502336

BENJELLOUN-TOUIMI

LÉO

03/08/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 502336

Né(e) le 03/08/2004

Nom BENJELLOUL-TOUIMI

Prénom (s) LÉO-

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/10

Numéro de table 011

Commencez à composer dès la première page

Exercice 2

Partie 1 1) 1a) $(I_3, M, \dots, M^9)$

Est une famille à 10 éléments dans $M_3(\mathbb{R})$, or $\dim M_3(\mathbb{R}) = 9$.

Donc $(I_3, M, \dots, M^9)$ est liée.

b) $(I_3, M, \dots, M^9)$ liée

$\Rightarrow \exists i \in [\![0,9]\!] \mid M^i = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{9} \alpha_j M^j$
(α_j non tous nuls)

ie $M^i - \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{9} \alpha_j M^j = 0$

ie M admet un polynôme annulateur, dont le coefficient de plus haut degré est au plus α_9

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Donc M admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 9

(Sinon on aurait conclu que $(I_3, \ldots, M^9)$ est libre).

2)

a)
```
Def PolyAnn(M):
    ~~m = np.size(M)~~
    M2 = np.dot(M.M)
    M3 = np.dot(M2.M)
    If: M3-4*M2-12*M-28np.eye(3)
        == 0
        return true
    else:
        return false
```

b)

~~On admet que M est inversible~~

$MX=0 \iff \begin{cases} 3y+2z=0 \\ 2x+2y+4z=0 \\ 5x+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{2}y = z \\ -\frac{5}{2}x=z \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\boxed{\text{M inversible}}$

3a] Soit λ une valeur propre de M

On sait que $Sp(M) \subset \{$racines de $\varphi\}$

(Par le cours)

Or $\lambda \in Sp(M)$, donc $\varphi(\lambda) = 0$.

Ainsi, $\lambda \in Sp(M) \Rightarrow \varphi(\lambda) = 0$.

b] φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car polynômiale

$\forall x \in \mathbb{R}$,

On admet que φ admet au plus une valeur propre réelle

/

c] M a au plus une valeur propre, elle est donc diagonalisable si et seulement si elle est de la forme λI_3.

Or $M \neq \lambda I_3$.

Donc M n'est pas diagonalisable

Partie 2

4) $^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM = S$

$^tS = S$

$\boxed{\text{Donc } S \text{ est symétrique}}$

5) M est inversible

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $\cancel{{}^tX\,{}^tMMX}$ ^tXSX

(La forme quadratique de S)

$^tXSX = {}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)MX$

$= \|MX\|^2 \geq 0.$

Or $\|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$
(caractère défini du scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

Or $MX = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

Car M inversible.

Donc $\|MX\|^2 = q_S(X) = 0$ seulement si $X = 0$

Donc $q_S(X) > 0$ $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / \{0\}$

Numéro d'inscription S02336

Né(e) le 03 / 08 / 2001

Signature B

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LÉO

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 10

Numéro de table 011

Donc $Sp(S)$ ~~...~~ $\subset \mathbb{R}_+^*$

Par le cours sur les formes quadratiques.

6] S est symétrique donc orthodiagonalisable.

Donc $\exists P \in O_3(\mathbb{R})$, $D \in D_3(\mathbb{R})$

$| \ S = PD{}^tP$

7] a] Un exemple $\begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & 4 & \\ (0) & & 7 \end{bmatrix}^2 = D$

Mais $\begin{bmatrix} -1 & & (0) \\ & 4 & \\ (0) & & 7 \end{bmatrix}^2 = D$

il y a (2^3 matrices Δ
ie 8.

(C'est un dénombrement : 2 nombres au hasard

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$(-1,1)$, $(-4,4)$, $(-7,7)$ pour former en triplet).

b) 0 n'est pas valeur propre de Δ, ses valeurs propres sont $(-1,1,-4,4,-7,7)$
(On lit les valeurs propres de $\Delta \in D_3(\mathbb{R})$ sur la diagonale
donc $\dim \operatorname{Ker}(\Delta) = 0_E$

$\boxed{\text{Donc } \Delta \text{ est inversible}}$

8) ~~Alors~~ Nous allons exhiber une telle matrice.

Prenons $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & 4 & \\ (0) & & 7 \end{bmatrix}$

On remarque que $\sqrt{D} \in S_3(\mathbb{R})$

et $R = (P\sqrt{D}\,{}^tP)$ aussi.

Or $(P\sqrt{D}\,{}^tP P\sqrt{D}\,{}^tP) = R^2$
$= P\sqrt{D}\sqrt{D}\,{}^tP = PD\,{}^tP = S.$

$\boxed{\text{avec } R = (P\sqrt{D}\,{}^tP) \quad R^2 = S}$

On peut même exhiber R^{-1}.

Prenons $\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & 1/4 & \\ (0) & & 1/7 \end{bmatrix}$ (NB avec n'importe quelle Δ^{-1}, ça marche)

$$(P\Delta^{-1}\,{}^tP)R = P N\,{}^tPP\sqrt{D}\,{}^tP$$
$$= P N \sqrt{D}\,{}^tP$$

Or $\Delta^{-1}\sqrt{D} = I_3$ (Par construction)

Donc $(P\Delta^{-1}\,{}^tP)R = I_3$

Donc $R^{-1} = P\Delta^{-1}\,{}^tP$ avec $\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & 1/4 & \\ (0) & & 1/7 \end{bmatrix}$

10)

$U = MR^{-1}$ $\quad {}^tUU = {}^t(R^{-1})\,{}^tMMR^{-1}$

~~(NB, il est plus judicieux de calculer U^tU ici)~~

$\cancel{U^tU = MR^{-1}\,{}^t(R^{-1})\,{}^tM}$

$${}^tUU = {}^t(R^{-1})\,S\,R^{-1}$$

$$= {}^t(R^{-1})\,PD\,{}^tPP\,\Delta^{-1}\,{}^tP$$

$$= R^{-1}PD\Delta^{-1}\,{}^tP \quad ({}^tR^{-1} = R^{-1} \text{ ici})$$
$$= P\Delta^{-1}D\Delta^{-1}\,{}^tP$$

Or $\Delta^{-1}D\Delta^{-1} = I_3$

$= I_3$

$^tUU = I_3$ Donc $U \in O_3(\mathbb{R})$

Partie 3 11)

$R = P\Delta {}^tP$ Or ici on a choisi (dans la partie 3)

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & 4 & \\ (0) & & 7 \end{bmatrix}$$

Donc ${}^tPRP = \Delta$

R ~~Δ~~ est semblable à $\begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & 4 & \\ (0) & & 7 \end{bmatrix}$

Donc elle est diagonalisable, et

$Sp(R) = \{1, 4, 7\}$

$$\boxed{Sp(R) \subset \mathbb{R}_+^*}$$

12) /

$N^2 = {}^tP T^2 P = {}^tPSP = D$. $N^2 = D$

13) $T^2 = S$ Donc $S \times T = T^2 \times T = T^3$

$T \times S = T \times T^2 = T^3$

Numéro d'inscription 50236

Né(e) le 03/08/2004

Signature

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LEO

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appro

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/10

Numéro de table 011

Commencez à composer dès la première page

$TS = ST$ Donc S et T commutent.

14)

a) $PE_i \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} P_{1,i} \\ P_{2,i} \\ P_{3,i} \end{bmatrix}$

$(P_{i,j})$ le coefficient de la ième ligne, j eme colonne de P.

Or $\begin{bmatrix} P_{1,i} \\ P_{2,i} \\ P_{3,i} \end{bmatrix} = C_i$

Donc $\forall i \in [\![1,3]\!],\ PE_i = C_i$

b) $SC_i = PD^tPPE_i = PDE_i$ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ (0) & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$

$= P\lambda_iE_i = \lambda_i PE_i = \lambda_i C_i$

$\boxed{SC_i = \lambda_i C_i \text{ Donc } C_i \in E_{\lambda_i}(S)\ C_i \neq 0}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

c] $STC_i = TSC_i = T\lambda_i C_i$
$= \lambda_i TC_i$

$S(TC_i) = \lambda_i (TC_i)$

Donc $TC_i \in E_{\lambda_i}(S)$

d] TC_i et C_i appartiennent à $E_{\lambda_i}(S)$

Or, on a vu dans la partie 2 que S a 3 valeurs propres distinctes dans $M_3(\mathbb{R})$. Donc chaque sous espace est de dimension 1.

- Donc deux éléments du même sous espace sont colinéaires

Donc en particulier, TC_i et C_i sont colinéaires.

15] $N = {}^tPTP$ Or $P = [C_1|C_2|C_3]$

$${}^tPTP = \begin{bmatrix} C_1 \\ \hline C_2 \\ \hline C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TC_1 \\ TC_2 \\ TC_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 C_1 \\ \alpha_2 C_2 \\ \alpha_3 C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 C_1^2 + 0 + 0 & & \\ & \alpha_2 C_2^2 & \\ & & \alpha_3 C_3^2 \end{bmatrix}$$

($C_i \times C_j$) $= 0$ car P est orthogonale
$C_i \times C_i = {}^t E_i$ Pour les mêmes raisons

Donc ${}^t P D T P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \alpha_2 & \\ (0) & & \alpha_3 \end{bmatrix}$. Donc $N \in D_3(\mathbb{R})$

16) N est diagonale et ses coefficients sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

α_i tel que $T C_i = \alpha_i C_i$

et $N^2 = D$ donc, il faut juste affirmer que chaque coefficient de N est positif pour conclure

(car la matrice diagonale positive telle que $\Delta^2 = D$ est unique.)

Supposons $\Delta = N$ $\quad T = P N {}^t P$
ie $T = P \Delta {}^t P$

or $P \Delta {}^t P = R$

Donc $T = R$

17] $M = VR$ et $UR = M$

$U = MR^{-1}$

$V = MR^{-1}$ aussi.

$$\boxed{\text{Donc } V = U}$$

Problème

Partie 1

1] a] $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$

$\lim_{t \to 0} (1-t)^{y-1} = 1$

Donc $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$

b] $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

Est impropre en 0 seulement si $x < 1$.

Donc a priori, $\forall x \geq 1$, l'intégrale converge.

Si $x < 1$

On sait que $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$

Or $\int_0^{1/2} t^{x-1}\,dt$ converge $\iff |x-1| < 1$ (Riemann) $\iff x > 0$

Par équivalent de fonctions positives

Numéro d'inscription 502336

Né(e) le 03/08/2004

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LEO

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/10

Numéro de table 011

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ converge} \iff x>0.$$

c) Posons $s = 1-t$ (changement de variable C^1, bijectif strictement décroissant donc licite)

$ds = -dt$

$t = 1/2 \iff s = \frac{1}{2}$

$t = 1 \iff s = 0$

Par théorème de changement de variable sur une intégrale impropre

$\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ et $-\int_{1/2}^{0} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds$ sont de même nature.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

ie $\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ et $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds$

Sont de même nature.

d] Or, on sait par la question 1b]

que $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds$ converge

$\iff y>0$.

Finalement :

$$\boxed{\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ converge} \iff \begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \end{array}}$$

(Par Chasles), et par théorème de changement de variable.

(Plus précisément :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad \text{(Chasles)}$$

Il faut que les deux intégrales convergent

ie $x>0$ et $y>0$.

2] $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

posons $u = 1-t$
(changement licite, on l'a expliqué plus haut. il vient

$$B(x,y) = -\int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1}\,du$$

$$= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,du = B(y,x)$$

Par changement de variable;

$$\boxed{B(x,y) = B(y,x)}$$

3] $\forall x>0,\ B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,dt$

$$= \left[\frac{1}{x} t^x\right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{B(x,1) = \frac{1}{x} \quad \forall x>0.}$$

4] a] $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$B(x+1, y) + B(x, y+1)$

$=$ (Par Chasles)

$\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y \, dt$

$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t + (1-t))\, dt$

$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = B(x,y)$

$$\boxed{\text{Donc } B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)}$$

b] $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $x B(x,y+1) = x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt$

(On peut faire une intégration par partie car l'intégrale converge sur le fermé d'intégration).

On pose $v'(t) = x t^{x-1}$, $v(t) = t^x$ C^1

(toutes les fonctions sont C^1)

$u(t) = (1-t)^y$ $u'(t) = -y(1-t)^{y-1}$

$x B(x, y+1) = 0 - (-1)y\int_0^1 (1-t)^{y-1} t^x dt$

$= y\int_0^1 (1-t)^{y-1} t^x dt = y B(x+1, y)$

Numéro d'inscription 502336

Né(e) le 03/08/2004

Signature

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LEO

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 10

Numéro de table 011

$$\boxed{\text{Donc } \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 ; \quad x B(x, y+1) = y B(x+1, y)}$$

c) $y B(x+1, y) = x B(x, y+1)$

$= x \big(B(x,y) - B(x+1, y) \big)$ Par 4a)

Donc $x B(x,y) = x B(x+1, y) + y B(x+1, y)$

$$\boxed{\text{Donc } B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)}$$

5) Raisonnons par récurrence :
Soit P la propriété : ~~$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$~~

$B(p,q) = \frac{(p-1)(q-1)!}{(p+q-1)!}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Montrons qu'elle est vraie $\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$

Initialisation : Montrons que

$$B(p,1) = \frac{(p-1)!}{p!} = \frac{1}{p}$$

Or $\forall x > 0$, $B(x,1) = \frac{1}{x}$

Donc $B(p,1) = \frac{1}{p}$

Initialisation terminée.

Hérédité : On suppose qu'au rang q fixé, on a : P vérifiée

ie $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$

Montrons que $B(p,q+1) = \dfrac{(p-1)!\,q!}{(p+q)!}$

Or, $B(p,q+1) =$

NB : J'ai fait une erreur, tout faire ~~et~~ en faisant varier p était plus simple.

On admet que l'initialisation sera similaire car $B(x,y) = B(y,x)$

. On veut donc $B(p+1,q)$

$$= \frac{p!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

Or $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$

Et, par 4c)

$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\,\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

Donc $B(p+1,q) = \dfrac{p!\,(q-1)!}{(p+q)!}$

Hérédité terminée.

En faisant le raisonnement analogue sur ~~q~~ il vient :

$$\boxed{\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ B(p,q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}}$$

Partie 2

6) a) Raisonnons par récurrence descendante
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$.
On conjecture $\Gamma(n+1) = n!$

(NB, par le cours, on sait que c'est vrai)

Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

Initialisation : ~~$\Gamma(n+1)$~~ $\Gamma(1) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t}dt$

$= \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-A} = 1$.

$\Gamma(1) = 1 = 0!$

Initialisation terminée.

Hérédité : On suppose $\Gamma(n) = (n-1)!$

Montrons $\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$

Donc, par principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!}$$

Numéro d'inscription 502336

Né(e) le 03/08/2004

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LEO

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 10

Numéro de table 017

Signature

Commencez à composer dès la première page.

6) b) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$

Posons $u = \sqrt{2t}$ C^1 bijectif sur $]0, +\infty[$.
$du = \frac{1}{\sqrt{2t}} dt$
Donc licite.
Les bornes ne changent pas.

$\int_{\mathbb{R}^+} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{2} du$

$= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

par parité de $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$.

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$

Donc $\underline{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

7] a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^+} f_{a,b}(t)\,dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^+} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$

$\displaystyle = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^+} t^{a-1} e^{-bt}\,dt.$

On peut poser $x = bt$, $dx = b\,dt$ (affine donc licite)

~~Sous les~~ Par théorème de changement de variable;

$\displaystyle \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^+} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$ et $\displaystyle \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-x} \frac{dx}{b}$

sont de même nature.

Or, l'intégrale de droite n'est autre que

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \Gamma(a) = 1.$$

Donc, par théorème de changement de variable,

$\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}(t)\,dt$ converge et vaut 1

(ça nous servira en 7b)

b] On a vu que $\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}(t)\,dt = 1$.

- $f_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$
- elle est positive
- C^0 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0

  ($t \mapsto \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$)

$\boxed{\text{Donc } f_{a,b} \text{ est une densité.}}$

8a] $f_{a,1}(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t}$ $\forall t > 0$, 0 sinon

(car la densité caractérise la loi)

$\hookrightarrow X \hookrightarrow \gamma(a)$, $E(X) = V(X) = a$.

b] $f_{1,b}(t) = b e^{-bt}$ $\forall t > 0$, 0 sinon

$X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$; $E(X) = \frac{1}{b}$

$V(X)$ existe $\Longleftrightarrow$ $E(X^2)$ existe

$E(X^2)$ existe $\Longleftrightarrow$ $b\int_{\mathbb{R}^+} t^2 e^{-bt}\,dt$ converge absolument (ce qui équivaut à converger ici)

$$b\int_{\mathbb{R}^+} t^2 e^{-bt}\,dt =$$

Réalisons d'abord une intégration par partie sur un segment.

$u(t) = t^2$ C^1 $v'(t) = be^{-bt}$

$u'(t) = 2t$ C^1 $v(t) = -e^{-bt}$

$$\int_0^A bt^2 e^{-bt}\,dt = [-t^2 e^{-bt}]_0^A + \int_0^A 2te^{-bt}\,dt$$

$$= \lim_{A\to+\infty} [-t^2e^{-bt}]_0^A + 2\int_0^A t e^{-bt}\,dt$$

$= 0 + \frac{2}{b}E(X)$ Par croissances comparées

$= \frac{2}{b^2}$ Donc $E(X^2)$ existe et vaut $\frac{2}{b^2}$

Par Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$= \frac{1}{b^2}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{b^2}}$$

Numéro d'inscription 502336

Né(e) le 03 / 08 / 2004

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LÉO

20 / 20

Signature

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 10

Numéro de table 011

5)

a) bX est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{P}(bX \leq x) = 0$

$\forall x \geq 0$, $\mathbb{P}(bX \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \frac{x}{b})$

- On ne connait pas la fonction de répartition, utilisons le cours sur les transformations affines qui nous dit que

$$f_{bX}(t) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{x}{b}\right) \quad (b > 0)$$

$$f_{bX}(t) = \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \frac{t^{a-1}}{b^{a-1}} e^{-t} = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} \quad \forall t \geq 0$$

0 sinon

$f_{bX} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} \text{ sinon} \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

On trouve encore $X \hookrightarrow \mathcal{V}(a)$

$\mathbb{E}(X) = V(X) = a$) (étonnant vu la question...)

(Par le cours)

10) a) On peut appliquer le produit de convolution pour calculer la densité de X_1+X_2 car elles sont indépendantes

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t)\, f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(x-t)\,dt$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t) \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} t \geq 0 \\ x-t \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t \geq 0 \\ x \geq t \end{cases}$$

ie $t \in [0, x]$

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_0^x f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(x-t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1} e^{-bt} e^{-b(x-t)}\,dt$$

$$= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^x t^{a_1-1}(x-t)^{a_2-1} e^{-bx}\, dt$$

$$= \frac{e^{-bx}\, b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^x t^{a_1-1}(x-t)^{a_2-1}\, dt$$

Posons $u = \frac{t}{x}$ $du = \frac{dt}{x}$

si $t=0$, $u=0$

si $t=x$, $u=1$

Ce changement de variable liaite car affine entre deux intégrales convergentes (convolution de densité convergente) donne

$$\beta_{X_1+X_2}(x) = \int_0^1 \frac{e^{-bx}\, b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} (xu)^{a_1-1} (x(1-u))^{a_2-1} x\, du$$

Pour $x > 0$

$$= \frac{B(a_1, a_2)\, b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx}$$

$$\beta_{X_1+X_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{b^{a_1+a_2} B(a_1,a_2)\, t^{a_1+a_2-1} e^{-bt}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

b) ~~On a donc $B(x,y) b^{a_1+a_2}$~~

Donc, par passage à l'intégrale :

$$1 = \int_0^{+\infty} \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} B(a_1,a_2) x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx$$

ie $$\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{B(a_1,a_2)} = b^{a_1+a_2} \int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx$$

Or, par changement ~~d'indice~~ de variable $t = bx$ (déjà fait), il vient

$$\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{B(a_1,a_2)} = \Gamma(a_1+a_2)$$

ie $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

c) $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$

Numéro d'inscription 562336

Né(e) le 03/08/2007

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LEO

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appro

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/10

Numéro de table 011

Commencez à composer dès la première page

Partie 3

11) a) Par théorème de transfert,

$U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance $\Longleftrightarrow$

$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ converge.

- Ce n'est ~~n~~ autre que $B(x,y)$

Donc $E(U^{x-1}(1-U)^{y-1})$ existe, et vaut $B(x,y)$

b)
```
Def Simul(x,y)
  U= rd.random()
  return ( (U**(x-1))(1-U)**(y-1)
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

c) Par le lemme des coalitions, les $U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1}$ sont indépendantes

Donc, par la loi faible des grands nombres

$$R_n \xrightarrow{P} E\left(U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1}\right)$$

$$\boxed{\text{ie } R_n \xrightarrow{P} B(x,y)}$$

d)

```
Def Rn(x,y)
    X = [0 for k in range n]
    for j in range n:
        X(j) = Simul(x,y)
    return(np.sum(X)/n)
```

e) $R_n \xrightarrow{P} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ici. Or

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$$

On retrouve bien ici le résultat

~~B(π~~ $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

12] a] Par théorème de transfert,

$E(X^{a-1})$ existe $\Leftrightarrow$

$\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ converge

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \Gamma(a) \beta_{a,1}(x) dx$ converge

Plus simplement $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \Gamma(a)$

Donc $E(X^{a-1})$ converge et vaut

$(a-1)!$

$V(X^{a-1})$ existe $\Leftrightarrow E(X^{2(a-1)})$ existe

$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^+} x^{2(a-1)} e^{-x} dx$ converge

$\Leftrightarrow \Gamma(2(a-1))$ converge.

Donc $E(X^{2(a-1)})$ existe et vaut $(2a-3)!$

$V(X^{a-1}) = \cancel{(a-1)!}\ (2a-3)! - ((a-1)!)^2$

b)

Par linéarité de l'espérance,

$\mathbb{E}(M_n) = \frac{n}{n} \cdot \mathbb{E}(X^{a-1}) = \Gamma(a)$.

Donc M_n est un estimateur ($\Gamma(a)$ n'apparait pas dans M_n) sans biais de $\Gamma(a)$

~~c)~~

Par la loi faible des grands nombres :

$M_n \xrightarrow{P} \Gamma(a)$

~~(Tout mieux car~~

Donc M_n est un estimateur convergent de $\Gamma(a)$.

c) Il s'agit d'une simulation ~~d'une~~ de n lois exponentielle de paramètre 1.

En effet si on prend $U \hookrightarrow U(0,1)$

$-\ln(1-U)$ suit une loi exponentielle

Numéro d'inscription 502336

Né(e) le 03/08/2004

Signature B

Nom BENSELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LEO

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appro

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/16

Numéro de table 011

En effet $-\ln(1-U)$ est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \leq 0 \quad \mathbb{P}(-\ln(1-U) \leq x) = 0$

$\forall x > 0, \mathbb{P}(-\ln(1-U) \leq x) =$

$\mathbb{P}(\ln(1-U) \geq -x) = \mathbb{P}((1-U) \geq e^{-x})$

Par croissance de l'exponentielle

$= \mathbb{P}(U \leq 1-e^{-x})$

Or $1-e^{-x} \in (0,1)$

Donc $\mathbb{P}(U \leq 1-e^{-x}) = 1-e^{-x}$

Donc la fonction de répartition de $-\ln(1-U)$ est $\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1-e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Or la fonction de répartition caractérise la loi.

Myst(n) simule n lois exponentielles de paramètre 1.

d]
```
def Approx(n,a)
    X= Myst(n)
    for k in range(n)
        X(k) = (X[k]))**(a-1)
    return(np.sum(X)/n)
```

Exercice 1

1]a Par Riemann $2>1$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc converge.

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ converge.}}$$

c) $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$

Or $\displaystyle\sum_{\geq 1} \frac{1}{4n^2}$ converge (Riemann $\alpha \geq 1$)

Donc par comparaison de termes généraux positifs :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ converge.}$$

et $\dfrac{1}{1} = 1$ $\left(\dfrac{1}{(2\times 0+1)^2}\right.$

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ converge.}}$$

2) $A-B = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{2}{1} + 0 + \frac{2}{9} \ldots + \frac{2}{n^2}$

$$\boxed{A-B = 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

$$C + \frac{A}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + 1$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + 1$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{(2n+1)^2 + (2n)^2}{(2n)^2(2n+1)^2} + 1 \quad ?$$

4]

a] $\forall t \in [a,b]$ f est C^0.

Donc elle admet un maximum.
et un minimum, ce qui assure que
$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M.}$

f est C^1 donc f' est C^0 sur $[a,b]$

$\boxed{\text{Donc } \exists M \in \mathbb{R} \mid |f'(t)| \leq M}$

b] $|f'(t) \sin(\lambda t)| \leq M$

Or $\int_a^b M \, dt = M(b-a)$

et $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{M(b-a)}{\lambda} = 0.$

Or ~~Donc~~ $0 \leq \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t) \sin(t\lambda)| dt$

Numéro d'inscription 502336

Né(e) le 03/08/2004

Nom BENJELLOUN-TOUIMI

Prénom (s) LEO

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 10

Numéro de table 011

Donc par encadrement,

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

Ce qui assure que :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0.}$$

c) ~~Posons~~ $\cancel{u(t)=f(t)\,,\ u'(t)=f'(t)}$

~~u et v sont~~ $\cancel{C^1}$ ~~sur~~ $\cancel{[a,b]}$. $\cancel{v'(t)=\sin(\lambda t)}$

$\cancel{v(t) = -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)}$

~~Il vient :~~ $\cancel{\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt}$

$\cancel{= \left[-f(t)\cos(\lambda t)\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

C^1 $u(t) = \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$, $v'(t) = \beta'(t)$

$u'(t) = \cos(\lambda t)$ $\quad v(t) = \beta(t)$ (C^1 sur $[a,b]$)

Donc $\frac{1}{\lambda}\int_a^b \beta'(t)\sin(\lambda t)\,dt =$

$\left[\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\beta(t)\right]_a^b - \int_a^b \cos(\lambda t)\beta(t)\,dt$

$= \frac{\sin(\lambda b)}{\lambda}\beta(b) - \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}\beta(a) - \int_a^b \cos(\lambda t)\beta(t)\,dt$

On passe à la limite, il vient

$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\int_a^b \beta'(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0 - \int_a^b \cos(\lambda t)\beta(t)\,dt = 0$

$$\boxed{\text{ie, } \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \cos(\lambda t)\beta(t)\,dt = 0}$$

5) a) $\forall t \in]0,\pi]$ $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \in]0,1)$

Donc φ est C^1 en tant que quotient de C^1

avec le dénominateur qui ne s'annule jamais.

$\boxed{\varphi \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, \pi]}$

$\forall x \in]0, \pi], \varphi'(t) = \dfrac{\sin(t/2) - \frac{t}{2}\cos(t/2)}{(\cos(t/2))^2}$

b] $\lim_{t \to 0} \varphi(t)$ $\sin(t/2) \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$

$\dfrac{t}{\sin(t/2)} \underset{0}{\sim} 2$

Donc $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = 2 \in \mathbb{R}$.

Donc φ est prolongée C^0 en 0

c] φ est C^1 sur $]0, \pi]$, C^0 en 0.

On peut appliquer le théorème de prolongement C^1.

$\lim_{t \to 0} \varphi'(t) = \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin(t/2) - t/2\cos(t/2)}{(\cos(t/2))^2}$

$(\cos(t/2))^2 \underset{0}{\sim} 1$

$\sin(t/2) - \frac{t}{2}\cos(\frac{t}{2}) = \frac{t}{2} - (\frac{t}{2})^3 - \frac{t}{2} + (\frac{t}{2})^2 + o(t^3)$
$= (\frac{t}{2})^2 - (\frac{t}{2})^3 = \dfrac{2t^2 - t^3}{8}$

$= \frac{2t^2(1-t^{*})}{8} = \frac{1}{4}\left(t^2(1-t)\right) \sim \frac{t^2}{4}.$

On $\frac{t^2}{4} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc φ est prolongée C^1 en 0.

$\boxed{\varphi \text{ est } C^1 \text{ sur } [0, \pi]}$

d)

β est C^1 $\forall t \in [0, \pi[$

comme φ se prolonge C^0 en π, 0 ;
β se prolonge C^0 en π

$\forall t \in [0, \pi[$, $\cancel{\beta'(t) = -\cos(t/2)}$

$$\beta'(t) = \frac{-\cos(t/2) + (\pi - t)\left(\frac{1}{2}\right)\sin(t/2)}{\cos^2(t/2)}$$

7b) $C = \frac{\pi^2}{8}$; $A - B = \frac{\pi^2}{4}$

$\frac{3}{4}A = \frac{\pi^2}{8} \Leftrightarrow A = \frac{\pi^2}{6}$

$A = \frac{\pi^2}{6}$, $B = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{-2\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{12}$

$A = \frac{\pi^2}{6}$ $C = -\pi^2/12$