501471

CHOURAQUI

RAPHAEL

20/06/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 501971

Né(e) le 20/06/2005

Nom CHOURAQUI

Prénom (s) RAPHAEL

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliqués

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/10

Numéro de table 13

Signature

Commencez à composer dès la première page

Exercice 1 :

1) $O \times M + M \times O = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

D'où $\mathcal{E}_{O_3} = \{0\}$

+ $\mathcal{E}_{I_3} = I_3 M + M \times I_3$

$= 2M$

+ D'où $\mathcal{E}_{I_3} = \{0\}$ car $2M = 0 \Leftrightarrow M$ est la matrice nulle

2) Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

; + $\mathcal{E}_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

+ $O \in \mathcal{E}_C$ par 1)

+ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}_C \times \mathcal{E}_C$

1/40

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$$\lambda M_1 + M_2 = \lambda (C M_1 + M_1 C) + (C M_2 + M_2 C)$$

$$= C(\lambda M_1 + M_2) + (\lambda M_1 + M_2) C$$

$$= \lambda \underbrace{(C M_1 + M_1 C)}_{=0} + \underbrace{(C M_2 + M_2 C)}_{=0}$$

(car $M_1 \in E_C$ et $M_2 \in E_C$)

D'où $\lambda M_1 + M_2 \in E_C$

D'où E_C un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

3) Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

telle que $M \in E_A$.

+ ${}^t(AM) = {}^tM\,{}^tA = {}^tM\,A$ car A est symétrique.

+ ${}^t(MA) = {}^tA\,{}^tM = A\,{}^tM$ car A symétrique.

Donc, on a :

$${}^tMA + A{}^tM = 0 \iff {}^tM \in \mathcal{E}_A$$

$$\cdot\ {}^tMA = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-2d & -2a+2g & 2d-g \\ b-2e & -2b+2h & 2e-h \\ c-2f & -2c+2f & 2f-i \end{pmatrix}$$

$$+\ A\,{}^tM = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-2b & d-2e & g-2h \\ -2a+2c & -2d+2f & -2g+2i \\ 2b-c & 2e-f & 2h-i \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc, } {}^tMA + A{}^tM = \begin{pmatrix} a-2d & d-2e & g-2h \\ -2a+2c & -2d+2h & 2e-h \\ c-2f & -2c+2f & 2f-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-2b & d-e & g-2h \\ -2a+2c & -2d+2f & -2g+2i \\ 2b-c & 2e-f & 2h-i \end{pmatrix}$$

J'admets le résultat.

4) a) A est symétrique donc diagonalisable.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 2 & 18 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

$+ A^3 - 9A = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 2 & 18 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$

Numéro d'inscription 501471

Né(e) le 20/06/2005

Signature

Nom CHOURAQUI

Prénom (s) RAPHAEL

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 10

Numéro de table 13

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ valeur propre de $A \iff A - \lambda I_3$ non inversible

$\iff rg(A - \lambda I) < 3$

$$rg(A - \lambda I) = rg\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & & -1-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underset{C_2 \leftrightarrow C_1}{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & & \end{pmatrix}\right)$$

J'admets le résultat. (Il aurait fallu $A^3 - 9A = 0$)

c) On a donc :

$\lambda^3 - 9\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 9) = 0$

$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$

$Sp(A) \subset \{0, -3, 3\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

+ $X \in E_0(A) \iff AX = 0$

$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

$\underset{L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 2L_3 \\ +L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$ (par remontées successives)

Donc, $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2y = z \right\}$

~~$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$~~ $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$

+ $X \in E_3(A) \Leftrightarrow (A - 3I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = -y \\ 2z = y \\ 0 = 0 \end{cases}$$ (Remontées successives)

D'où $E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y = -2z \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

$\cancel{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$ $\quad E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

+ $X \in E_{-3}(A) \Leftrightarrow (A + 3I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4y + 4z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x = y \\ y = -z \\ 0 = 0 \end{cases}$$ (Remontées successives)

Numéro d'inscription 501471

Né(e) le 20/06/2005

Nom CHOURAQUI

Prénom (s) RAPHAEL

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appliqués

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 10

Numéro de table 13

Donc, $E_{-3}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{2} y = -\frac{1}{2} z \right\}$

$E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \vdots \end{pmatrix} \right)$

Désolé

Ainsi, on peut former $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les colonnes sont obtenues par concaténation et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propre de A où :

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

telle que

$A = P D P^{-1}$ par formule de changement de base.

D'où $D = P^{-1} A P$

5) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Donc, $P^2 = \frac{3}{2} P$

Donc, $(P - \frac{3}{2} I) P = 0$

J'ai dû me tromper, j'admets le résultat.

6) a)

$+ \; N \in E_D \iff DN + ND = 0$

$$\cancel{\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 0 & -3c \\ 3d & 0 & -3f \\ 3g & 0 & -3i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ 0 = 0 \\ 3d = 0 \\ 0 = 0 \\ -3f = 0 \\ 0 = 0 \\ 3h = 0 \\ -6i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=0 \\ f=0 \\ h=0 \\ i=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

b) Ainsi, on a :

$$E_D = \left\{ c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J_1} + e \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J_2} + g \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J_3} \;\middle|\; (c,e,g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On a donc :

$$E_D = \mathrm{Vect}\left(\left(J_1, J_2, J_3\right)\right)$$

+ La famille $B = (J_1, J_2, J_3)$ est génératrice de E_D et est libre car :

$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Numéro d'inscription 501471

Né(e) le 20/06/2006

Signature

Nom CHOURAQUI

Prénom (s) RAPHAEL

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliqués

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/10

Numéro de table 13

D'où B une base de E_D.

· Card $(B) = 3$

donc $\dim(E_D) = 3$

7)a) $M \in E_A \iff AM + MA = 0$

$(A = PDP^{-1})$

$\iff PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0$

$(M = PNP^{-1})$

$\iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0$

$\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0$

(en multipliant par P^{-1} à gauche)

$\iff DNP^{-1} + NDP^{-1} = 0$

(par P à droite)

$\iff DN + ND = 0$

$\iff N \in E_D$

13/40

D'où $M \in E_A \Leftrightarrow N \in E_D$.

b) Donc,

$E_A =$ ... $\mathrm{Vect}((PJ_1P^{-1}, PJ_2P^{-1}, PJ_3P^{-1}))$

où $\mathrm{vect}(J_1, J_2, J_3)) = B$

· Cette famille $F = (PJ_1P^{-1}, PJ_2P^{-1}, PJ_3P^{-1})$ est

génératrice de B et de cardinal $3 = \dim(E_A) = 3$

C'est donc une base de E_A.

8) $(A+M)^2 = A^2 + M^2$

$\Leftrightarrow$ $2AM = 0$ par indentitéremarquable.

il faudrait, $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $AM = 0$

9) Par théorème du rang,
$rg(\varphi(M)) = 6 - \dim \ker(\varphi(M))$.
Or, ... $) = M \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow AM + MA = 0$
Donc, par 7)b), $rg(\varphi(M)) = 6 - 3 = 3$ car $\dim E_A = 3$

Exercice 2:

1) a) $t \longmapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0;+\infty[$

par produit de telles fonctions.

Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ est impropre en

$+\infty$.

+ $\lim_{t \to +\infty} t^2 \times t^n \times e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

+ $t^n e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

+ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge par critère de

Riemann car $2 > 1$.

+ Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées

de fonctions continues et positives, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge.

1) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$

$\underline{I_0 = 1}$ (moment d'ordre 0 d'une variable à densité suivant une loi exponentielle de paramètre 1).

$I_1 = \int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\,dt$

$I_1 = \frac{1}{1} = 1$ (moment d'ordre 1 d'une variable à densité suivant une loi exponentielle de paramètre 1).

2) Soit $x \geq 0$.

$\forall t \geq 0, \quad 1 + xt \geq 1$

Donc, $\frac{1}{1+xt} \leq 1$ (par $x \mapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Donc, $\frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$ $(e^{-t} > 0)$

Numéro d'inscription 501471

Né(e) le 20/06/2005

Nom CHOURAQUi

Prénom (s) RAPHAEL

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appliqués

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/10

Numéro de table 13

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge par 1) b) (et vaut $I_0 = 1$)

Donc, par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues et positives,

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge.

3) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0\times t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = I_0 = 1$

4) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tels que $0 \leq x \leq y$.

$\forall t \geq 0, \qquad 1 + xt \leq 1 + yt$

Donc, $\quad \dfrac{1}{1+xt} \geq \dfrac{1}{1+yt}$ (par $x \mapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Donc, $\quad \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \geq \dfrac{e^{-t}}{1+yt}$

Par croissance de l'intégrale car les bornes sont rangées dans l'ordre croissant et que les intégrales convergent par 2),

$$F(x) \geq F(y)$$

On peut en déduire que la fonction F est décroissante.

5)a) Soit $x \geq 0$

1^er^ cas: $x = 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+0}\, dt = 1$$

2^e^ cas: $x > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\, dt = \left[\frac{1}{x}\ln(1+xt)\right]_0^1$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x}$$

b) Soit $x \geq 0$

$\forall t \in [0;1]$, $1 + xt \geq 1$

Donc, $0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq 1$ (par $x \mapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Donc, $0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$

Or, $\frac{e^{-t}}{1+xt} = \frac{1}{e^t(1+xt)} \leq \frac{1}{xt+1}$ car $e^t > 0$

Donc, par croissance de l'intégrale car les bornes sont rangées dans l'ordre croissant,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$$

c) Soit $x > 0$

$\forall t \geq 1, \qquad \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$; $(e^{-t} > 0)$

Donc, $\quad \frac{1}{1+xt} e^{-t} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$

Par croissance de l'intégrale car les bornes sont rangées dans l'ordre croissant et que les deux intégrales convergent par 2) et 1)a),

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

d) $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge. Donc, par relations de Chasles, on a :

Numéro d'inscription 501471

Né(e) le 20/06/2005

Nom CHOURAQUI

Prénom (s) RAPHAEL

20 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 10

Numéro de table 13

$$0 \leqslant \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt}_{= F(x)} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

(5)a))

$\times \int_0^1 \frac{1}{1+xt} = \frac{\ln(1+xt)}{x} \longrightarrow 0$ par croissances comparées

$\times \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt \longrightarrow 0$ car $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge

donc c'est un réel qui ne dépend plus de x

+ Par théorème d'encadrement,

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

6) a) $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - xt)\,dt$

(linéarité)

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1+xt} - (1-xt)\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1-(1+xt)(1-xt)}{1+xt}\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1-(1-xt+xt-x^2t^2)}{1+xt}\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{x^2t^2}{1+xt}\right)dt$$

$$= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^2}{1+xt}\,dt$$

b) Par 6)a),

$$F(x) - I_0 + x I_1 = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$$

Puisque $\forall t \geq 0$, $0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq 1$ car $x \geq 0$

Alors, $0 \leq x^2 \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq x^2 t^2 e^{-t}$

Par croissance de l'intégrale car les bornes sont rangées dans l'ordre croissant et que les intégrales convergent,

$$0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

i.e, $\underline{0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2}$

7)a) + $\lim_{x \to 0} x^2 I_2 = 0$ car I_2 est un réel (l'intégrale converge par 1a))

+ Par théorème d'encadrement,

$\lim_{x \to 0} F(x) - I_0 + x I_1 = 0$

Donc, $\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} I_0 \cdot x I_1$

$I_0 = 1$ et $I_1 = 1$

D'où $F(\ )$ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 qui est

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$$

b) Par 6)b),

$$0 \leq \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - I_0 + x I_1}{x - 0} \leq \lim_{x \to 0} x I_2$$

i.e $0 \leq \lim_{x \to 0} \frac{-x + x I_1}{x \to 0} \leq \lim_{x \to 0} x I_2$

Par théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - I_0 + x I_1}{x - 0} = 0$$

Par définition du taux d'accroissement,

F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$

Numéro d'inscription 5 0 1 4 7 1

Né(e) le 2 0 / 0 6 / 2 0 0 5

Nom C H O U R A Q U I

Prénom (s) R A P H A E L

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliqués

Sujet 1 ou 2 *(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)*

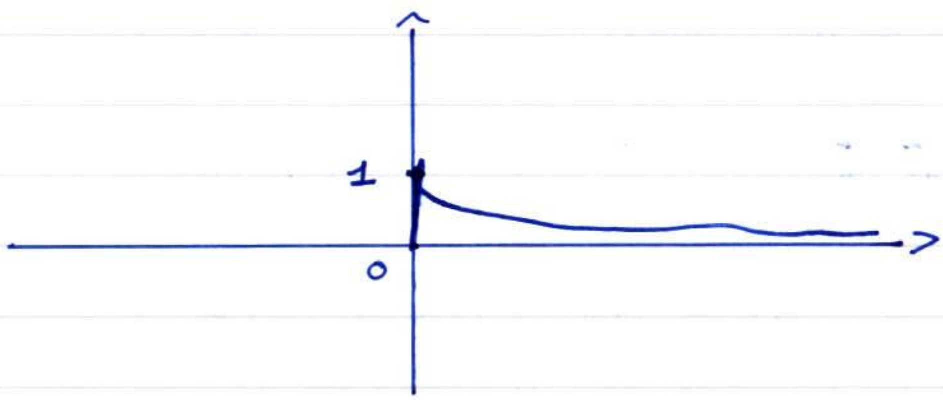
Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 7 / 1 0

Numéro de table 1 3

Commencez à composer dès la première page.

8)



25/40

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Exercice 3 :

Partie 1 :

* Sur $]-\infty, 1[$, f_i est positive et continue car constante égale à 0

+ Sur $]1, +\infty[$, f_i est positive

+ Sur $]1, +\infty[$, f_i est continue

+ Donc, · f_i positive sur $\mathbb{R}$

  · f_i continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 et 1

+ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} i\, t^{-(i+1)}\,dt$ car f_i nulle en dehors de $[1 ; +\infty[$

Soit $A \geq 1$.

$i\int_1^A t^{-(i+1)}dt = i\left[-\frac{t^{-i}}{i}\right]_1^A$

$= 1 - \frac{1}{A^i} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} f_i(t)dt$ converge et vaut 1.

D'où f_i une densité de probabilité.

2)a) X_i admet une espérance $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} i\, t^{-i} dt$ converge absolument, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.

· $\int_1^{+\infty} \frac{i}{t^i} dt$ converge $\Leftrightarrow i > 1$ par critère de Riemann.

D'où X_i admet une espérance $\Leftrightarrow i > 1$, i.e $i \in [\![2, n]\!]$

Soit $A \geq 1$. Soit $i \in [\![2, n]\!]$.

$i\int_1^A t^{-i} dt = i\left[\frac{t^{-i+1}}{-(i-1)}\right]_1^A$

$= \frac{i}{i-1} - \frac{i}{(i-1)A^{(i-1)}}$

$\times \lim\limits_{A \to +\infty} -\frac{1}{(i-1)A^{i-1}} = 0$ car $i > 1$

Donc, $E(X_i)$ existe et :

$$\boxed{E(X_i) = \frac{i}{i-1}}$$

b)

3) Soit $i \in [\![1, n]\!]$
Soit $x \in \mathbb{R}$

<u>1er cas :</u> $x < 1$

$F(x) = 0$

<u>2e cas :</u> $x \geq 1$

$$F_i(x) = \int_1^x i\, t^{-(i+1)} dt$$

$$= i \left[-\frac{t^{-i}}{i} \right]_1^x$$

$$= 1 - x^{-i}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^i}$$

Numéro d'inscription 501471

Né(e) le 20/06/2005

Nom CHOURAQUI

Prénom (s) RAPHAEL

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/10

Numéro de table 13

Commencez à composer dès la première page

D'où $F_i : x \longmapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} \text{ si } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } x < 1 \end{cases}$

4) a) $V_i(\Omega) = \left(\frac{1}{U^{\frac{1}{i}}}\right)(\Omega) = [1, +\infty[= X_i(\Omega)$

+ Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas: $x < 1$

$F_{V_i}(x) = 0$

2e cas: $x \geq 1$

$\mathbb{P}([V_i \leq x]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{U^{\frac{1}{i}}} \leq x\right]\right)$

$= \mathbb{P}([1 \leq x \, U^{\frac{1}{i}}])$

29/40

20 / 20

$= \mathbb{P}([\frac{1}{x} \leq U^{\frac{1}{i}}])$

$= 1 - \mathbb{P}([U^{\frac{1}{i}} < \frac{1}{x}])$

$= 1 - \mathbb{P}([U^{\frac{i}{i}} < \frac{1}{x^i}])$ (par $x \mapsto x^i$ strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$= 1 - \mathbb{P}([U < \frac{1}{x^i}])$

$= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right)$ où $F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

$= 1 - \frac{1}{x^i}$ car $\frac{1}{x^i} \in]0;1[$

D'où $F_{V_i} : x \longmapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} \text{ si } x \in [1,+\infty[\\ 0 \text{ si } x < 1 \end{cases}$

$F_{V_i}(x) = F_i(x)$ donc X_i et V_i suivent la même loi car c'est la fonction de répartition qui caractérise la loi.

```
import numpy.random as rd
```

b)
```
def simulX(i):
    U = rd.uniform(0, 1)
    V = 1/(U ** 1/i)
    return V        # V et X suivent la même loi
```

Partie II :

5)
```
def simulY(n, p):
    Y1 = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < p:
            Y1 = Y + 1
    return Y1 + 1    # Y1 joue le rôle de Y - 1 ↪ B(n,p)
```

6)
```
def loiY(n, p):
    N = 10000
    loi = [0]*n
    for k in range(1, n+1):
        y = simulY(n, p)
        loi = y[k]/N
```

~~7) def grapheY(n,p) :~~
```
~~abs = [ np.linspace (0, n , 1000)]~~
~~ord = [ loiY(n,p)]~~
~~plt.plot(abs,ord)~~
~~plt.hist()~~
~~plt.grid()~~
```

7) def graphY(n,p):
```
    abs = np.linspace(0, n) :
    ord = [loiY(n,p)]
    plt.bar(abs, ord)
    plt.show()
```

---

8) a) La clef primaire d'une table dans une base de donnée doit être unique dans la table et permettre d'identifier un attribut de manière unique dans celle-ci.

b) + i - prenom

+ d - population

+ p - pcs

Numéro d'inscription 5 0 1 4 7 1

Né(e) le 20 / 06 / 2005

Signature

Nom CHOURAQUi

Prénom (s) RAPHAEL

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliqués

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 10

Numéro de table 13

Commencez à composer dès la première page

c)

individu

département

profession

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

d) SELECT DISTINCT p-pcs '
FROM profession INNER JOIN departement
ON profession. p-pcs = departement . d-nom
WHERE departement.d-nom = ` Eure - et - Loir -

e) SELECT p-categorie, i-insee
FROM profession INNER JOIN individu
ON profession. p-pcs = individu . i-code-profession

Partie III :

9) Soit $x < 1$

$G_n(x) = \mathbb{P}(\{Z_n \leq x\})$

$= \mathbb{P}(\{\cancel{X}_i \leq x\})$.

$= 0$ par la partie 1).

10) a) La probabilité que le revenu mensuel d'un individu pris au hasard dans une CSP . . . . soit inférieur ou égal à $x \geq 1$, en sachant que cette CSP est la CSP "i" revient à étudier la probabilité "d'un individu choisi au hasard au sein de la CSP i gagne moins de x € (en milliers). C'est exactement la définition de $\mathbb{P}([X_i \leq x])$

D'où $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z_n \leq x]) = F_i(x)$

b) En considérant le système complet d'événements $([Y-1=k])_{k \in Y(\Omega) = [\![0,n]\!]}$, par formule des probabilités totales,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y-1=k] \cap [Z_n \leq x]) \quad , (\mathbb{P}([Y_n = k]) \neq 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[Y-1=k]}([Z_n \leq x]) \times \mathbb{P}([Y-1=k])$$

+ $Y-1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p)$

$\times\ \mathbb{P}_{[Y-1=i]}([Z_n \le x]) = F_{i+1}(x)$ par 1D)a).

D'où

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \times \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}$$

c)

Donc, par 1D)b),

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) p^k (1-p)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(p^k - \left(\frac{p}{x}\right)^k\right)(1-p)^{n-k-1}$$

(linéarité)

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}\right) - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{x}\right)^k (1-p)^{n-k-1}$$

$$= (p+1-p)^{n-1} - \frac{1}{x}\left(\frac{p}{x} + 1 - p\right)^{n-1}$$

par formule du Binôme de Newton.

Ainsi,

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{(p + x(1-p))^{n-1}}{x^{n-1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}$$

Numéro d'inscription 501471

Né(e) le 20/06/2005

Nom CHOURAQUI

Prénom (s) RAPHAEL

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliqués

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 10

Numéro de table 13

11) $x \longmapsto \dfrac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}$ est C^1 sur $[1,+\infty[$

sauf peut-être en un nombre fini de points et est

continue sur $[1,+\infty[$

Par somme, G_n est continue sur $[1,+\infty[$ et C^1 sur cet

intervalle sauf peut-être en un nombre fini de

points (comme 1)

· Sur $]-\infty, 1[$, G_n C^1 car constante.

+ D'où G_n continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.

D'où Z_n une variable à densité.

39/40

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

1 2) def sondage (n, p) :
    Y = simulY (n, p)
    X = simulX (Y+1)
    ~~Z~~ = X
    return Z

---

1 3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

1er cas: $x < 1$

$G_n(x) = 0$ par 9)

2e cas: $x \geq 1$

Ici, $p = \frac{1}{n}$. Donc, par 10) c),

$$G_n(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n}$$

$$= 1 - \frac{\frac{(1 + xn - x)^{n-1}}{n^{n-1}}}{x^n}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^n} \frac{(1 + xn - x)}{n^{n-1}}$$

Or, $1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$

$$= 1 - \frac{1}{x}\frac{(nx - x + 1)^{n-1}}{(nx)^{n-1}}$$

$$= 1 - \frac{(nx - x + 1)^{n-1}}{n^{n-1} x^{n}}$$

CQFD

D'où $G_n : x \longmapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

f) Soit $x \in \mathbb{R}$

1er cas: $x < 1$

$$G_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2e cas: $x \geq 1$

$+ \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)}$

$+ (n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{x-1}{x}$

· Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) = -\frac{x-1}{x}$

Par continuité de $x \mapsto e^x$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = e^{-\frac{x-1}{x}}$$

Donc, par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{x-1}{x}}}{x}$$

$(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers W, où

$$F_W : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{e^{-\left(\frac{x-1}{x}\right)}}{x} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$
