0$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\forall t \in [0, 1]$,

$$0 \leq e^{-t} \leq 1.$$

En effet, comme l'exponentielle est bijective croissante

$$\text{Sur } \mathbb{R}, \quad 0 < e^{-t} \leq e^0 \quad \text{car } t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow 0 < e^{-t} \leq 1.$$

donc, reprenons,

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-t} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt} \quad \text{en effet, } \frac{1}{1+xt} > 0$$

puisque $1+xt > 0$ car $xt \geq 0$ or donc $1+xt \geq 1$.

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$

On, $u(t) = \frac{e^{-t}}{1+xt}$ et $v(t) = \frac{1}{1+xt}$ sont telles que u et v continues comme quotient et composée de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$ puisque x est positif.

De plus, $0 < 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt.$$

c) Soit $x > 0$. $\forall t \in [1, +\infty[$

$$0 \leq x \leq xt. \quad \begin{array}{l} \text{Car } t \geq 1 \text{ donc } xt \geq x \\ \text{Car } x > 0. \end{array}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1+xt$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x} \quad \begin{array}{l} \text{puisque la fonction inverse} \\ \text{est biterne décroissante} \\ \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \end{array}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x} \quad \text{puisque, } \forall t \in \mathbb{R}, e^{-t} > 0.$$

Comme on a obtenu en 1b la convergence de

I_0 , alors, $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge aussi. De plus, comme F bien définie, sur \mathbb{R} , alors,

Numéro d'inscription

500602

Signature



Né(e) le

04 / 10 / 2005

Nom

NIERAT

Prénom(s)

PAUL MARIE

20 / 20

Ecritome

Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 11

Numéro de table

050

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \text{ existe.}$$

Comme ces ~~intégrales~~ fonctions sont continues sur $[1, +\infty[$ et positives, alors on a, $\forall x > 0$,

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \frac{1}{x} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$$

d) Par phases, $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

$$\text{On, } \forall x > 0, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt.$$

$$\text{On, } \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\text{en posant, } X = x+1, \quad = \frac{\ln(X)}{X-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(X)}{X}.$$

On, par théorème de croissance comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Donc par théorème d'encadrements, $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ converge et,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt = 0.$$

De plus, $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt \leq I_0$ puisque $I_0 = \int_0^1 e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$
par Phasles.

Ainsi donc, $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt \leq 1$.

de ce fait, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = 0$.

Donc, par théorème d'encadrements, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$

converge et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt = 0$.

Donc, par Chasles,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt = 0.$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

6) Admettons, avec $x \geq 0$ que,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \text{ converge.}$$

6)a) D'abord, comme $F(x)$ existe et que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$

converge, alors reciproquement, $\int_0^{+\infty} e^{-t} (1-xt) dt$ converge ~~et égale~~

(on rappelle, $x \geq 0$). En effet,

comme $xt \geq 0$ $0 \leq e^{-t} (1-xt) \leq e^{-t}$ donc critère de comparaison intégrals e^{-t} positives.

Ainsi, $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} (1-xt) dt$ définie sur \mathbb{R}^+ et,

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} (1-xt) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} (1-xt) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - (1+xt)(1-xt)e^{-t}}{1+xt} dt \text{ par linéarité,}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} (1 - (1-xt + xt + x^2 t^2))}{1+xt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} (x^2 t^2)}{1+xt} dt$$

$$= x^2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \quad (\text{linéarité})$$

6b) On rappelle que I_n définit pour tout entier naturel n .

$$\text{On a, } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt, \quad I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt.$$

D'après 6a,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1-xt) dt = x^2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt.$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + x \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt.$$

(linéarité).

$$\text{On, } \Rightarrow F(x) = I_0 + x I_1 = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt.$$

$$\text{On, } I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \quad (\text{définie en 1a}).$$

On, $1+xt \geq 1$ car $xt \geq 0$ donc,

$$0 \leq \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t}.$$

donc, comme ces deux fonctions sont continues sur \mathbb{R}^+ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) et produit, de fonctions l'étant, alors, on a, comme les bornes sont croissantes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

Numéro d'inscription

5 0 0 6 0 2



Né(e) le

0 6 / 1 0 / 2 0 0 5

Signature

Nom

N I E R A T

Prénom (s)

P A U L M A R I E

20 / 20



Épreuve :

MATHS APPU

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 7

/ 1 1

Numéro de table

0 5 0

de fait, comme $x^2 \geq 0$, alors,

$$x^2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+t} dt \leq x^2 I_2.$$

Donc, $\forall x \geq 0$,

$$0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2.$$

7a)

7b) On utilise la formule du taux d'accroissement, en étudiant, la limite en 0 de, ($x > 0$)

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{F(x) - F(0)}{x}$$

$$= \frac{F(x) - 1}{x}$$

On, $F(x) = 1 - x + o(x)$
 $x \rightarrow 0$

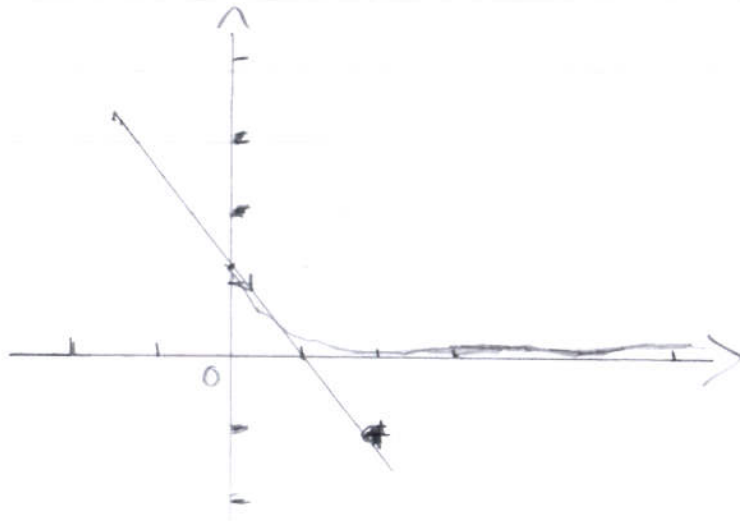
donc, en 0, $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{1 - x - 1 + o(x)}{x} = \frac{-x + o(x)}{x}$

On, $\frac{-x + o(x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{x} \underset{0}{\sim} -1$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -1$. Donc, comme

Cette limite est finie, F dérivable en 0 et,
 Donc, $F'(0) = -1$.

donc,
 8)



l'équation de la tangente en 0 est :

$$y = \cancel{1} + F(0) + f'(0)(x-0) \quad \text{or } F'(0) = -1$$

$$y = 1 + (-1)(x)$$

$$\underline{y = 1 - x}$$

Exercice n° 3 :

PARTIE I : $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

1) D'abord, f_i définie sur \mathbb{R} puisque $x^{i+2} > 0$
 car $x \geq 1$ sur ce segment de la densité.

• De plus, f_i continue sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles continues sur $]1, +\infty[$ et son dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

De plus, f_i continue sur $]-\infty, 1[$ comme constante.
Donc f_i continue sur \mathbb{R} sauf essentiellement en 1.

• De plus, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comme $x \geq 1$, $i \cdot \frac{1}{x^{i+2}} \geq 0$ et $0 \geq 0$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_i(x) \geq 0$.

• De plus, on étudie $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) dx$.

$\int_{-\infty}^1 f_i(x) dx$ converge et vaut 0.

De plus soit $A \geq 1$, on étudie l'intégrale partielle, avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\int_1^A \frac{i}{x^{i+2}} dx \quad (\text{existe par continuité})$$

$$= i \int_1^A \frac{1}{x^{i+2}} dx$$

$$= i \left[-\frac{1}{i x^{i+1}} \right]_1^A$$

$$= i \left(-\frac{1}{A^{i+1}} + \frac{1}{1 \cdot i} \right)$$

$$= -\frac{i}{A^{i+1}} + \frac{1 \cdot i}{i} = -\frac{1}{A^i} + 1$$

On, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{i}{A^i} = 0$ car $i \geq 1$ donc, en passant à la limite, $A \rightarrow +\infty$,

Numéro d'inscription

5 0 0 6 0 2



Né(e) le

0 4 / 1 0 / 2 0 0 5

Signature

Nom

N I È R A T

Prénom (s)

P A U L M A R I È

20 / 20

Ecritome

Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 8 / 1 1

Numéro de table

0 5 0

Commencez à écrire dès la première page

$$\int_1^{+\infty} f_i(x) dx \text{ converge et vaut } 1.$$

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) dx = 1.$

Donc, f_i est une densité de probabilité. ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).

2) a)

$$E(X_i) \text{ existe} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) \cdot x dx \text{ converge absolument}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} x \cdot f_i(x) dx \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x^i}{x^{i+1}} dx \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} i \cdot \frac{1}{x^i} dx \text{ converge.}$$

$$\Leftrightarrow i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i} dx \text{ converge.}$$

Or, si $i=1$ cette intégrale diverge comme ~~intégrale~~ ^{intégrale} de Riemann de paramètre 1.

Si $i \geq 2$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i} dx$ existe comme intégrale de Riemann de paramètre strictement plus grand que

1.

Donc, si $i = 1$, pas d'espérance.

Si non, X_i admet une espérance.

On a, dans le deuxième cas, $\forall i \geq 2$

$$f(x) = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{i}{x^{i+2}} dx$$

$$E(X_i) = i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i} dx.$$

En posant $A \geq 1$, on passe par l'étude de l'intégrale partielle,

$$\begin{aligned} \text{On étudie, } i \int_1^A x^{-i} dx &= i \left[\frac{x^{-i+2}}{-i+2} \right]_1^A \quad (i > 1) \\ &= i \left(\frac{1}{A^{i-2}(-i+2)} - \frac{1}{(-i+2)} \right) \\ &= \frac{i}{A^{i-2} \cdot (1-i)} - \frac{i}{(1-i)}. \end{aligned}$$

$$\text{On, } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{i}{A^{i-2} \cdot (1-i)} = 0$$

Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i} dx$ converge pour $i \geq 2$ et vaut,

$$= -\frac{i}{(1-i)} = \frac{i}{(i-2)} \quad (i \in \llbracket 2, n \rrbracket).$$

b) On a de ce fait, $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$E(X_i) = \frac{i}{i-2} = \frac{i-2+2}{i-2} = 1 + \frac{2}{i-2}.$$

Où, $i \geq 2$ donc on cherche les plus petites valeurs pour $i-2$ or que $\frac{2}{i-2}$ soit maximal tout en gardant $i \geq 2$.

Donc, les numéros de catégorie professionnelle sont décroissants concernant la valeur du revenu mensuel moyen: Autrement dit,

$$\underline{E(X_2) > E(X_3) \dots > E(X_n)}.$$

3) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$,

a) D'abord, si $x < 1$, $P(X_i \leq x) = 0$ puisque x est à gauche du support.

$$\text{Si non, } P(X_i \leq x) = \int_1^x f_i(t) dt$$

$$P(X_i \leq x) = \int_1^x i \cdot \frac{1}{t^{i+2}} dt$$

$$P(X_i \leq x) = i \left[\frac{x^{-i}}{-i} \right]_1^x$$

$$= i \left[-\frac{1}{x^i} \right]_1^x$$

$$= -\frac{1 \cdot i}{x^i \cdot i} + \frac{i}{i}$$

$$= \underline{1 - \frac{1}{x^i}} \quad \text{si } x \in [1, +\infty[\text{ ou } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Donc on a bien,

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

h) Soit $U \subset \mathcal{U}]0, 1[$

a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$V_i = \frac{1}{U^{1/i}}$$

$$U^{1/i}(\Omega) =]0, 1[$$

donc, $\left(\frac{1}{U^{1/i}} \right)(\Omega) = [1, +\infty[$.

Numéro d'inscription

5 0 0 6 0 2

Signature

Né(e) le

06 / 10 / 2005

Nom

NIERAT

Prénom(s)

PAUL MARIE

20 / 20

Ecricome

Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 11

Numéro de table 050

De fait, si $x \leq 1$, $P(V_i \leq x) = 0$ (à gauche du support).

si $x \geq 1$, $P(V_i \leq x)$ ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$)

$$= P\left(\frac{1}{U^i} \leq x\right)$$

$$= P\left(U^i \geq \frac{1}{x}\right) \quad (\text{inverse bivariable croissante sur } \mathbb{R}^{++})$$

$$= P\left(U \geq \left(\frac{1}{x}\right)^{1/i}\right) \quad \text{fonction puissance bivariable croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$= 1 - P\left(U \leq \left(\frac{1}{x}\right)^{1/i}\right)$$

et comme U a densité et que $\left(\frac{1}{x}\right)^{1/i} \in]0, 1]^{\mathbb{R}}$ car $x \geq 1$,
donc,

$$= 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{1/i}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^{1/i}} \quad (i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } x \geq 1).$$

Donc, comme X_i et V_i ont le même support et,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

la même fonction de répartition, alors, elles suivent la même loi.

a) ~~from numpy import *~~

b) ~~import random~~

from numpy import *

import numpy.random as rd

X = random ()

i = int (input ("entrez i")) # i supérieur ou égal à 1.

V = 1 / X ** (1/i)

print (V)

PARTIE II :

Soit $p \in]0, 1[$

5)

~~5) def simul X (n, p)~~

5) from numpy import *

import numpy.random as rd

def simul X (n, p)

X = rd.binomial (n-1, p)

```
Y = X + 2  
return (Y)
```

```
6) def loi Y (n, r)  
    N = 10000  
    loi = [0] * n  
    for k in range (0, n) :  
        y = simul Y (n, r)  
        loi [k] += y  
    return loi
```

```
7) from numpy import *  
import numpy.random as rd  
def diagramme Y (n, r)  
import matplotlib.pyplot as plt  
x = np.linspace (1, n+1)  
y = loi Y (n, r)  
plt.bar (x, y)
```

8) a) La clé primaire d'une table doit permettre, que par sa connaissance, on puisse distinguer l'élément désigné des autres.

Autrement dit, si l'on connaît la clé primaire d'un objet, on sait quel est cet objet.

8) b) On peut faire un tableau :

Table n°	Exemple clé primaire
1	i - insce
2	d - nom
3	t - intitulé

Numéro d'inscription

5 0 0 6 0 2

Signature

Né(e) le

06 / 10 / 2005

Nom

N I E R A T

Prénom (s)

P A U L M A R I E

20 / 20



Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 11

Numéro de table 050

PARTIE III :

Soit $\tau \in]0, 1[$

g) D'après la question 3 (PI), $\forall x < 1, F_i(x) = 0$.
Donc il est impossible que quelqu'un gagne moins de 1000 euros par mois.
donc, $P(Z_n \leq x) = 0$ si $x < 1$.

$$10) b) \forall x \geq 1, G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1} - x^k}{1 - \frac{1}{x^k}} \binom{n-1}{k}$$

10) a) Soit $x \geq 1$. Soit $i \in [1, n]$.

D'abord, $(Z_n \leq x)$ signifie que l'individu gagne moins de $x \cdot 1000$ euros sachant qu'il est dans la catégorie i .

De plus, F_i signifie l'on a choisi au sein de la catégorie i un individu qui gagne moins de $x \cdot 1000$ euros.

11) a)

→ Suite

~~AA~~ Les phrases étant similaires, on a alors, nécessairement, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \geq 1$.

$$P_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = P(X_i \leq x) = F_i(x)$$

b) Avec le système complet d'événements

$([Y=i])_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ on applique la formule

de probabilités totales, $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} P_{[Y=k+1]}(Z_n \leq x) \cdot P(Y-1=k)$$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} F_{k+1}(x) \cdot \binom{n-2}{k} \cdot r^k \cdot (1-r)^{n-k-1}$$

Car $[Y=k+1]$ et $[Y-1=k]$ sont similaires (question 10a)

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} F_{k+1}(x) \cdot \binom{n-2}{k} \cdot r^k \cdot (1-r)^{n-1-k} \quad (x \geq 1)$$

$$(Y-1) \hookrightarrow B(n-1, r)$$

c) $\forall x \geq 1,$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(1 - \frac{1}{x^{k+2}}\right) \cdot \binom{n-2}{k} \cdot \tau^k \cdot (1-\tau)^{n-2-k}$$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \tau^k \cdot (1-\tau)^{n-2-k} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \left(\frac{\tau}{x}\right)^k$$

$(1-\tau)^{n-2-k}$. Par la formule du binôme de Newton,

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \cdot \left(\frac{\tau}{x}\right)^k (1-\tau)^{n-2-k} \right)$$

Avec un nouveau binôme de Newton,

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{\tau}{x} + (1-\tau) \right)^{n-2}$$

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\tau + x(1-\tau)}{x} \right)^{n-2}$$

$$G_n(x) = 1 - \frac{\left(\tau + (x(1-\tau)) \right)^{n-2}}{x^n}$$

11) . Premièrement, étudions la continuité de G_n .

$$G_n(1) = 1 - (1+2-n)^{n-2}$$

$$G_n(1) = 1 - 1$$

$$G_n(1) = 0.$$

de plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} G_n(x) = 0.$

Donc, G_n continue en 1.

De plus, G_n continue sur $]-\infty, 1[$ (constante) et sur $]1, +\infty[$ comme somme, composée, produit et quotient de fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Donc G_n continue sur \mathbb{R} .

De plus, $G_n \in \mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ (constante) et $G_n \in \mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ comme somme, produit, composée et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas)

Donc $G_n \in \mathcal{C}^1$ presque partout sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1.

Donc Z_n densité de probabilité.

Numéro d'inscription 5 0 0 6 8 2

Signature

Né(e) le 0 6 / 1 8 / 2 0 0 5

Nom N I E R A T

Prénom (s) P A U L M A R I E

20 / 20



Épreuve: MATHS APPLI

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 1 / 1 1

Numéro de table 0 5 0

13) a)

Si $x < 1$ alors, $G_n(x) = 0$ puisque x est à gauche du support

de plus, si $x > 1$, $G_n(x) = 1 - \frac{1}{x^n} \left(1 + (2-1)x \right)^{n-2}$

$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x^n} \cdot \left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x \right)^{n-1}$

$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \left(\dots \right)$

Admis

b) Si $x < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x) = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

